

文章编号: 1001-0920(2013)12-1811-06

## 具有多时变时滞的多智能体系统在切换拓扑下的平均一致性

宋 莉, 伍清河

(北京理工大学 自动化学院, 北京 100081)

**摘 要:** 研究带有多时变时滞的二阶多智能体系统在切换拓扑下的平均一致性问题. 利用模型变换的方法和 Lyapunov-Krasovskii 理论, 以线性矩阵不等式 (LMIs) 的形式给出了多智能体系统达到平均一致性的充分条件, 其通讯拓扑图为联合连通的. 仿真结果验证了理论分析的正确性.

**关键词:** 多时变时滞; 联合连通拓扑; 线性矩阵不等式; 平均一致性

中图分类号: TP273

文献标志码: A

### Average consensus of multi-agent systems with multiple time-varying delays and switching topologies

SONG Li, WU Qing-he

(School of Automation, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China. Correspondent: SONG Li, E-mail: songli1226@gmail.com)

**Abstract:** Average consensus of second-order multi-agent systems with multiple time-varying delays and jointly-connected topologies is investigated. By employing model transformation method and Lyapunov-Krasovskii approach, some sufficient conditions in terms of linear matrix inequalities(LMIs) are given for average consensus of multi-agent systems with jointly-connected topologies. Finally, simulation results show the effectiveness of the theoretical results.

**Key words:** multiple time-varying delays; jointly-connected topologies; linear matrix inequalities(LMIs); average consensus

## 0 引 言

近年来,多智能体系统的协作控制问题已引起人们的广泛关注,其中包括空间编队飞行、环境监测以及智能电网调度等.在多智能体系统协作控制中,最重要的一个问题是如何基于邻域的信息设计分布式的控制协议,使得多智能体系统在出现有限资源、不可靠的信息交换、通讯拓扑结构变化以及通讯时延等状况时,系统的某个状态仍然能够达到一致.

许多学者已从各个方面研究了一致性问题,并得到了许多重要结论<sup>[1-8]</sup>.如:文献[3]考虑了3种情况下的一致性:1)有向固定拓扑图,2)有向切换拓扑图,3)带有通讯时延的无向固定拓扑图;文献[7]利用 Lyapunov-based 方法和相对空间分解技术研究了领导跟随一致性问题;文献[8]扩展了 LaSalle's 不变集原理,并将其应用于多智能体系统.

在实际应用中,由于有限的传输速度以及信道拥塞等情况,时滞问题经常出现.众所周知,时滞的出现

通常使得原本稳定的系统变得不稳定.另外,由于智能体不断地运动,智能体间的通讯拓扑也是经常变换的.文献[9]讨论了带有时滞的一阶多智能体系统在切换拓扑结构下的平均一致性问题,但其要求拓扑结构是时刻保持连通的;文献[10]也考虑了带有时滞的一阶多智能体系统在切换拓扑下的平均一致性问题;文献[11]研究了二阶多智能体系统带有时滞和联合连通图下的一致性问题,但其时滞是固定的.

本文将文献[9]中的结果扩展到带有多时变时滞的二阶多智能体网络系统,考虑通信拓扑图为联合连通情况下的平均一致性问题.用模型变换和 Lyapunov-Krasovskii 的方法,以线性矩阵不等式 (LMIs) 的形式给出了多智能体系统达到平均一致性的充分条件.每个 LMI 对应于一个可能的通讯拓扑图中的某个可能出现的最大连通子图,与文献[9]和文献[10]相比,本文考虑的是二阶多智能体系统,它与一阶系统具有本质的区别,一阶系统在 Lyapunov 意义下是稳定的,而

收稿日期: 2012-09-04; 修回日期: 2012-12-18.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61074031).

作者简介: 宋莉(1985-),女,博士生,从事多智能体协作控制、 $H_\infty$  控制的研究;伍清河(1955-),男,教授,博士生导师,从事大系统控制、鲁棒控制等研究.

二阶系统不是, 这便使得相应的分析难度更大. 相较于文献 [9], 本文的计算量要小得多, 尤其当智能体的个数很大时, 这是因为本文只要求智能体间的通讯拓扑图仅仅为联合连通. 与文献 [11] 相比, 本文考虑的是时变时滞而非固定时滞, 并给出了时滞变化率相关/无关的条件.

