

文章编号: 1001-0920(2013)12-1771-08

离散时间系统重复控制的理想误差动态方法

孙明轩, 许利达, 邬玲伟

(浙江工业大学 信息工程学院, 杭州 310023)

摘要: 针对周期参考信号下的离散时间系统, 引入吸引律构造理想误差动态特性, 并基于理想误差动态设计重复控制器. 重复控制能够实现周期性扰动的完全抑制, 从而提高控制性能. 为了消除颤振现象, 以饱和函数替换重复控制器中的符号函数. 分别推导了理想误差动态方程的单调减区域、吸引层和稳态误差带的边界, 用于刻画误差动态行为, 并给出了数值仿真结果. 在逆变器装置上完成的实验进一步表明了所提出的重复控制方法的有效性.

关键词: 理想误差动态; 重复控制; 逆变器; 离散时间系统

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Ideal-error-dynamics approach for repetitive control of discrete-time systems

SUN Ming-xuan, XU Li-da, WU Ling-wei

(College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310023, China. Correspondent: SUN Ming-xuan, E-mail: mxsun@zjut.edu.cn)

Abstract: This paper presents a repetitive control method for discrete-time systems, where the reference signal is periodic. An attracting law is suggested to form ideal error dynamics, and the repetitive controller design is carried out based on the ideal error dynamics. Through replacing the sign function with the saturation function, the chatting can be eliminated, and complete rejection for periodic disturbances can be achieved. To characterize the error dynamics, the monotonically decreasing region, the attractive layer, and the steady-state error band are defined, and the bounds for three layers are derived respectively. Numerical simulation and experiment results on a DC/AC converter are presented to show the effectiveness of the proposed repetitive control method.

Key words: ideal error dynamics; repetitive control; inverters; discrete-time systems

0 引言

目前, 控制系统的实现方式主要依靠计算机控制技术, 与模拟实现技术相比较, 它易于实现更为复杂的控制策略, 这也是离散时间控制系统理论引起人们重视的主要原因之一. 极点配置方法是离散控制器设计的主要方法^[1-2], 这种方法通过配置闭环系统极点位置, 能够实现跟踪误差的渐近收敛. 文献[3-5]提出了等式形式的到达条件——趋近律, 并利用趋近律进行控制器设计. 与不等式形式的到达条件相比, 趋近律更容易用来导出控制律. 目前, 趋近律方法是离散变结构控制系统设计的主要方法. 对于连续趋近律, 要求在有限时间到达切换曲面; 对于离散趋近律, 可通过离散化连续趋近律获得.

回顾已发表的离散变结构控制的研究结果, 文献

[3-5]形成了趋近律方法, 采用等速趋近律以及指数趋近律的离散形式设计变结构控制器, 并给出了准滑动模态及准滑模带宽的定义. 在离散趋近律中采用断续函数 sgn 会导致闭环系统出现颤振现象. 文献[6]对其进行了较为深入的分析, 其控制性能引起了人们较为浓厚的、持续的研究兴趣. 文献[6-9]分别针对确定性情形和不确定性情形, 纷纷推导出了准滑模带宽的表达式; 文献[7, 9-12]对准滑模带外切换函数的吸引过程进行了刻画. 在实现时, 常采用断续函数连续化措施克服由 sgn 函数导致的颤振现象, 如采用饱和函数 sat 取代 sgn 函数^[7, 9, 11-12]. 文献[13]采用单位向量连续化方式, 以 $s/(|s| + \delta)$, $\delta > 0$, 取代 sgn 函数, 这类处理方式常见于连续时间情形, 但却鲜见于离散趋近律. 以趋近律方法设计确定系统的控制器易于实现,

收稿日期: 2012-09-03; 修回日期: 2013-01-21.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60874041, 61174034).

作者简介: 孙明轩(1961—), 男, 教授, 博士生导师, 从事学习控制等研究; 许利达(1987—), 男, 硕士生, 从事重复控制的研究.

但对于不确定系统,若设计控制器时使用趋近律方法,推导出的控制器依赖于系统的不确定性项,导致系统的控制性能主要取决于对不确定性项的处理方式.因此,需采用理想切换动态方法,即通过将干扰抑制手段“嵌入”趋近律,从而获得理想切换动态来设计控制器.实际上,它是用于处理不确定系统的趋近律方法^[9,14-16].

实际中,当被控对象执行周期跟踪任务时,其外部干扰通常含有周期成分,重复控制方法能完全抑制周期性干扰,是适用于这类系统的有效控制方法.目前,大多研究都集中于重复控制器的频域设计,是基于内模原理进行的.文献[9,12-13]提出的离散滑模重复控制方法是通过构造理想切换动态设计离散重复控制器,并给出了系统跟踪性能的时域分析结果.

本文提出一种离散时间系统重复控制的理想误差动态方法,基于离散吸引律形成理想误差动态,并据此推导出重复控制器,使闭环系统具有理想误差动态所刻画的期望性能.这种离散控制器设计方法的初步结果见文献[17-18].本文提出理想误差动态方法的动机源于离散变结构控制的理想切换动态方法.两者的区别在于:将跟踪误差取代切换函数、原点取代切换面;变结构控制要求有限时间达到切换面,而本文提出的方法要求有限时间达到原点;闭环系统仍具有关于参数漂移和外部干扰的鲁棒性能,只是变结构控制注重滑模运动的不变性,而本文提出的方法追求系统稳态运动的不变性.本文通过饱和函数 sat 取代符号函数 sgn ,形成了改进的理想误差动态,并用其设计重复控制器.文中分析了单调减区域、吸引层边界和稳态误差带边界,刻画了系统的收敛性能.最后通过数值仿真实验验证了3个边界值,并通过搭建单相逆变器装置验证了所提出的重复控制方法的有效性.

1 问题描述

考虑单输入单输出离散时间系统

$$A(q^{-1})y_k = B(q^{-1})u_k + w_k. \quad (1)$$

其中: u_k 和 y_k 分别为 k 时刻的输入和输出; w 为含有周期和非周期成分的系统干扰,其周期为 N , w_k 为 k 时刻的系统干扰; $A(q^{-1})$ 和 $B(q^{-1})$ 均是延迟算子 q^{-1} 的多项式,即

$$\begin{aligned} A(q^{-1}) &= 1 + a_1q^{-1} + \cdots + a_nq^{-n}, \\ B(q^{-1}) &= b_1q^{-1} + \cdots + b_mq^{-m}. \end{aligned}$$

这里: a_1, \cdots, a_n 和 b_1, \cdots, b_m 为系统参数,且 $b_1 \neq 0$.

给定周期为 N 的参考信号 r_k , 满足 $r_k = r_{k-N}$. 定义跟踪误差

$$e_k = r_k - y_k. \quad (2)$$

本文的控制目标是,利用重复控制技术,使系统(1)在

周期参考输入下实现对干扰中周期成分的完全抑制,从而提高系统的跟踪性能.

