

## 基于 Backstepping 的非仿射非线性系统鲁棒控制

张 强<sup>1,2</sup>, 吴庆宪<sup>1</sup>, 姜长生<sup>1</sup>, 王玉惠<sup>1</sup>

(1. 南京航空航天大学 自动化学院, 南京 210016; 2. 济南大学 自动化与电气工程学院, 济南 250022)

**摘 要:** 针对一类不确定非仿射非线性系统的跟踪控制问题, 提出一种鲁棒 Backstepping 控制策略. 首先, 为利用仿射非线性方法设计控制器, 给出一种适用于全局的非仿射非线性近似方法; 然后, 设计快速收敛非线性微分器以估计复合干扰和获取虚拟信号的分, 进而给出不确定非仿射非线性系统的复合控制器, 其中鲁棒项和阻尼项分别用于减少逼近误差和近似方法中动态误差对系统跟踪的影响; 最后, 通过仿真实验验证了所提出方法的有效性.

**关键词:** 非仿射非线性系统; Backstepping; 鲁棒控制; 非线性微分器

中图分类号: TP273

文献标志码: A

## Robust control for nonaffine nonlinear systems based on Backstepping

ZHANG Qiang<sup>1,2</sup>, WU Qing-xian<sup>1</sup>, JIANG Chang-sheng<sup>1</sup>, WANG Yu-hui<sup>1</sup>

(1. College of Automation Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China; 2. School of Automation and Electrical Engineering, University of Ji'nan, Ji'nan 250022, China. Correspondent: ZHANG Qiang, E-mail: zhang\_hongyu198023@163.com)

**Abstract:** A robust Backstepping control strategy is proposed for a class of uncertain nonaffine nonlinear systems. Firstly, a global approximation method is given for uncertain nonaffine nonlinear systems, aiming to design the controller by using affine nonlinear methods. Then, a fast convergence nonlinear differentiator is designed in order to get the differential value of virtual signal and approximate unknown compound disturbances in the uncertain systems. Furthermove, the composite controller structure based on the above design is proposed, in which the robust terms and nonlinear damping term can offset the impact of the approximation errors. Finally, the simulation results show the effectiveness of the proposed method.

**Key words:** nonaffine nonlinear systems; Backstepping; robust control; nonlinear differentiator

### 0 引 言

目前, 非仿射非线性系统跟踪控制研究主要分为两大类: 模型未知和模型已知. 处理模型未知系统的主要技术手段是利用智能控制的方法, 如文献[1-3]. 但这一类方法较为复杂, 很难保证实际应用所需的实时性要求. 所幸的是大部分实际系统的模型可以通过各种建模手段得出. 因此研究基于模型的非仿射系统跟踪控制变得更加具有实际意义.

基于模型的非仿射非线性系统控制器设计难点在于如何显性表达控制量 $u$ <sup>[4]</sup>. 传统的处理手段有模型线性化<sup>[5]</sup>、T-S 模糊系统<sup>[6]</sup>、逆系统<sup>[7]</sup>等方法. 然而在处理较为复杂的非仿射系统和实现大范围跟踪控制时, 这些方法便显得力不从心了. 文献[8]首先给出一种显式表达控制量导数 $\dot{u}$ 的方法, 然后定义了新的

控制输入 $v = \dot{u}$ , 最后利用仿射非线性系统控制器的设计方法求取控制器. 该方法的缺点是需要增加系统的阶次, 且要已知状态的导数. 文献[9]利用泰勒级数将模型在控制量 $u(t-1)$ 处展开, 然后再采用逆系统方法求取控制器. 然而该方法的缺点是输入量的变化 $\Delta u(t)$ 不宜过快, 否则模型近似将失去意义, 而且该方法很难实现高精度跟踪控制.

Backstepping 控制在处理具有严格反馈形式的非线性系统时具有得天独厚的优势, 如文献[10-11]. 但其存在的微分膨胀问题一直是学者们研究的重点. 为解决此问题, 文献[12]给出一种简单的动态面控制设计方法; 文献[13]设计了指令滤波 Backstepping 控制器; 文献[14]提出了一种二阶滑模滤波器 Backstepping 控制器; 文献[15]研究了受限指令滤波 Back-

收稿日期: 2012-10-08; 修回日期: 2012-12-24.

基金项目: 国家自然科学基金项目(90716028, 91116017, 11102080); 中央高校基本科研业务费专项资金项目(NS2010077, NP2011049); 山东省自然科学基金项目(ZR2012FQ030).