## 1 问题描述

### 1.1 代数图论

智能体网络拓扑经常用有向图或无向图描述, 记  $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A})$  为  $n$  个智能体间无向拓扑图, 其中  $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  为非空有限的节点集合,  $\mathcal{E} \in \mathcal{V}^2$  为边集,  $\mathcal{A} = [a_{ij}] \in R^{n \times n}$  为非负加权邻接矩阵. 边  $e_{ij} = (v_j, v_i) \in \mathcal{E}$  代表节点  $v_j$  与节点  $v_i$  之间相互传递信息, 由于拓扑图为无向的,  $e_{ij} \in \mathcal{E}$  意味着  $e_{ji} \in \mathcal{E}$ . 加权邻接矩阵定义如下: 如果  $e_{ij} \in \mathcal{E}$ , 则  $a_{ij} = a_{ji} > 0$ , 否则,  $a_{ij} = 0$ . 显然, 加权邻接矩阵为对称的非负矩阵. 一般假设节点与自身没有连通性, 即  $a_{ii} = 0, \forall i \in \mathcal{N}, \mathcal{N} = \{1, 2, \dots, n\}$ . 如果  $(v_j, v_i) \in \mathcal{E}$ , 则节点  $v_j$  被称作节点  $v_i$  的邻居.  $N_i = \{j | (v_j, v_i) \in \mathcal{E}\}$  表示节点  $v_i$  邻居的集合. 定义入度矩阵为  $\mathcal{D} = \text{diag}\{d_i\} \in R^{n \times n}$ , 其中  $d_i = \sum_{j \in N_i} a_{ij}$ , 则 Laplacian 矩阵  $L = \mathcal{D} - \mathcal{A}$ . 易知 Laplacian 矩阵  $L$  也是对称的. 路径  $v_i$  到  $v_j$  是指一系列有序连通边列  $(v_i, v_{i_1}), (v_{i_1}, v_{i_2}), \dots, (v_{i_l}, v_j)$ , 其中  $(v_{i_k}, v_{i_{k+1}}) \in \mathcal{E}, k = 1, 2, \dots, l$ . 如果无向图的任意两个顶点之间存在路径, 则称该无向图是连通的. 无向图  $\mathcal{G}$  的成份是指图中那些所有连通的极大子图. 图  $\bar{G}_1, \dots, \bar{G}_m$  的联合图与这些图有着同样的节点集  $\mathcal{V}$ , 联合图的边集是所有这些图的边集的并, 记为  $\bar{G}_{1-m}$ . 如果图  $\bar{G}_{1-m}$  为连通的, 则称图  $\bar{G}_1, \dots, \bar{G}_m$  为联合连通的.

**引理 1** [12] 如果无向图  $\mathcal{G}$  是连通的, 则其 Laplacian 矩阵  $L$  有如下性质:

1) 0 是 Laplacian 矩阵  $L$  的简单特征值, 其对应的特征向量为  $\mathbf{1}_n$ , 满足  $L\mathbf{1}_n = 0$ ;

2) Laplacian 矩阵  $L$  的其他特征值都为正实数.

### 1.2 网络动态

考虑一多智能体系统由  $n$  个智能体组成, 其动态方程描述为

$$\dot{x}_i = v_i, \dot{v}_i = u_i, i = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

其中:  $x_i \in R$  为位置信息,  $v_i \in R$  为速度信息,  $u_i \in R$  为控制输入.

考虑平均一致性问题, 设计如下的一致性协议:

$$u_i = -k_1 v_i(t) + \sum_{j \in N_i(t)} a_{ij}(t) [x_j(t - \tau_{ij}) - x_i(t - \tau_{ij})], i = 1, 2, \dots, n, \quad (2)$$

其中  $k_1 > 0$  为速度反馈增益.

为简化分析, 进行如下模型变换. 令

$$\begin{aligned} \bar{v}_i(t) &= 2v_i(t)/k_1 + x_i(t), \\ \xi(t) &= [x_1(t), \bar{v}_1(t), \dots, x_n(t), \bar{v}_n(t)], \\ A &= \begin{bmatrix} -k_1/2 & k_1/2 \\ k_1/2 & -k_1/2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2/k_1 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3)$$

则对于协议 (2), 网络闭环系统的动态描述为

$$\dot{\xi}(t) = (I_n \otimes A)\xi(t) - \sum_{k=1}^r (L_{\sigma k} \otimes B)\xi(t - \tau_k). \quad (4)$$

其中:  $\tau_k(t) \in \tau_{ij}(t), i, j \in I, k = 1, 2, \dots, r, r \leq n(n-1)/2$ . 并有矩阵  $L_{\sigma k} = [l_{kij}]$ , 定义如下:

$$l_{kij} = \begin{cases} -a_{ij}, j \neq i, \tau_k(\cdot) = \tau_{ij}(\cdot); \\ 0, j \neq i, \tau_k(\cdot) \neq \tau_{ij}(\cdot); \\ \sum_{j=1}^n l_{kij}, j = i. \end{cases}$$

因为图  $\mathcal{G}_\sigma$  是无向的, 从而可知  $L_{\sigma k}$  为对称矩阵, 并有  $L_{\sigma k}\mathbf{1}_n = 0$ . 因此

$$\mathbf{1}^T \left\{ (I_n \otimes A)\xi(t) - \sum_{k=1}^r (L_{\sigma k} \otimes B)\xi(t - \tau_k) \right\} = 0,$$

$$\text{i.e.} \sum_{i=1}^n (\dot{x}_i(t) + \dot{\bar{v}}_i(t)) = 0,$$

这就意味着  $\alpha = \left(\frac{1}{2n}\right) \sum_{i=1}^n (x_i(t) + \bar{v}_i(t))$  是一个不变量. 令  $\delta(t) = \xi(t) - \alpha\mathbf{1}$ , 则系统 (4) 可改写为

$$\dot{\delta}(t) = (I_n \otimes A)\delta(t) - \sum_{k=1}^r (L_{\sigma k} \otimes B)\delta(t - \tau_k). \quad (5)$$