本文基于理想误差动态设计重复控制器,提出刻画跟踪误差动态行为的几个概念.下面引进稳态误差带的概念,即

$$|e_k| \leq \Delta_{\text{SSE}} \Rightarrow |e_{k+1}| \leq \Delta_{\text{SSE}},$$

其中 Δ_{SSE} 为稳态误差带边界.跟踪误差在收敛过程中存在一个绝对吸引层,当误差处在绝对吸引层边界外时, $|e_k|$ 单调递减,即 $|e_k| > \Delta_{\text{AL}} \Rightarrow |e_{k+1}| < |e_k|$, 其中 Δ_{AL} 为绝对吸引层边界.同时,系统误差还存在一个同号单调递减的区域,当 e_k 位于这个区域之外时, e_k 本身单调递减(e_k 位于该区域的上半部分)或单调增加(e_k 位于该区域的下半部分),即

$$\begin{cases} 0 < e_{k+1} < e_k, & e_k > \Delta_{\text{MDR}}; \\ e_k < e_{k+1} < 0, & e_k < -\Delta_{\text{MDR}}. \end{cases}$$

其中 Δ_{MDR} 为单调减区域边界.

实际上, Δ_{SSE} , Δ_{AL} 和 Δ_{MDR} 的具体取值依赖于控制器参数,控制器参数不同,上述3个边界的取值不同.本文将对3个边界给出具体的表达式以及相应的推导过程.

2 基于理想误差动态的重复控制

为了能够完全抑制周期性干扰,本文提出了基于理想误差动态的重复控制器设计方法.这里,理想误差动态方程是“嵌入”了干扰抑制手段的误差方程.

考虑下述吸引律:

$$e_{k+1} = (1 - \rho)e_k - \varepsilon \text{sat}\left(\frac{e_k}{\delta}\right). \quad (3)$$

其中: $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, $0 < \rho < 1$. 这3个参数满足 $\varepsilon \leq \delta(1 - \rho)$. 这里的饱和函数 $\text{sat}(\cdot)$ 定义如下:

$$\text{sat}\left(\frac{e_k}{\delta}\right) = \begin{cases} \text{sgn}(e_k), & |e_k| > \delta; \\ e_k/\delta, & |e_k| \leq \delta. \end{cases}$$

因为实际系统存在各种各样的不确定性,吸引律(3)在实际中不易实现,所以需对其进行适当修正.

依据参考信号 r_k 的周期性,构造等效干扰

$$d_k = w_k - w_{k-N}. \quad (4)$$

由式(4)可以看出, d_k 中不含 w_k 的周期成分.将干扰抑制手段“嵌入”到吸引律(3)中,可构造如下理想误差动态方程:

$$e_{k+1} = (1 - \rho)e_k - \varepsilon \text{sat}\left(\frac{e_k}{\delta}\right) + d_{k+1}^* - d_k, \quad (5)$$

其中 d_{k+1}^* 为 d_{k+1} 的补偿值,用于抑制干扰信号 d_{k+1} 的影响.记 d_u 、 d_l 分别为 d_k 的上、下界,可取 $d_k^* = (d_u + d_l)/2$. 因此 $|d_k - d_k^*| \leq \Delta$, 其中 $\Delta = (d_u - d_l)/2$.

由式(1)和(4)知

$$\begin{aligned} d_{k+1} &= \\ y_{k+1} - y_{k+1-N} - B(q^{-1})(u_{k+1} - u_{k+1-N}) + \end{aligned}$$

$$(A(q^{-1}) - 1)(y_{k+1} - y_{k+1-N}).$$

由跟踪误差的定义(2), 可得

$$d_{k+1} = r_{k+1} - e_{k+1} - (r_{k+1-N} - e_{k+1-N}) + (A(q^{-1}) - 1)(y_{k+1} - y_{k+1-N}) - B(q^{-1})(u_{k+1} - u_{k+1-N}). \quad (6)$$

将式(6)代入(5), 有

$$e_{k+1} = (1 - \rho)e_k - \varepsilon \operatorname{sat}\left(\frac{e_k}{\delta}\right) + d_{k+1}^* - r_{k+1} + e_{k+1} + (r_{k+1-N} - e_{k+1-N}) - (A(q^{-1}) - 1)(y_{k+1} - y_{k+1-N}) + b_1(u_k - u_{k-N}) + F(q^{-1})(u_{k+1} - u_{k+1-N}), \quad (7)$$

其中 $F(q^{-1}) = B(q^{-1}) - b_1q^{-1}$. 可得如下重复控制器:

$$u_k = u_{k-N} - \frac{1}{b_1} \left[(1 - \rho)e_k - \varepsilon \operatorname{sat}\left(\frac{e_k}{\delta}\right) - r_{k+1} + r_{k+1-N} - (A(q^{-1}) - 1)(y_{k+1} - y_{k+1-N}) - e_{k+1-N} + F(q^{-1})(u_{k+1} - u_{k+1-N}) + d_{k+1}^* \right]. \quad (8)$$

3 系统性能分析

理想误差动态方程(5)决定着跟踪误差 e_k 的收敛行为, 选取不同的控制器参数会导致不同的误差特性. 本节通过对稳态误差带边界、吸引层边界、单调减区域边界的刻画来分析闭环系统的跟踪性能.

在重复控制器(8)的作用下, 闭环系统跟踪误差的稳态误差带边界 Δ_{SSE} 、吸引层边界 Δ_{AL} 和单调减区域边界 Δ_{MDR} 分别为

$$\Delta_{SSE}, \Delta_{AL} = \begin{cases} \Delta/(\rho + \varepsilon/\delta), & \varepsilon > \Delta - \delta\rho; \\ (\Delta - \varepsilon)/\rho, & \varepsilon \leq \Delta - \delta\rho; \end{cases} \quad (9)$$

$$\Delta_{MDR} = \begin{cases} (\varepsilon + \Delta)/(1 - \rho), & \max\{\delta(1 - \rho) - \Delta, \Delta(1 - 2\rho)\} < \varepsilon \leq \delta(1 - \rho); \\ \Delta/(1 - \rho - \varepsilon/\delta), & \delta(0.5 - \rho) < \varepsilon \leq \delta(1 - \rho) - \Delta; \\ \Delta/(\rho + \varepsilon/\delta), & \Delta - \rho\delta < \varepsilon \leq \delta(0.5 - \rho); \\ (\Delta - \varepsilon)/\rho, & \varepsilon \leq \min\{\Delta - \rho\delta, \Delta(1 - 2\rho)\}. \end{cases} \quad (10)$$

下面给出 3 个边界表达式的具体推导过程.

3.1 单调减区域 (Δ_{MDR})

下面按 $\Delta_{MDR} > \delta$ 和 $\Delta_{MDR} \leq \delta$ 两种情况进行讨论.