作者简介: 张强(1980-), 男, 讲师, 博士生, 从事非线性系统鲁棒自适应控制的研究; 吴庆宪(1955-), 男, 教授, 博士生导师, 从事复杂系统建模与控制等研究.

stepping 控制器的设计方法. 然而, 文献[12-15]所给出的方法均未考虑虚拟信号微分估计值的收敛速度问题. 对于实际系统, 估计值的收敛速度对控制效果是至关重要的, 若未考虑, 则系统的跟踪动态过程可能变差, 甚至影响系统的稳定性.

基于上述分析, 针对一类不确定非仿射非线性系统, 本文提出一种鲁棒 Backstepping 控制策略. 其设计过程可分为 3 部分: 1) 给出一种适用于全局的不确定非仿射非线性系统近似方法. 该近似方法不仅具有简单、易于工程实现的特点, 而且便于后续的控制器的设计. 2) 设计一种快速收敛的非线性微分器 (RCND), 以有效且快速地估计已知信号的微分. 通过所设计的 RCND 不仅可获取复合干扰的估计值, 而且能有效地避免 Backstepping 设计中的微分膨胀问题. 3) 将上述所设计的近似方法、RCND 和 Backstepping 方法相结合, 给出不确定非仿射非线性系统的复合控制器. 其中通过构造鲁棒项来减少复合干扰和微分估计的逼近误差对系统控制效果的影响, 利用非线性阻尼项抑制近似方法中的动态误差对系统跟踪性能的影响. 最后, 采用输入到状态稳定性 (ISS) 理论分析闭环系统的稳定性. 仿真结果表明, 所提出的策略具有良好的跟踪控制性能和鲁棒性能.

## 1 问题描述及非仿射非线性系统近似方法

### 1.1 问题描述

考虑如下的一类不确定非仿射非线性系统:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= f_i(\bar{x}_i) + g_i(\bar{x}_i)x_{i+1} + d_i(\bar{x}_i), \\ 1 &\leq i \leq n-1; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\dot{x}_n = f_n(\mathbf{x}, u) + d_n(\mathbf{x}, u); \quad (2)$$

$$y = x_1. \quad (3)$$

其中:  $\bar{x}_i = [x_1, x_2, \dots, x_i]^T$ ,  $1 \leq i \leq n-1$ ,  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \Omega_x \subset \mathbf{R}^n$  为可测的系统状态,  $\Omega_x$  为系统可行域;  $u \in \Omega_u \subset \mathbf{R}$  为系统的控制输入,  $\Omega_u$  为允许控制集;  $f_i(\bar{x}_i)$  ( $1 \leq i \leq n-1$ ) 和  $f_n(\mathbf{x}, u)$  分别在域  $\Omega_x$  和  $\Omega_x \times \Omega_u$  内为已知的光滑函数;  $g_i(\bar{x}_i)$  ( $1 \leq i \leq n-1$ ) 在域  $\Omega_x$  内为已知且不为零的控制增益;  $d_i(\bar{x}_i)$  ( $1 \leq i \leq n-1$ ) 和  $d_n(\mathbf{x}, u)$  为第  $i$  个和第  $n$  个子系统未知的复合干扰.

为了书写方便, 在不引起歧义的情况下, 省略相关变量的自变量, 如  $f_i(\bar{x}_i)$  简写为  $f_i$ .

**假设 1** 输出信号  $y(t)$  和参考信号  $y_d(t)$  为光滑、可测且有界的.

**假设 2**  $g_n(\mathbf{x}, u) = \partial f_n / \partial u$  在域  $\Omega_u$  内连续可导, 且存在常数  $\bar{g} \geq \underline{g} > 0$ ,  $\bar{g} > 0$ , 使得  $\forall (\mathbf{x}, u) \in \Omega_x \times \Omega_u$ , 有

$$\underline{g} \leq |g_n| \leq \bar{g}, \quad |\dot{g}_n| \leq \check{g}. \quad (4)$$

**假设 3** 复合干扰  $d_i$  是有界的, 即存在一组未知常数  $\rho_i > 0$ , 使得  $|d_i| \leq \rho_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

值得注意的是, 假设 2 意味着式 (2) 具有“良好定义的相对阶<sup>[16]</sup>”. 在很多实际系统中, 假设 2 均成立, 如 Chua's 电路和 Rössler 混沌等系统. 因此, 假设 2 具有一定的适用性.