显然有  $\sum_{i=1}^{2n} \delta_i(t) = 0$ , 即若  $\lim_{t \rightarrow \infty} \delta(t) = 0$ , 则  $\lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t) = \alpha\mathbf{1}$ , i.e.  $\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{v}_i(t) = \alpha$ . 换言之,  $\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = \left(\frac{1}{n}\right) \sum_{i=1}^n (x_i(0) + v_i(0)/k_1) = \left(\frac{1}{n}\right) \sum_{i=1}^n x_i(0)$ , 且对于任意的  $i \in I$ , 有  $\lim_{t \rightarrow \infty} v_i(t) = 0$ , 即系统达到平均一致性.

下面对时变时滞给出如下假设:

**假设 1**  $0 \leq \tau_k(t) \leq h_k, \dot{\tau}_k(t) \leq d_k < 1, t \geq 0, k = 1, 2, \dots, r$ , 其中  $h_k > 0, d_k \geq 0$ ;

**假设 2**  $0 \leq \tau_k(t) \leq h_k, t \geq 0, k = 1, 2, \dots, r$ , 其中  $h_k > 0$ , 即对于  $\tau_k$  的变化率一无所知.

## 2 主要结果

本文考虑带有多时变时滞的多智能体系统在切换拓扑结构下的稳定性问题. 为分析系统的稳定性, 考虑一组无穷有序的有界连续时间段  $[t_s, t_{s+1}), s = 0, 1, \dots$ , 且  $t_0 = 0, t_{k+1} - t_k \leq T_1$ , 其中  $T_1$  为某个大于 0 的常数. 假设每个时间段  $[t_s, t_{s+1})$  中存在一个非重叠的子序列  $[t_{s_0}, t_{s_1}), \dots, [t_{s_j}, t_{s_{j+1}}), \dots, [t_{s_{m_r-1}}, t_{s_{m_r}}), t_{s_0} = t_s, t_{s_{m_r}} = t_{s+1}$ , 满足  $t_{s_{j+1}} - t_{s_j} \geq T_2, 0 \leq j \leq m_r - 1$ .

其中:  $m_r$  为大于 0 的整数,  $T_2 > 0$  为给定的常数, 使得拓扑结构在时间段  $[t_{s_j}, t_{s_{j+1}})$  不变, 记为  $\mathcal{G}_{\sigma(t)}$ . 显然在每个时间间隔  $[t_s, t_{s+1})$  中至多有  $s_* = \lfloor T_1/T_2 \rfloor$  个子时间段, 其中  $\lfloor T_1/T_2 \rfloor$  表示不超过  $T_1/T_2$  的最大整数.

假设通讯拓扑图  $\mathcal{G}(t)$  在时间段  $[t_{s_j}, t_{s_{j+1}})$  中有  $l_{\sigma} \geq 1$  个连通成分, 相对应的节点集分别为  $\varphi_{s_j}^1, \varphi_{s_j}^2, \dots, \varphi_{s_j}^{l_{\sigma}}$ , 则存在一个变换矩阵  $D_{\sigma}$ , 使得  $D_{\sigma}^T L_{\sigma} D_{\sigma} = \text{diag}\{L_{\sigma}^1, L_{\sigma}^2, \dots, L_{\sigma}^{l_{\sigma}}\}$ , 且

$$\delta^T(t) D_{\sigma} = [\delta_{\sigma}^{1T}(t), \delta_{\sigma}^{2T}(t), \dots, \delta_{\sigma}^{l_{\sigma}T}(t)]. \quad (6)$$

其中: 矩阵块  $L_{\sigma}^i \in \mathbf{R}^{d_{\sigma}^i \times d_{\sigma}^i}$  为相应的连通成分所对应的 Laplacian 矩阵,  $d_{\sigma}^i$  表示相应的节点集  $\varphi_{s_j}^i$  的个数. 则在每个时间段  $[t_{s_j}, t_{s_{j+1}})$  内, 系统 (5) 都能够被分解为  $l_{\sigma}$  个子系统, 即

$$\begin{aligned} \dot{\delta}_{\sigma}^i(t) &= (I_{d_{\sigma}^i} \otimes A) \delta_{\sigma}^i(t) - \sum_{k=1}^r (L_{\sigma k}^i \otimes B) \delta_{\sigma}^i(t - \tau_k), \\ & \quad i = 1, 2, \dots, l_{\sigma}, \end{aligned} \quad (7)$$

其中  $\delta_{\sigma}^i(t) = [\delta_{\sigma 1}^{iT}(t), \dots, \delta_{\sigma d_{\sigma}^i}^{iT}(t)]^T \in \mathbf{R}^{d_{\sigma}^i}$ . 易得  $L_{\sigma k}^i \mathbf{1} = 0, (L_{\sigma k}^i)^T = L_{\sigma k}^i$ , 且  $L_{\sigma}^i = \sum_{k=1}^r L_{\sigma k}^i$ .