1) $\Delta_{MDR} > \delta$ 情形.

当 $e_k > \Delta_{MDR}$ 时, 由饱和函数定义知, 式(5)中 $\operatorname{sat}(e_k/\delta) = \operatorname{sgn}(e_k)$. 根据 Δ_{MDR} 的定义, 有

$$0 < (1 - \rho)e_k - \varepsilon + d_{k+1}^* - d_{k+1} < e_k.$$

因为 $|d_k - d_k^*| \leq \Delta$, 所以

$$\begin{cases} (1 - \rho)e_k - \varepsilon + \Delta < e_k, \\ (1 - \rho)e_k - \varepsilon - \Delta > 0. \end{cases}$$

解不等式方程组, 得

$$e_k > \max\left\{\frac{\Delta - \varepsilon}{\rho}, \frac{\varepsilon + \Delta}{1 - \rho}\right\}.$$

同理, 当 $e_k < -\Delta_{MDR}$ 时, 有

$$e_k < \min\left\{-\frac{\Delta - \varepsilon}{\rho}, -\frac{\varepsilon + \Delta}{1 - \rho}\right\}.$$

因此, 单调减区域的边界 Δ_{MDR} 为

$$\Delta_{MDR} = \max\left\{\frac{\Delta - \varepsilon}{\rho}, \frac{\varepsilon + \Delta}{1 - \rho}\right\} > \delta. \quad (11)$$

2) $\Delta_{MDR} \leq \delta$ 情形.

当 $\Delta_{MDR} < e_k \leq \delta$ 时, 由饱和函数定义知, 式(5)中 $\operatorname{sat}(e_k/\delta) = e_k/\delta$. 根据 Δ_{MDR} 的定义, 有 $0 < (1 - \rho - \varepsilon/\delta)e_k + d_{k+1}^* - d_{k+1} < e_k$. 利用 $|d_k - d_k^*| \leq \Delta$, 有

$$\begin{cases} (1 - \rho - \varepsilon/\delta)e_k + \Delta < e_k, \\ (1 - \rho - \varepsilon/\delta)e_k - \Delta > 0. \end{cases}$$

解不等式方程组, 得

$$e_k > \max\left\{\frac{\Delta}{\rho + \varepsilon/\delta}, \frac{\Delta}{1 - \rho - \varepsilon/\delta}\right\}.$$

同理, 当 $-\delta \leq e_k < -\Delta_{MDR}$ 时, 有

$$e_k < \min\left\{-\frac{\Delta}{1 - \rho - \varepsilon/\delta}, -\frac{\Delta}{\rho + \varepsilon/\delta}\right\}.$$

因此

$$\Delta_{MDR} = \max\left\{\frac{\Delta}{1 - \rho - \varepsilon/\delta}, \frac{\Delta}{\rho + \varepsilon/\delta}\right\}. \quad (12)$$

当 $e_k > \delta$ 时, 有不等式方程组

$$\begin{cases} (1 - \rho)e_k - \varepsilon + \Delta < e_k, \\ (1 - \rho)e_k - \varepsilon - \Delta > 0. \end{cases} \quad (13)$$

解不等式方程组(13), 得

$$e_k > \max\left\{\frac{\Delta - \varepsilon}{\rho}, \frac{\varepsilon + \Delta}{1 - \rho}\right\}.$$

同理, 当 $e_k \leq -\delta < 0$ 时, 有

$$e_k < \min\left\{-\frac{\Delta - \varepsilon}{\rho}, -\frac{\varepsilon + \Delta}{1 - \rho}\right\}.$$

因为 $e_k > \delta$, 继而 $e_k > \Delta_{MDR}$, 所以只要保证

$$\max\left\{\frac{\Delta - \varepsilon}{\rho}, \frac{\varepsilon + \Delta}{1 - \rho}\right\} \leq \delta,$$

不等式方程组(13)恒成立.

结合式(12), 有

$$\Delta_{MDR} = \max\left\{\frac{\Delta}{1 - \rho - \varepsilon/\delta}, \frac{\Delta}{\rho + \varepsilon/\delta}\right\},$$

$$\text{as } \max\left\{\frac{\Delta - \varepsilon}{\rho}, \frac{\varepsilon + \Delta}{1 - \rho}\right\} \leq \delta. \quad (14)$$

由式(11)和(14), 可得

$$\Delta_{MDR} = \begin{cases} \max\left\{\frac{\Delta - \varepsilon}{\rho}, \frac{\varepsilon + \Delta}{1 - \rho}\right\} > \delta, \\ \max\left\{\frac{\Delta}{1 - \rho - \varepsilon/\delta}, \frac{\Delta}{\rho + \varepsilon/\delta}\right\}, \\ \text{as } \max\left\{\frac{\Delta - \varepsilon}{\rho}, \frac{\varepsilon + \Delta}{1 - \rho}\right\} \leq \delta. \end{cases} \quad (15)$$

单调减区域边界 Δ_{MDR} 的表达式依赖于控制器参数 $\varepsilon, \rho, \delta$ 和扰动的界值 Δ . 根据式 (15), 当 $\delta \leq 2\Delta$ 时, 以 $\varepsilon = (1 - 2\rho)\Delta$ 进行分界, 可得 Δ_{MDR} 的表达式为

$$\Delta_{MDR} = \begin{cases} (\varepsilon + \Delta)/(1 - \rho), & \varepsilon > (1 - 2\rho)\Delta; \\ (\Delta - \varepsilon)/\rho, & 0 < \varepsilon \leq (1 - 2\rho)\Delta. \end{cases} \quad (16)$$

当 $\delta > 2\Delta$ 时, 可利用 $\varepsilon = \Delta - \rho\delta, \delta(0.5 - \rho), \delta(1 - \rho) - \Delta$ 和 $\delta(1 - \rho)$ 进行分界, 得 Δ_{MDR} 的表达式为

$$\Delta_{MDR} = \begin{cases} (\varepsilon + \Delta)/(1 - \rho), & \delta(1 - \rho) - \Delta < \varepsilon \leq \delta(1 - \rho); \\ \Delta/(1 - \rho - \varepsilon/\delta), & \delta(0.5 - \rho) < \varepsilon \leq \delta(1 - \rho) - \Delta; \\ \Delta/(\rho + \varepsilon/\delta), & \Delta - \rho\delta < \varepsilon \leq \delta(0.5 - \rho); \\ (\Delta - \varepsilon)\rho, & \varepsilon \leq \Delta - \rho\delta. \end{cases} \quad (17)$$

这样, 结合式 (16) 和 (17) 可得式 (10).

3.2 吸引层 (Δ_{AL})

下面按 $\Delta_{AL} > \delta$ 和 $\Delta_{AL} \leq \delta$ 两种情形进行推导.

1) $\Delta_{AL} > \delta$ 情形.