### 1.2 非仿射非线性系统近似方法

**引理 1** 对于不确定非仿射非线性系统 (2), 考虑如下时变的不确定仿射非线性系统和一阶滤波器:

$$\dot{x}_n = f_{n1}(\mathbf{x}, \zeta) + g_n(\mathbf{x}, \zeta)u + O(\cdot) + d_n, \quad (5)$$

$$\dot{\zeta} = -k_\zeta \zeta + k_\zeta u, \quad \zeta(0) = 0. \quad (6)$$

其中

$$f_{n1}(\mathbf{x}, \zeta) = f_n(\mathbf{x}, \zeta) - g_n(\mathbf{x}, \zeta)\zeta,$$

$$g_n(\mathbf{x}, \zeta) = \left. \frac{\partial f_n(\mathbf{x}, u)}{\partial u} \right|_{u=\zeta},$$

$$O(\cdot) = f_{dd}(\mathbf{x}, \xi)\Delta u^2/2,$$

$$f_{dd}(\mathbf{x}, \xi) = \left. \frac{\partial^2 f_n(\mathbf{x}, u)}{\partial u^2} \right|_{u=\xi},$$

$\xi$  取值在  $(u, \zeta)$  之间,  $\Delta u^2 = (u - \zeta)^2$ ,  $\zeta \in \mathbf{R}$  为一阶滤波器的状态;  $k_\zeta > 0$  为设计的滤波时间常数. 在假设 2 下, 不确定非仿射非线性系统 (2) 可由时变的不确定仿射非线性系统 (5) 近似, 且  $O(\cdot)$  在域  $\Omega_x \times \Omega_u$  内满足局部 Lipschitz 条件, 即  $\exists L_2 > 0$ , 使得

$$|O(\cdot)| \leq L_2|u - \zeta|. \quad (7)$$

**证明** 将式 (2) 中  $f_n(\mathbf{x}, u)$  在  $u = \zeta$  处进行 Taylor 展开, 则式 (2) 可改写为

$$\dot{x}_n = f_n(\mathbf{x}, \zeta) + g_n(\mathbf{x}, \zeta)\Delta u + O(\cdot) + d_n. \quad (8)$$

将  $\Delta u = u - \zeta$  代入式 (8) 可得 (5). 下面证明  $O(\cdot)$  在域  $\Omega_x \times \Omega_u$  内满足局部 Lipschitz 条件.

由文献[17]的 B.3.1 引理可知: 在假设 2 下,  $f_n$  在  $\Omega_x \times \Omega_u$  上满足 Lipschitz 条件, 即存在常数  $L_1$ , 使得

$$|f_n(\mathbf{x}, u) - f_n(\mathbf{x}, \zeta)| \leq L_1|u - \zeta|. \quad (9)$$

根据式 (2) 和 (5), 并代入式 (4) 和 (9) 可得

$$\begin{aligned} |O(\cdot)| &= |f_n(\mathbf{x}, u) - f_n(\mathbf{x}, \zeta) + g_n(\mathbf{x}, \zeta)(\zeta - u)| \leq \\ &L_1|u - \zeta| + \bar{g}|u - \zeta| = L_2|u - \zeta|, \end{aligned} \quad (10)$$

其中  $L_2 = L_1 + \bar{g}$ .

基于式 (10), 若采用式 (5) 在线准确地近似 (2), 则需将式 (5) 中  $O(\cdot)$  视为 (2) 的建模误差. 为此, 选取式 (6) 中的  $k_\zeta \rightarrow \infty$ , 以保证  $\lim_{k_\zeta \rightarrow \infty} |O(\cdot)| = 0$ .  $\square$

**注 1** 在式 (5) 的近似中需要已知  $u$ , 而后续  $u$  的设计又需以式 (5) 的获得为前提. 为避免此问题, 这里采用一阶滤波器 (6) 获取  $u$  的预测值. 由此, 式 (6) 可由其他的滤波器所代替, 如二阶线性滤波器<sup>[13]</sup>, 鲁

棒二阶滑模积分滤波器<sup>[14]</sup>等。

**注2** 从引理1可知: 所提出的近似方法将不确定的非仿射非线性系统变成一个时变不确定仿射非线性系统. 当 $k_\zeta$ 取足够大时, 式(5)可以很好地完成式(2)的全局近似. 因此, 通过式(5)和(6)可以很好地利用仿射非线性控制器的设计方法来解决式(2)的跟

踪控制器设计问题. 此外, 与文献[6, 8-9]的方法相比, 这里所提出的适用于全局的时变近似方法具有算法简单和易于实现的优势.