在给出主要结果之前, 先给出以下引理.

**引理 2**<sup>[9]</sup> 假设拓扑图  $\mathcal{G}$  是强连通且平衡的,  $L$  为其 Laplacian 矩阵, 则有

$$E^T(L + L^T)E > 0.$$

其中:  $E = \begin{bmatrix} I_{n-1} \\ E_0 \end{bmatrix}, E_0 = (-1, -1, \dots, -1)$ .

**引理 3** 令  $\Psi_{\sigma}^i = (I_{d_{\sigma}^i} \otimes A) - L_{\sigma}^i \otimes B$ , 其中  $A$  和  $B$  如式 (3) 中所定义, 且满足  $k_1^2 \geq 4 d_{\max}, d_{\max}$  表示所有可能的 Laplacian 矩阵  $L_{\sigma}$  对角线上的最大值, 则  $-\Psi_{\sigma}^i$  是一个 Laplacian 矩阵且与矩阵  $L_{\sigma}^i = [l_{ij}]$  具有相同的结构.

**证明** 直接计算, 得

$$-\Psi_{\sigma}^i = \begin{bmatrix} \frac{k_1}{2} & -\frac{k_1}{2} & \dots & 0 & 0 \\ -\frac{k_1}{2} + \frac{2}{k_1} l_{11} & \frac{k_1}{2} & \dots & \frac{2}{k_1} l_{1d_{\sigma}^i} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{k_1}{2} & -\frac{k_1}{2} \\ \frac{2}{k_1} l_{d_{\sigma}^i 1} & 0 & \dots & -\frac{k_1}{2} + \frac{2}{k_1} l_{d_{\sigma}^i d_{\sigma}^i} & \frac{k_1}{2} \end{bmatrix},$$

易得  $\Psi_{\sigma}^i \mathbf{1} = \mathbf{1}^T \Psi_{\sigma}^i = 0$ . 又因为  $k_1^2 \geq 4 d_{\max}$ , 所以  $-\frac{k_1}{2} + \frac{2}{k_1} l_{ii} \leq 0, i = 1, 2, \dots, d_{\sigma}^i$ , 即矩阵  $-\Psi_{\sigma}^i$  的非对角线元素为非正, 从而知  $-\Psi_{\sigma}^i$  为 Laplacian 矩阵. 不难看出, Laplacian 矩阵  $-\Psi_{\sigma}^i$  的拓扑图  $\bar{\mathcal{G}}_{\sigma}$  实际上是 Laplacian

矩阵  $L_{\sigma}^i$  拓扑图  $\mathcal{G}_{\sigma}$  的拓展: 将  $\mathcal{G}_{\sigma}$  中的每个节点增加一个节点, 并通过两条有向边使得这两个节点相互连接. 因此, 新得到的图与原来的图有相同的结构.

**注 1** 矩阵  $-\Psi_{\sigma}^i$  的拓扑图并不是对称的, 因为增加的节点与原节点之间是用两条有向边连接的, 且其连接的权重不一定相等.

**引理 4** (Schur 补)<sup>[13]</sup> 对于给定的对称矩阵  $S = S^T = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ * & S_{22} \end{bmatrix}$ , 以下 3 个条件等价:

- 1)  $S < 0$ ;
- 2)  $S_{11} < 0, S_{22} - S_{12}^T S_{11}^{-1} S_{12} < 0$ ;
- 3)  $S_{22} < 0, S_{11} - S_{12} S_{22}^{-1} S_{12}^T < 0$ .

**引理 5**<sup>[9]</sup> 对于任意的实微分向量函数  $x(t) \in \mathbf{R}$ , 常数矩阵  $0 < W = W^T \in \mathbf{R}^{n \times n}$  以及  $0 \leq \tau_k(t) \leq h_k$ , 有下列不等式成立:

$$h_k^{-1} [x(t) - x(t - \tau_k(t))]^T W [x(t) - x(t - \tau_k(t))] \leq \int_{t-\tau_k(t)}^t \dot{x}^T(s) W \dot{x}(s) ds, t \geq 0. \quad (8)$$

下面给出本文的主要定理.

**定理 1** 考虑由动态方程 (1) 和 (2) 所描述带有时变时滞的网络系统满足假设 1, 其网络拓扑图在时间段  $[t_s, t_{s+1})$  内满足联合连通. 如果对于某个给定的时滞  $0 \leq d_k < 1, k = 1, 2, \dots, r$ , 都存在合适的  $\alpha, \beta, \gamma$ , 使得在每个时间段  $[t_{s_j}, t_{s_{j+1}})$  内都满足如下矩阵不等式:

$$\Phi_{\sigma}^i = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \Phi_{13} \\ * & \Phi_{22} & \Phi_{23} \\ * & * & \Phi_{33} \end{bmatrix} < 0, i = 1, 2, \dots, l_{\sigma}. \quad (9)$$