当 $e_k > \Delta_{AL}$ 时, 由饱和函数的定义知, 式 (5) 中 $\text{sat}(e_k/\delta) = \text{sgn}(e_k)$. 由 Δ_{AL} 的定义知

$$-e_k < (1 - \rho)e_k - \varepsilon + d_{k+1}^* - d_{k+1} < e_k.$$

利用 $|d_k - d_k^*| \leq \Delta$, 有

$$\begin{cases} (1 - \rho)e_k - \varepsilon + \Delta < e_k, \\ (1 - \rho)e_k - \varepsilon - \Delta > -e_k. \end{cases}$$

解不等式方程组, 可得

$$e_k > \max \left\{ \frac{\Delta - \varepsilon}{\rho}, \frac{\varepsilon + \Delta}{2 - \rho} \right\}.$$

同理, 当 $e_k < -\Delta_{AL}$ 时, 有

$$e_k < \min \left\{ -\frac{\Delta - \varepsilon}{\rho}, -\frac{\varepsilon + \Delta}{2 - \rho} \right\}.$$

因此, 吸引层边界 Δ_{AL} 为

$$\Delta_{AL} = \max \left\{ \frac{\Delta - \varepsilon}{\rho}, \frac{\varepsilon + \Delta}{2 - \rho} \right\} > \delta. \quad (18)$$

2) $\Delta_{AL} \leq \delta$ 情形.

当 $\Delta_{AL} < e_k \leq \delta$ 时, 由饱和函数的定义知, 式 (5) 中 $\text{sat}(e_k/\delta) = e_k/\delta$. 根据 Δ_{AL} 的定义, 有

$$-e_k < (1 - \rho - \varepsilon/\delta)e_k + d_{k+1}^* - d_{k+1} < e_k.$$

利用 $|d_k - d_k^*| \leq \Delta$, 有

$$\begin{cases} (1 - \rho - \varepsilon/\delta)e_k + \Delta < e_k, \\ (1 - \rho - \varepsilon/\delta)e_k - \Delta > -e_k. \end{cases}$$

解不等式方程组, 可得

$$e_k > \max \left\{ \frac{\Delta}{\rho + \varepsilon/\delta}, \frac{\Delta}{2 - \rho - \varepsilon/\delta} \right\}.$$

由于 $0 < \varepsilon/\delta \leq 1 - \rho$, 有 $e_k > \Delta/(\rho + \varepsilon/\delta)$. 同理, 当 $-\delta \leq e_k < -\Delta_{AL}$ 时, 有

$$e_k \leq \min \left\{ -\frac{\Delta}{2 - \rho - \varepsilon/\delta}, -\frac{\Delta}{\rho + \varepsilon/\delta} \right\}.$$

由于 $0 < \varepsilon/\delta \leq 1 - \rho$, 有 $e_k \leq -\Delta/(\rho + \varepsilon/\delta)$. 这样, 吸引

层边界为

$$\Delta_{AL} = \Delta/(\rho + \varepsilon/\delta) \leq \delta. \quad (19)$$

当 $e_k > \delta$ 时, 有如下不等式方程组:

$$\begin{cases} (1 - \rho)e_k - \varepsilon + \Delta < e_k, \\ (1 - \rho)e_k - \varepsilon - \Delta > -e_k. \end{cases} \quad (20)$$

解不等式方程组 (20), 可得

$$e_k > \max \left\{ \frac{\Delta - \varepsilon}{\rho}, \frac{\varepsilon + \Delta}{2 - \rho} \right\}.$$

同理, 当 $e_k < -\delta$ 时, 有

$$e_k < \min \left\{ -\frac{\Delta - \varepsilon}{\rho}, -\frac{\varepsilon + \Delta}{2 - \rho} \right\}.$$

因为 $e_k > \delta$, 继而 $e_k > \Delta_{AL}$, 所以只要保证

$$\max \left\{ \frac{\Delta - \varepsilon}{\rho}, \frac{\varepsilon + \Delta}{2 - \rho} \right\} \leq \delta,$$

不等式 (20) 恒成立.

结合式 (19), 可得

$$\Delta_{AL} = \frac{\Delta}{\rho + \varepsilon/\delta}, \text{ as } \max \left\{ \frac{\Delta - \varepsilon}{\rho}, \frac{\varepsilon + \Delta}{2 - \rho} \right\} \leq \delta. \quad (21)$$

由式 (18) 和 (21), 可得

$$\Delta_{AL} = \begin{cases} \max \left\{ \frac{\Delta - \varepsilon}{\rho}, \frac{\varepsilon + \Delta}{2 - \rho} \right\} > \delta; \\ \frac{\Delta}{\rho + \varepsilon/\delta}, \text{ as } \max \left\{ \frac{\Delta - \varepsilon}{\rho}, \frac{\varepsilon + \Delta}{2 - \rho} \right\} \leq \delta. \end{cases} \quad (22)$$

吸引层边界 Δ_{AL} 的表达式依赖于控制器参数 $\varepsilon, \rho, \delta$ 和扰动的界值 Δ . 根据式 (22), 当 $\delta \leq \Delta$ 时, 可以用 $\varepsilon = \Delta(1 - \rho)$ 进行分界. 利用 $\varepsilon \leq \delta(1 - \rho)$, 可得 Δ_{AL} 的表达式为

$$\Delta_{AL} = (\Delta - \varepsilon)/\rho, 0 < \varepsilon \leq \delta(1 - \rho). \quad (23)$$

当 $\delta > \Delta$ 时, 可以用 $\varepsilon = \Delta - \rho\delta, \delta(1 - \rho), \delta(2 - \rho) - \Delta$ 进行分界, 得 Δ_{AL} 的表达式为

$$\Delta_{AL} = \begin{cases} \Delta/(\rho + \varepsilon/\delta), & \varepsilon > \Delta - \delta\rho; \\ (\Delta - \varepsilon)/\rho, & \varepsilon \leq \Delta - \delta\rho. \end{cases} \quad (24)$$

这样, 结合式 (23) 和 (24) 可得式 (9).

3.3 稳态误差带 (Δ_{SSE})

下面按 $\Delta_{SSE} > \delta$ 和 $\Delta_{SSE} \leq \delta$ 两种情形进行推导.

1) $\Delta_{SSE} > \delta$ 情况.