其中

$$\Phi_{11} = E^T \left( \alpha \Psi_{\sigma}^i + \alpha \Psi_{\sigma}^{iT} + \beta \sum_{k=1}^r d_k I \right) E,$$

$$\Psi_{\sigma}^i = (I_{d_{\sigma}^i} \otimes A) - L_{\sigma}^i \otimes B,$$

$$\Phi_{12} = [E^T (\alpha (L_{\sigma 1}^i \otimes B) + \beta (1 - d_1) I) E, \dots,$$

$$E^T (\alpha (L_{\sigma r}^i \otimes B) + \beta (1 - d_r) I) E],$$

$$\Phi_{13} = E^T \Psi_{\sigma}^{iT},$$

$$\Phi_{22} = \text{diag} \left\{ -E^T \left( \frac{\gamma}{h_1} I + \beta (1 - d_1) I \right) E, \dots,$$

$$-E^T \left( \frac{\gamma}{h_r} I + \beta (1 - d_r) I \right) E \right\},$$

$$\Phi_{23} = [(L_{\sigma 1}^i \otimes B) E \quad \dots \quad (L_{\sigma r}^i \otimes B) E]^T,$$

$$\Phi_{33} = - \left( \gamma \sum_{k=1}^r h_k \right)^{-1}.$$

则一致性协议 (2) 可解决平均一致性问题.

**证明** 首先证明不等式 (9) 在定理 1 的假设条件下, 对于任意的  $0 \leq d_k < 1$  都是可行的. 将不等式 (9) 改写为

$$\begin{bmatrix} E^T \bar{\Psi}_\sigma^i E & \alpha E^T (L_{\sigma 1}^i \otimes B) E & \cdots & \alpha E^T (L_{\sigma r}^i \otimes B) E \\ * & -\frac{\gamma}{h_1} E^T E & 0 & 0 \\ * & * & \ddots & 0 \\ * & * & * & -\frac{\gamma}{h_r} E^T E \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^r d_k E^T E & (1-d_1) E^T E & \cdots & (1-d_r) E^T E \\ * & (d_1-1) E^T E & 0 & 0 \\ * & * & \ddots & 0 \\ * & * & * & (d_r-1) E^T E \end{bmatrix} + \gamma \sum_{k=1}^r h_k F^T F < 0. \tag{10}$$

其中:  $F^T = [\Psi_\sigma^i E \ (L_{\sigma 1}^i \otimes B) E \ \cdots \ (L_{\sigma r}^i \otimes B) E]^T$ ,  $\bar{\Psi}_\sigma^i = \alpha(\Psi_\sigma^i + \Psi_\sigma^{i^T})$ . 选取合适的  $\alpha, \beta, \gamma$  以及足够小  $h_k$ , 则不等式 (10) 成立当且仅当  $E^T(\Psi_\sigma^{i^T} + \Psi_\sigma^i)E < 0$ . 由引理 2 和引理 3 可知, 此不等式显然满足. 因此, 对于任意的  $0 \leq d_k < 1$ , 可以选取合适的  $\alpha, \beta, \gamma$  和  $h_k$ , 使得不等式 (10) 总是可行的.

下面证明系统 (4) 在假设 1 下达到平均一致性. 定义如下的 Lyapunov-Krasovskii 方程:

$$\begin{aligned} V(t) = & \alpha \delta^T(t) \delta(t) + \beta \sum_{k=1}^r \int_{t-\tau_k(t)}^t \delta^T(s) \delta(s) ds + \\ & \gamma \sum_{k=1}^r \int_{-\tau_k(t)}^0 \int_{t+\theta}^t \delta^T(s) \delta(s) ds d\theta. \end{aligned}$$

由式 (6) 可知,  $V(t)$  可以改写为

$$\begin{aligned} V(t) = & \sum_{i=1}^{l_\sigma} \left\{ \alpha \delta_\sigma^{i^T}(t) \delta_\sigma^i(t) + \beta \sum_{k=1}^r \int_{t-\tau_k(t)}^t \delta_\sigma^{i^T}(s) \delta_\sigma^i(s) ds + \right. \\ & \left. \gamma \sum_{k=1}^r \int_{-\tau_k(t)}^0 \int_{t+\theta}^t \delta_\sigma^{i^T}(s) \delta_\sigma^i(s) ds d\theta \right\}. \end{aligned}$$

令  $\eta_{\sigma k}^i(t) = \delta_\sigma^i(t) - \delta_\sigma^i(t - \tau_k)$ , 则系统 (7) 可改写为

$$\begin{aligned} \dot{\delta}_\sigma^i(t) = & [(I_{d_\sigma^i} \otimes A) - L_\sigma^i \otimes B] \delta_\sigma^i(t) + \\ & \sum_{k=1}^r (L_{\sigma k}^i \otimes B) \eta_{\sigma k}^i(t) = \\ & \Psi_\sigma^i \delta_\sigma^i(t) + \sum_{k=1}^r (L_{\sigma k}^i \otimes B) \eta_{\sigma k}^i(t). \end{aligned} \tag{11}$$

由式 (11) 计算  $\dot{V}(t)$ , 得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & \sum_{i=1}^{l_\sigma} \left\{ \delta_\sigma^{i^T}(t) (\bar{\Psi}_\sigma^i) \delta_\sigma^i(t) + \beta \sum_{k=1}^r \delta_\sigma^{i^T}(t) \delta_\sigma^i(t) + \right. \\ & \left. 2\alpha \delta_\sigma^{i^T}(t) \sum_{k=1}^r (L_{\sigma k}^i \otimes B) \eta_{\sigma k}^i(t) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left. \beta \sum_{k=1}^r (d_k - 1) \delta_\sigma^{i^T}(t - \tau_k) \delta_\sigma^i(t - \tau_k) + \right. \\ & \left. \gamma \sum_{k=1}^r \tau_k \dot{\delta}_\sigma^{i^T}(t) \dot{\delta}_\sigma^i(t) - \right. \\ & \left. \gamma \sum_{k=1}^r \int_{t-\tau_k(t)}^t \delta_\sigma^{i^T}(s) \dot{\delta}_\sigma^i(s) ds \right\} \leq \\ & \sum_{i=1}^{l_\sigma} \left\{ \delta_\sigma^{i^T}(t) \left( \bar{\Psi}_\sigma^i + \beta \sum_{k=1}^r d_k I \right) \delta_\sigma^i(t) + \right. \\ & \left. 2\delta_\sigma^{i^T}(t) \left[ \alpha \sum_{k=1}^r (L_{\sigma k}^i \otimes B) - \beta \sum_{i=1}^r (d_k - 1) I \right] \eta_{\sigma k}^i(t) + \right. \\ & \left. \gamma \sum_{k=1}^r h_k \left[ \Psi_\sigma^i \delta_\sigma^i(t) + \sum_{k=1}^r (L_{\sigma k}^i \otimes B) \eta_{\sigma k}^i(t) \right]^T \times \right. \\ & \left. \left[ \Psi_\sigma^i \delta_\sigma^i(t) + \sum_{k=1}^r (L_{\sigma k}^i \otimes B) \eta_{\sigma k}^i(t) \right] - \right. \\ & \left. \sum_{k=1}^r (\gamma/h_k + \beta(1-d_k)) \eta_{\sigma k}^{i^T}(t) \eta_{\sigma k}^i(t) \right\} = \\ & \sum_{i=1}^{l_\sigma} y_i^T(t) \tilde{\Phi}_\sigma^i y_i(t). \end{aligned} \tag{12}$$

其中

$$\begin{aligned} y_i^T(t) = & [\delta_\sigma^{i^T}(t), \eta_{\sigma 1}^i, \cdots, \eta_{\sigma r}^i], \\ \tilde{\Phi}_\sigma^i = & \begin{bmatrix} \tilde{\Phi}_{11} & \tilde{\Phi}_{12} \\ \tilde{\Phi}_{12}^T & \tilde{\Phi}_{22} \end{bmatrix} + \gamma \sum_{k=1}^r h_k \tilde{F}^T \tilde{F}, \\ \tilde{\Phi}_{11} = & \alpha(\Psi_\sigma^i + \Psi_\sigma^{i^T}) + \beta \sum_{k=1}^r d_k I, \\ \tilde{\Phi}_{12} = & [\alpha(L_{\sigma 1}^i \otimes B) + \beta(1-d_1)I, \cdots, \\ & \alpha(L_{\sigma r}^i \otimes B) + \beta(1-d_r)I], \\ \tilde{\Phi}_{22} = & \text{diag} \left\{ -\frac{\gamma}{h_1} I - \beta(1-d_1)I, \cdots, \right. \\ & \left. -\frac{\gamma}{h_r} I - \beta(1-d_r)I \right\}, \\ \tilde{F}^T = & [\Psi_\sigma^i \ L_{\sigma 1}^i \otimes B \ \cdots \ L_{\sigma r}^i \otimes B]^T. \end{aligned}$$

由于  $1^T \delta_\sigma^i \equiv 0$ , 记  $\delta_\sigma^i = E \tilde{\delta}_\sigma^i$ , 其中  $E \in R^{2d_\sigma^i \times (2d_\sigma^i - 1)}$  如引理 2 中所示. 因此, 由式 (12) 可知

$$\dot{V} \leq \sum_{i=1}^{l_\sigma} \tilde{y}_i^T(t) W^T \tilde{\Phi}_\sigma^i W \tilde{y}_i(t). \tag{13}$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{y}_i^T(t) = & [\tilde{\delta}_\sigma^{i^T}(t), \tilde{\eta}_{\sigma 1}^i, \cdots, \tilde{\eta}_{\sigma r}^i]; \\ \tilde{\eta}_{\sigma k}^i(t) = & \tilde{\delta}_\sigma^i(t) - \tilde{\delta}_\sigma^i(t - \tau_k) \quad k = 1, 2, \cdots, r; \\ W = & \text{diag}\{E, \cdots, E\} \in R^{2d_\sigma^i(1+r)}. \end{aligned}$$