当 $\delta < e_k \leq \Delta_{SSE}$ 时, 由饱和函数的定义可知 $\text{sat}(e_k/\delta) = \text{sgn}(e_k)$. 根据 Δ_{SSE} 的定义, 有

$$-\Delta_{SSE} \leq (1 - \rho)e_k - \varepsilon + d_{k+1}^* - d_{k+1} \leq \Delta_{SSE}.$$

因为 $|d_k - d_k^*| \leq \Delta$, 所以

$$\begin{cases} (1 - \rho)\Delta_{SSE} - \varepsilon + \Delta \leq \Delta_{SSE}, \\ (1 - \rho)\delta - \varepsilon - \Delta \geq -\Delta_{SSE}. \end{cases}$$

解该不等式方程组, 得

$$\Delta_{SSE} \geq \max \left\{ \frac{\Delta - \varepsilon}{\rho}, \varepsilon + \Delta - \delta(1 - \rho) \right\}.$$

同理, 当 $-\Delta_{SSE} \leq e_k < -\delta$ 时, 可得到相同的结果. 因

此, 稳态误差带边界 Δ_{SSE} 为 (选取满足取值条件的最小值)

$$\Delta_{\text{SSE}} = \max \left\{ \frac{\Delta - \varepsilon}{\rho}, \varepsilon + \Delta - \delta(1 - \rho) \right\} > \delta. \quad (25)$$

当 $0 \leq e_k \leq \delta \leq \Delta_{\text{SSE}}$ 时, 由饱和函数的定义可知 $\text{sat}(e_k/\delta) = e_k/\delta$. 根据 Δ_{SSE} 的定义, 有

$$-\Delta_{\text{SSE}} \leq (1 - \rho - \varepsilon/\delta)e_k + d_{k+1}^* - d_{k+1} \leq \Delta_{\text{SSE}}.$$

利用 $|d_k - d_k^*| \leq \Delta$, 有

$$\begin{cases} (1 - \rho - \varepsilon/\delta)\delta + \Delta \leq \Delta_{\text{SSE}}, \\ -\Delta \geq -\Delta_{\text{SSE}}. \end{cases}$$

解该不等式方程组, 得

$$\Delta_{\text{SSE}} \geq \delta(1 - \rho) - \varepsilon + \Delta.$$

同理, 当 $-\Delta_{\text{SSE}} \leq -\delta < e_k$ 时, 可得到相同的结果. 因此, 稳态误差带边界 Δ_{SSE} 为

$$\Delta_{\text{SSE}} = \delta(1 - \rho) - \varepsilon + \Delta > \delta. \quad (26)$$

结合式 (25) 和 (26), 可得

$$\Delta_{\text{SSE}} = \max \left\{ \frac{\Delta - \varepsilon}{\rho}, \varepsilon + \Delta - \delta(1 - \rho), \delta(1 - \rho) - \varepsilon + \Delta \right\} > \delta. \quad (27)$$

2) $\Delta_{\text{SSE}} \leq \delta$ 情况.

当 $0 < e_k \leq \Delta_{\text{SSE}} \leq \delta$ 时, 由饱和函数的定义知 $\text{sat}(e_k/\delta) = e_k/\delta$. 根据 Δ_{SSE} 的定义, 有

$$-\Delta_{\text{SSE}} \leq (1 - \rho - \varepsilon/\delta)e_k + d_{k+1}^* - d_{k+1} \leq \Delta_{\text{SSE}}.$$

因为 $|d_k - d_k^*| \leq \Delta$, 所以

$$\begin{cases} (1 - \rho - \varepsilon/\delta)\Delta_{\text{SSE}} + \Delta \leq \Delta_{\text{SSE}}, \\ -\Delta \geq -\Delta_{\text{SSE}}. \end{cases}$$

解该不等式方程组, 得 $\Delta_{\text{SSE}} \geq \Delta/(\rho + \varepsilon/\delta)$. 同理, 当 $-\delta \leq -\Delta_{\text{SSE}} \leq e_k < 0$ 时, 可得到相同的结果. 因此, 稳态误差带边界 Δ_{SSE} 为

$$\Delta_{\text{SSE}} = \Delta/(\rho + \varepsilon/\delta) \leq \delta. \quad (28)$$

由式 (27) 和 (28), 可得

$$\Delta_{\text{SSE}} = \begin{cases} \Delta/(\rho + \varepsilon/\delta) < \delta; \\ \max \left\{ \frac{\Delta - \varepsilon}{\rho}, \varepsilon + \Delta - \delta(1 - \rho), \delta(1 - \rho) - \varepsilon + \Delta \right\} > \delta. \end{cases} \quad (29)$$

稳态误差带边界 Δ_{SSE} 的表达式依赖于控制器参数 ε 、 ρ 、 δ 和扰动的界值 Δ . 根据式 (29), 当 $\delta \leq \Delta$ 时, 以 $\varepsilon = (1 - \rho)/(1 + \rho)(\Delta + \rho\delta)$ 进行分界, 利用 $\varepsilon \leq \delta(1 - \rho)$ 可得到 Δ_{SSE} 的表达式为

$$\Delta_{\text{SSE}} = (\Delta - \varepsilon)/\rho, \quad 0 < \varepsilon \leq \delta(1 - \rho). \quad (30)$$

当 $\delta > \Delta$ 时, 以 $\varepsilon = \Delta - \rho\delta$ 、 $\delta(1 - \rho)$ 、 $\delta(2 - \rho) - \Delta$ 进行分界, 可得到 Δ_{SSE} 的表达式为

$$\Delta_{\text{SSE}} = \begin{cases} \Delta/(\rho + \varepsilon/\delta), & \varepsilon > \Delta - \delta\rho; \\ (\Delta - \varepsilon)/\rho, & \varepsilon \leq \Delta - \delta\rho. \end{cases} \quad (31)$$

这样, 结合式 (30) 和 (31) 可得到式 (9).

从前面推导的 3 个界的结果可以看出, 稳态误差带边界 Δ_{SSE} 、吸引层边界 Δ_{AL} 、单调减区域边界 Δ_{MDR} 的取值与控制器参数 ε 、 δ 、 ρ 和扰动界 Δ 有关. 在实现时, 可首先提出对稳态误差带边界、吸引层边界、单调减区域边界的要求, 控制器参数的整定可依据这些要求和 3 个边界的具体表达式完成.

4 基于理想误差动态的反馈控制

上述基于理想误差动态的重复控制器设计方法同样适用于常值参考信号下的反馈控制器设计. 考虑参考信号为常值信号, 系统扰动的主要成分在稳态时也表现为常值干扰, 从而可针对常值干扰抑制设计反馈控制器. 常值扰动等效为周期 $N = 1$ 的干扰. 在构造理想误差动态方程时, 定义如下等效干扰:

$$\bar{d}_k = w_k - w_{k-1}. \quad (32)$$

其中: w_k 和 w_{k-1} 分别为 k 、 $k-1$ 时刻的干扰. 将干扰抑制手段“嵌入”吸引律 (3) 中, 构造如下理想误差动态方程:

$$e_{k+1} = (1 - \rho)e_k - \varepsilon \text{sat}(e_k/\delta) + \bar{d}_{k+1}^* - \bar{d}_{k+1}, \quad (33)$$