由引理 4 知, 式 (9) 成立意味着  $W^T \tilde{\Phi}_\sigma^i W < 0$ . 因此, 存在正常数  $\beta_i, i = 1, 2, \cdots, l_\sigma, \beta = \min\{\beta_i\}$ , 使得下式成立:

$$\dot{V} \leq -\sum_{i=1}^{l_\sigma} \beta_i \|\tilde{\delta}_\sigma^i(t)\| \leq -\beta \|\tilde{\delta}_\sigma(t)\| \leq -\frac{\beta}{n} \|\delta_\sigma(t)\|.$$

则由文献 [14] 中的定理 2.1 可知, 系统 (7) 是渐近稳定的, 即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \delta_{\sigma}^i(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \xi_{\sigma}^i(t) - \frac{1}{d_{\sigma}^i} \mathbf{1}_{d_{\sigma}^i}^T \sum_{k=1}^{d_{\sigma}^i} \xi_{\sigma k}^i \right\| = 0,$$

其中  $\xi_{\sigma}^i(t)$  对应于  $\delta_{\sigma}^i(t)$ , 从而易知,  $\frac{1}{d_{\sigma}^i} \mathbf{1}_{d_{\sigma}^i}^T \sum_{k=1}^{d_{\sigma}^i} \xi_{\sigma k}^i$  在时间段  $[t_{s_j}, t_{s_{j+1}})$  内为一个不变量. 又因为系统 (7) 的解是绝对连续的, 且状态  $\xi_{\sigma}^i(t)$  也是连续的, 所以当  $t_{s_j} \rightarrow \infty$  时, 如果系统的拓扑图在该连续时间段  $[t_{s_j}, t_{s_{j+1}})$  和  $[t_{s_{j+1}}, t_{s_{j+2}})$  内都是联合连通的, 系统的所有状态都将趋于其初始状态的平均值. 依此类推, 当  $t \rightarrow \infty$  时, 由于系统的拓扑图在每个时间段  $[t_s, t_{s+1})$  内联合连通, 系统的所有状态都趋于系统的初始状态的平均值.  $\square$

当  $d_k \geq 1$  或  $\tau_k$  的变化率未知时, 有如下推论.

**推论 1** 考虑由动态方程 (1) 和 (2) 描述的带有时变时滞的网络系统满足假设 2, 其网络拓扑图在时间段  $[t_s, t_{s+1})$  内满足联合连通. 若对于任何给定时滞  $h_k > 0, k = 1, 2, \dots, r$ , 都存在合适的  $\alpha, \beta, \gamma$ , 使得在每个时间段  $[t_{s_j}, t_{s_{j+1}})$  内都满足如下矩阵不等式:

$$\Omega_{\sigma}^i = \begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & \Omega_{13} \\ * & \Omega_{22} & \Omega_{23} \\ * & * & \Omega_{33} \end{bmatrix} < 0. \quad (14)$$

其中

$$\begin{aligned} \Omega_{11} &= \alpha E^T (\Psi_{\sigma}^i + \Psi_{\sigma}^{i^T}) E, \\ \Omega_{12} &= [\alpha E^T (L_{\sigma 1}^i \otimes B) E, \dots, \alpha E^T (L_{\sigma r}^i \otimes B) E], \\ \Omega_{13} &= \Phi_{13}, \\ \Omega_{22} &= \text{diag} \left\{ -\frac{\gamma}{h_1} E^T E, \dots, -\frac{\gamma}{h_r} E^T E \right\}, \\ \Omega_{23} &= \Phi_{23}, \quad \Omega_{33} = \Phi_{33}. \end{aligned}$$

则一致性协议 (2) 可解决平均一致性问题.

**证明** 构造如下的 Lyapunov-Krasovskii 方程:

$$V(t) = \alpha \delta^T(t) \delta(t) + \gamma \sum_{k=1}^r \int_{-\tau_k}^0 \int_{t+\theta}^t \delta^T(s) \delta(s) ds d\theta,$$

其他部分的证明与定理 1 的证明类似, 此略.  $\square$

**注 2** 本文讨论的是二阶多智能体系统在拓扑为联合连通拓扑图下的一致性, 与文献 [9-10] 相比, 本文讨论了二阶系统. 另外, 相比文献 [9] 中的时刻保持连通, 本文只要求其通讯拓扑为联合连通, 这在实际应用中更容易实现. 与文献 [11] 相比, 本文讨论的是多时变时滞, 文献 [11] 只是本文的一种特殊情况.

**注 3** 定理 1 和推论 1 中的条件都是以 LMIs 的形式给出的, 每个 LMI 都对应于一个可能的连通成分和时滞. 然而, 有些成分有相同的结构和时滞, 因此, 只需计算那些不同成分与时滞所对应的 LMIs, 这也

在很大程度上降低了计算量.