其中 \bar{d}_{k+1}^* 为 \bar{d}_{k+1} 的补偿值. 结合式 (1) 和 (32), 可得

$$\begin{aligned} \bar{d}_{k+1} = & y_{k+1} - y_k + (A(q^{-1}) - 1)(y_{k+1} - y_k) - \\ & B(q^{-1})(u_{k+1} - u_k). \end{aligned}$$

由跟踪误差的定义 (2) 知

$$\begin{aligned} \bar{d}_{k+1} = & r_{k+1} - e_{k+1} - (r_k - e_k) + \\ & (A(q^{-1}) - 1)(y_{k+1} - y_k) - \\ & B(q^{-1})(u_{k+1} - u_k). \end{aligned} \quad (34)$$

将式 (34) 代入 (33), 得

$$\begin{aligned} e_{k+1} = & (1 - \rho)e_k - \varepsilon \text{sat}(e_k/\delta) + \bar{d}_{k+1}^* - r_{k+1} + \\ & b_1(u_k - u_{k-1}) - (A(q^{-1}) - 1)(y_{k+1} - y_k) + \\ & e_{k+1} + (r_k - e_k) + F(q^{-1})(u_{k+1} - u_k), \end{aligned}$$

其中 $F(q^{-1})$ 的定义同上. 从而可得到反馈控制器为

$$\begin{aligned} u_k = & u_{k-1} - \frac{1}{b_1}[-\rho e_k - \varepsilon \text{sat}(e_k/\delta) - \\ & r_{k+1} + r_k - (A(q^{-1}) - 1)(y_{k+1} - y_k) + \\ & F(q^{-1})(u_{k+1} - u_k) + \bar{d}_{k+1}^*]. \end{aligned} \quad (35)$$

在式 (35) 作用下, 理想误差动态方程 (33) 与式 (5) 的跟踪误差收敛性能的分析过程一致, 适用于上节推导出的结果, 可用于控制器 (35) 的参数整定.

本节所设计的控制器能有效抑制常值干扰对系统性能的影响, 而重复控制是针对系统中的周期性干扰抑制而提出的. 下面将在逆变器装置上实现这两种控制方法.

5 数值仿真与实验结果

本节以单相逆变器为被控对象,通过数值仿真来验证第3节给出的结果,并通过实验验证所提出的控制方法的有效性.

5.1 逆变器模型与重复控制器

考虑图1所示的逆变线路,其状态方程可以写成^[19]

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_o \\ \dot{V}_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_o \\ \dot{V}_o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{LC} \end{bmatrix} V_i. \quad (36)$$

其中: V_i 为输入电压; V_o 为输出电压; L 、 C 和 R 分别为电感、电容和负载电阻.

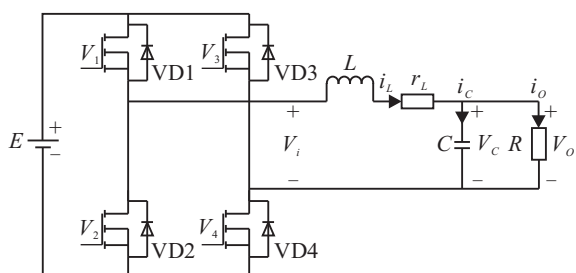


图1 单相逆变器

取采样间隔为 T , 式(36)对应的离散状态方程可以写成

$$\begin{bmatrix} V_{o,k+1} \\ \dot{V}_{o,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{o,k} \\ \dot{V}_{o,k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} \Delta T_k. \quad (37)$$

其中

$$\begin{aligned} \varphi_{11} &= 1 - \frac{T^2}{2LC}, \quad \varphi_{12} = T - \frac{T^2}{2RC}, \\ \varphi_{21} &= -\frac{T}{LC} + \frac{T^2}{2LC^2R}, \\ \varphi_{22} &= 1 - \frac{T}{RC} - \frac{T^2}{2LC} + \frac{T^2}{2R^2C^2}, \\ g_1 &= \frac{ET}{2LC}, \quad g_2 = \frac{E}{LC(1 - T/2CR)}, \end{aligned}$$

ΔT_k 为开关管的导通时间.

由式(37)可得系统输入输出的二阶差分方程为

$$y_{k+1} = -a_1 y_k - a_2 y_{k-1} + b_1 u_k + b_2 u_{k-1} + w_{k+1}. \quad (38)$$

其中

$$\begin{aligned} y_k &= V_{o,k}, \quad u_k = \Delta T_k, \\ a_1 &= -(\varphi_{11} + \varphi_{22}), \\ a_2 &= -(\varphi_{11}\varphi_{22} - \varphi_{12}\varphi_{21}), \\ b_1 &= g_1, \quad b_2 = (g_2\varphi_{12} - g_1\varphi_{21}). \end{aligned}$$

加入的变量 w_k 用来集中表示系统所受到的各种干扰. 对于由式(38)表示的被控对象, 重复控制器(8)变

成

$$\begin{aligned} u_k &= u_{k-N} + \frac{1}{b_1} [b_2(u_{k-1-N} - u_{k-1}) - \\ & (1 - \rho)e_k + \varepsilon \text{sat}(e_k/\delta) + e_{k+1-N} + \\ & r_{k+1} - r_{k+1-N} + a_1(y_k - y_{k-N}) + \\ & a_2(y_{k-1} - y_{k-1-N}) - d_{k+1}^*]. \end{aligned} \quad (39)$$

5.2 仿真结果

仿真时, 选取的参考正弦信号为 $r_k = 19.5 \times \sin(2\pi f T_s(k-1))$, 频率 $f = 50 \text{ Hz}$, 采样时间 $T_s = 0.0001 \text{ s}$.

扰动信号选取周期性扰动和非周期性扰动的叠加, 其信号构成如下:

$$w_k = 0.5 \text{sign}(\sin(2k\pi/150)) - 5 \sin(2k\pi/N).$$

其中: N 为周期扰动的步数, 在实际仿真中选取 $N = 200$; 吸引律中不确定项的界 $\Delta = 1$.

根据图1所示的逆变器框图, 选取直流母线电压 $E = 30 \text{ V}$, 滤波器电感 $L = 520 \mu\text{H}$, 电容 $C = 20 \mu\text{F}$, 负载 $R = 5 \Omega$. 根据式(38)所得到的模型, 可以得到单相逆变器的模型参数为 $a_1 = -0.5358$, $a_2 = 0.2504$, $b_1 = 0.3606$, $b_2 = 0.2358$. 为了验证系统稳态误差带边界 Δ_{SSE} 、吸引层边界 Δ_{AL} 和单调减区域 Δ_{MDR} 的准确性, 考虑以下两种情况的参数设置.

情况1 当 $\Delta(1-2\rho) < \varepsilon \leq \Delta - \rho\delta$, $\Delta < \delta < 2\Delta$ 时, 稳态误差带边界 Δ_{SSE} 、吸引层边界 Δ_{AL} 均为 $(\Delta - \varepsilon)/\rho$, 单调减区域边界 Δ_{MDR} 为 $(\Delta + \varepsilon)/(1 - \rho)$. 控制器参数设置为 $\delta = 1.5$, $\rho = 0.4$, $\varepsilon = 0.3$, 此时 $\Delta_{\text{SSE}} = \Delta_{\text{AL}} = 1.75$, $\Delta_{\text{MDR}} = 2.1667$, 仿真结果如图2所示.

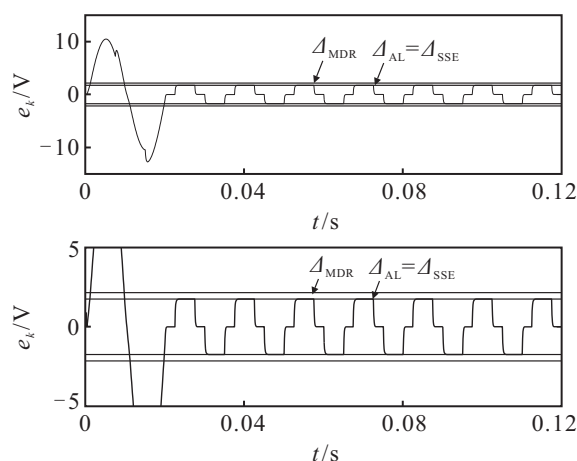


图2 当 $\Delta(1-2\rho) < \varepsilon \leq \Delta - \rho\delta$ 时的电压误差 ($\Delta_{\text{MDR}} > \Delta_{\text{SSE}} = \Delta_{\text{AL}}$)

情况2 当 $0 < \varepsilon < (1-2\rho)\Delta$, $\delta \leq \Delta$ 时, 稳态误差带边界 Δ_{SSE} 、吸引层边界 Δ_{AL} 、单调减区域边界 Δ_{MDR} 均为 $\Delta/(\rho + \varepsilon/\Delta)$. 控制器参数设置为 $\delta = 0.5$, $\rho = 0.4$, $\varepsilon = 0.18$, 此时 $\Delta_{\text{SSE}} = \Delta_{\text{AL}} = \Delta_{\text{MDR}} = 2.05$, 仿真结果如图3所示.

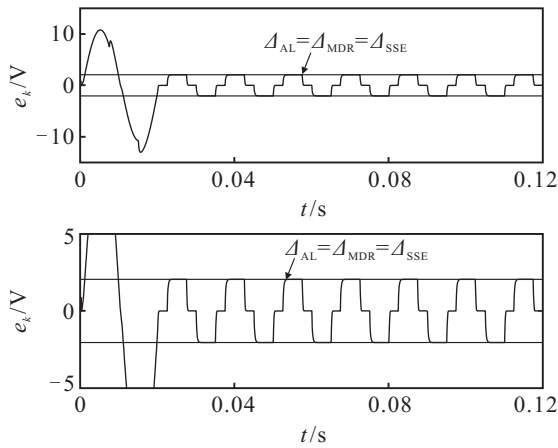


图 3 当 $0 < \varepsilon < (1 - 2\rho)\Delta$ 时的电压误差 ($\Delta_{MDR} = \Delta_{SSE} = \Delta_{AL}$)

5.3 实验结果

单相逆变器实验装置见图 4, 整个实验装置主要包括: 直流部分, 单相逆变器 (主要包括开关管驱动部分、全桥逆变部分、LC 滤波电路和负载、信号调理电路) 和 DSP 控制器。

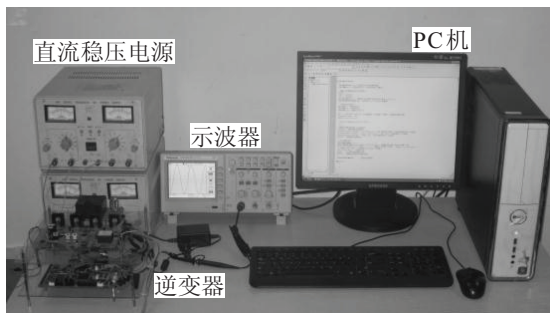


图 4 单相逆变器装置

实验中, 选取直流输入电压为 30 V, 逆变器输出电压为 19.5 V, 设置系统的开关频率为 10 kHz, 参考正弦波的频率为 50 Hz, 滤波电感 $L = 527 \mu\text{H}$, 滤波电容 $C = 20 \mu\text{F}$, 负载 $R = 5 \Omega$. 实验中分别采用重复控制和反馈控制对逆变器进行控制。

实验 1 基于理想误差动态的重复控制. 选取重复控制器 (39), 设置控制器参数 $\delta = 0.5, \rho = 0.5, \varepsilon = 0.13$, 实验中得到 d_k 的数据并取 d_k 的上、下界为 ± 0.2 , 因此 $\Delta = 0.2$. 由此可知 $\Delta_{SSE} = \Delta_{AL} = \Delta / (\rho + \varepsilon / \delta) = 0.36$, $\Delta_{MDR} = \Delta / (1 - \rho - \varepsilon / \delta) = 0.45$. 实验结果如图 5 所示, 输出电压的跟踪误差控制在 0.2 V 左右, 误差周期性不明显, 系统的周期性扰动得到了有效抑制. 逆变器输出电压波形见图 6, 输出电压 THD = 0.87%.

实验 2 基于理想误差动态的反馈控制. 采用反馈控制器 (35), 置相同的控制器参数, 实验中得到 d_k 的数据并取 d_k 的上、下界为 ± 0.8 , 因此 $\Delta = 0.8$. 由此可知 $\Delta_{MDR} = \Delta_{SSE} = \Delta_{AL} = (\Delta - \varepsilon) / \rho = 1.34$. 实验结果如图 7 所示, 输出电压的跟踪误差为 1 V 左右, 且呈

现明显周期性. 逆变器输出电压波形见图 8, THD = 1.54%.