### 3 仿真实验

下面用 Matlab 仿真实验来验证理论方案的有效性和正确性. 考虑一个由 6 个智能体组成的网络系统, 其通讯拓扑图为切换的, 如图 1 所示. 图 1 中的所有拓扑图都是非连通的并假设其边的权重都为 1. 通讯拓扑图每 0.1 s 切换一次, 其拓扑图的变换顺序为  $G_1 \rightarrow G_2 \rightarrow G_3 \rightarrow G_4 \rightarrow G_1 \dots$ . 假设智能体位置的初始状态为  $[-2, -5, 2, -1, 3, -3]$ . 假设边 (1, 2), (1, 6), (2, 3), (3, 4), (4, 5) 以及 (5, 6) 所对应的时滞分别为 0.4 s, 0.4 s, 0.3 s, 0.4 s, 0.2 s, 0.3 s. 选取  $k_1 = 2$ , 当  $d = 0$  时, 不等式 (9) 的一个可行解为  $\alpha = 0.9445, \beta = 0.6237, \gamma = 1$ . 图 2 和图 3 分别给出了所有智能体位置和速度的变化轨迹. 由图 2 和图 3 可看出, 智能体渐近达到平均一致.

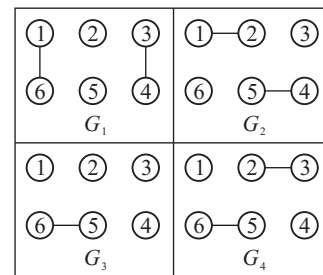


图 1 智能体的网络拓扑

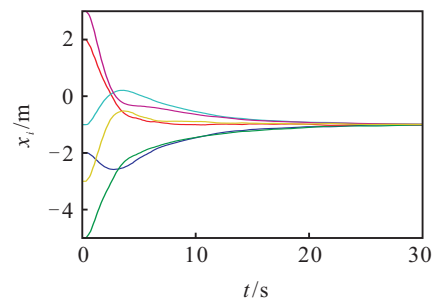


图 2 智能体的位置运动轨迹

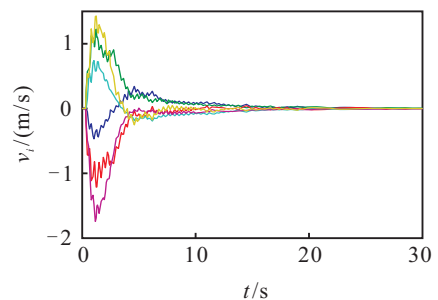


图 3 智能体的速度运动轨迹

综上所述, 本仿真实例选取的最大时滞为 0.4 s 时, 系统仍能达到一致, 而文献 [9] 中的例 1 计算得到的最大允许时滞为 0.353 s.

### 4 结 论

本文研究了具有多时变时滞的二阶多智能体网络系统在其通讯网络拓扑图为联合连通情况下

的平均一致性问题. 首先, 利用模型变换的方法和 Lyapunov-Krasovskii 理论, 以 LMIs 的形式分别给出了时滞相关/时滞变化率范围相关与时滞相关/时滞变化率无关两种情况下, 多智能体系统达到平均一致性的充分条件. 最后通过仿真实例验证了理论分析的正确性和有效性.

#### 参考文献(References)

- [1] Jadbabaie A, Lin J, Morse A S. Coordination of group of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2003, 48(6): 988-1001.
- [2] Lin Z, Broucke M, Francis B. Local control strategies for groups of mobile autonomous agents[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2004, 49(4): 622-629.
- [3] Olfati-Saber R, Murray R. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2004, 49(9): 1520-1533.
- [4] Ren W, Beard R. Consensus seeking in multiagent systems under dynamically changing interaction topologies[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2005, 50(5): 655-661.
- [5] Li Z, Duan Z, Chen G, et al. Consensus of multiagent systems and synchronization of complex networks: A unified viewpoint[J]. IEEE Trans on Circuits and Systems I: Regular Papers, 2010, 57(1): 213-224.
- [6] Lin P, Jia Y. Consensus of second-order discrete-time multi-agent systems with nonuniform time-delays and dynamically changing topologies[J]. Automatica, 2009, 45(9): 2154-2158.
- [7] Hong Y, Gao L, Cheng D, et al. Lyapunov-based approach to multiagent systems with switching jointly connected interconnection[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2007, 52(5): 943-948.
- [8] Cheng D, Wang J, Hu X. An extension of LaSalle's invariance principle and its application to multi-agent consensus[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2008, 53(7): 1765-1770.
- [9] Sun Y, Wang L, Xie G. Average consensus in networks of dynamic agents with switching topologies and multiple time-varying delays[J]. Systems & Control Letters, 2008, 57(2): 175-183.
- [10] Lin P, Qin K, Zhao H, et al. A new approach to average consensus problems with multiple time-delays and jointly-connected topologies[J]. J of the Franklin Insitute, 2012, 349(1): 293-304.
- [11] Lin P, Jia Y. Consensus of a class of second-order multi-agent systems with time-delay and jointly-connected topologies[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2010, 55(3): 778-784.
- [12] Godsil C, Royle G. Algebraic graph theory[M]. New York: Springer-Verlag, 1997: 163-187.
- [13] Boyd B, Ghaoui L E, Feron E, et al. Linear matrix inequalities in system and control theory[M]. Philadelphia: SIAM, 1994: 28-29.
- [14] Hale J K, Verduyn Lunel S M. Introduction to functional differential equations[M]. New York: Springer, 1993: 99-115.