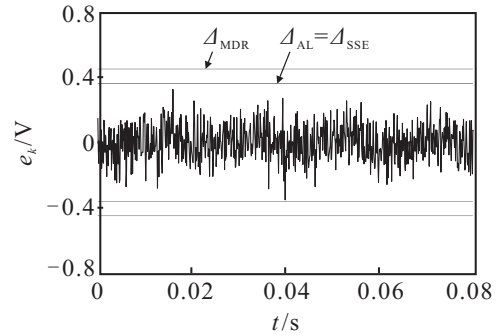


图 5 采用重复控制器 (39) 时的电压误差

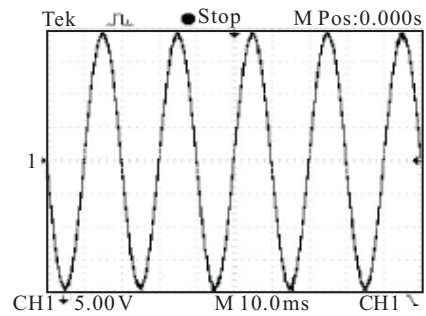


图 6 采用重复控制器 (39) 时的输出电压 ($t: 10 \text{ ms/格}, V_0: 5 \text{ V/格}$)

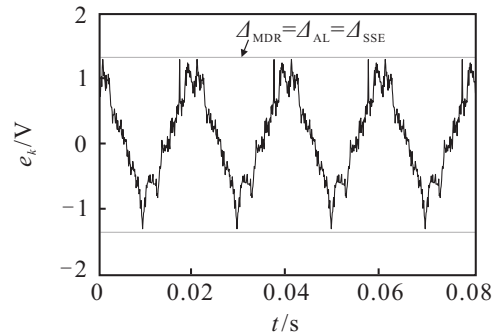


图 7 采用反馈控制器 (35) 时的电压误差

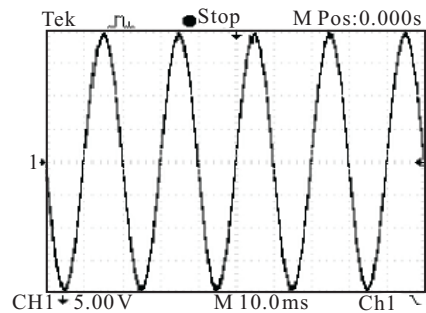


图 8 采用反馈控制器 (35) 时的输出电压 ($t: 10 \text{ ms/格}, V_0: 5 \text{ V/格}$)

从实验结果可以明显看出: 当采用反馈控制器时, 逆变器输出电压的跟踪误差呈现明显的周期性, 输出电压 THD 值较大; 当采用重复控制器时, 输出电压的跟踪误差明显减小, 且周期性不明显, 输出电压的 THD 值也明显减小。

6 结 论

本文针对一类周期参考信号下的不确定离散系统,利用吸引律构造理想误差动态,并基于理想误差动态设计重复控制器.本文给出了系统稳态误差带、吸引层和单调减区域的概念,并详细推导了3个层的边界值,并通过数值仿真进行了验证.在单相逆变器上的实验结果表明,所提出的控制方法能有效消除逆变器输出波形中的周期性扰动,降低输出电压 THD.

参考文献(References)

- [1] Astrom K J, Wittenmark B. Computer-controlled systems: Theory and design[M]. 3rd ed. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1997: 165-195.
- [2] Goodwin G C, Graebe S F, Salgado M E. Control system design[M]. Upper Saddle River: Prentice-Hall, 2001: 179-187.
- [3] 高为炳. 变结构控制的理论及设计方法[M]. 北京: 科学出版社, 1996: 278-299.
(Gao W B. Variable structure control theory and design method[M]. Beijing: Science Press, 1996: 278-299.)
- [4] Gao W B, Wang Y, Homaifa A. Discrete-time variable structure control systems[J]. IEEE Trans on Industrial Electronics, 1995, 42(1): 117-122.
- [5] 高为炳, 程勉. 变结构控制系统的品质控制[J]. 控制与决策, 1989, 4(4): 1-6.
(Gao W B, Cheng M. Quality control of variable structure control system[J]. Control and Decision, 1989, 4(4): 1-6.)
- [6] Bartoszewicz A. Remarks on “discrete-time variable structure control systems”[J]. IEEE Trans on Industrial Electronics, 1996, 43(1): 235-238.
- [7] Eun Y, Kim J, Kim K, et al. Discrete-time variable structure controller with a decoupled disturbance compensator and its application to a CNC servomechanism[J]. IEEE Trans Control Systems Technology, 1997, 7(4): 414-423.
- [8] 翟长连, 吴智铭. 不确定离散时间系统的变结构控制设计[J]. 自动化学报, 2000, 26(2): 184-191.
(Zhai C L, Wu Z M. Variable structure control design for uncertain discrete time systems[J]. Acta Automatica Sinica, 2000, 26(2): 184-191.)
- [9] Sun M X, Xie H Y, Wang H. Switching-function dynamics designs for uncertain variable structure systems with repetitive control[J]. Int J of Control, 2011, 84(7): 1196-1208.
- [10] Bartoszewicz A. Discrete-time quasi-sliding mode control strategies[J]. IEEE Trans on Industrial Electronics, 1998, 45(3): 633-637.
- [11] Tang C Y, Misawa E A. Discrete variable structure control for linear multivariable systems[J]. ASME J of Dynamic Systems, Measurement, and Control, 2000, 122(4): 783-792.
- [12] Sun M X, Wang Y Y, Wang D W. Variable-structure repetitive control: A discrete-time strategy[J]. IEEE Trans on Industrial Electronics, 2005, 52(2): 610-616.
- [13] 孙明轩, 范伟云, 王辉. 用于离散滑模重复控制的新型趋近律[J]. 自动化学报, 2011, 37(10): 1213-1221.
(Sun M X, Fan W Y, Wang H. Discrete sliding mode repetitive control with using a novel reaching law[J]. Acta Automatica Sinica, 2011, 37(10): 1213-1221.)
- [14] 于双和, 强文义, 傅佩琛. 无抖振离散准滑模控制[J]. 控制与决策, 2001, 16(3): 380-382.
(Yu S H, Qiang W Y, Fu P C. Chattering-free discrete quasi-sliding mode controller[J]. Control and Decision, 2001, 16(3): 380-382.)
- [15] 瞿少成, 王永骥. 基于扰动动态补偿的离散滑模变结构控制[J]. 控制与决策, 2004, 19(3): 311-314.
(Qu S C, Wang Y J. Discrete time sliding mode control based on dynamic disturbance compensator[J]. Control and Decision, 2004, 19(3): 311-314.)
- [16] 宋立忠, 李槐树, 姚琼荟. 基于趋近律方法的离散时间系统变结构控制[J]. 控制理论与应用, 2008, 25(3): 525-528.
(Song L Z, Li H S, Yao Q H. Discrete-time variable-structure control based on reaching-law approach[J]. Control Theory & Applications, 2008, 25(3): 525-528.)
- [17] 孙明轩, 邬玲伟. 离散时间重复控制的理想误差动态设计方法[C]. 第24届中国控制与决策会议. 太原, 2012: 1734-1739.
(Sun M X, Wu L W. Ideal error dynamics based design of discrete-time repetitive controllers[C]. The 24th Chinese Control and Decision Conf. Taiyuan, 2012: 1734-1739.)
- [18] Sun M X, Wu L W, Xu L D. Discrete-time repetitive control with ideal error dynamics[C]. The 12th Int Conf on Control, Automation, Robotics and Vision. Guangzhou, 2012: 458-463.
- [19] Hua C. Two-level switching pattern deadbeat DSP controlled PWM inverter[J]. IEEE Trans on Power Electronics, 1995, 10(3): 310-317.