控制器设计目的是在闭环系统所有信号有界下, 设计控制律使得 $y(t)$ 跟踪 $y_d(t)$ . 为清晰说明本文的设计思路, 在此给出其控制方案结构如图1所示.

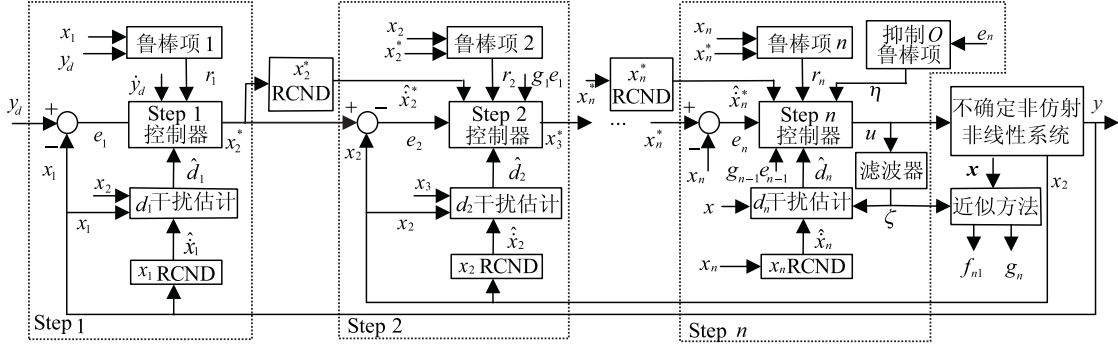


图1 控制方案结构图

## 2 RCND 设计及稳定性分析

定义  $\text{sig}(x^k) = |x|^k \text{sign}(x)$ ,  $k > 0$ ,  $x \in \mathbf{R}$ ,  $\text{sign}(\cdot)$  代表符号函数.

### 2.1 RCND 设计

为设计 RCND, 引入如下定义和引理.

**定义1**<sup>[17]</sup> 函数  $\mathbf{x}(t, \epsilon) \in \mathbf{R}^n$ , 如果存在  $k, c > 0$  使得

$$\|\mathbf{x}(t, \epsilon) - \mathbf{x}(t, 0)\| \leq k|\epsilon|^c, \forall |\epsilon| \leq \epsilon_1, t \in [t_0, t_1],$$

则称误差具有  $O(\epsilon^c)$  的数量级, 记  $\mathbf{x}(t, \epsilon) - \mathbf{x}(t, 0) = O(\epsilon^c)$ .

**引理2**<sup>[18]</sup> 考虑时不变系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{f}(0) = 0, \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n, \quad (11)$$

其中  $\mathbf{f}: \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{R}^n$  是一个由包括原点  $\mathbf{x} = 0$  的域  $\mathbf{D} \subset \mathbf{R}^n$  到  $\mathbf{R}^n$  的连续映射. 若  $\mathbf{x} = 0$  为式(11)的有限时间稳定平衡点, 则一定存在一个连续可微函数  $V: \mathcal{N} \subset \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{R}$  和一个常数  $\alpha \in (0, 1)$  且满足:

- 1)  $V$  是正定的;
- 2) 在  $\mathcal{N}$  上,  $\dot{V}$  是连续的并且存在  $c > 0$  使得

$$\dot{V} + c(V(\mathbf{x}))^\alpha \leq 0. \quad (12)$$

**引理3**<sup>[19]</sup> 考虑如下系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1}, 1 \leq i \leq n-1; \\ \epsilon^n \dot{x}_n = f(x_1 - v(t), \epsilon x_2, \dots, \epsilon^{n-1} x_n). \end{cases} \quad (13)$$

其中:  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ ,  $v(t)$  分别为系统的状态和输入,  $\epsilon > 0$  为设计参数,  $f$  为一个已知的函数. 如果系统(13)满足: 1) 当  $v(t) = 0$  时,  $\mathbf{x} = 0$  为有限时间稳定的平衡点, 并且存在 Lyapunov 函数  $V$  和一个常数  $M > 0$  使得  $\|\partial V / \partial \mathbf{x}\| < M$ ; 2) 当  $v(t) = 0$ ,  $\epsilon = 1$  时, 存在  $\rho_i \in (0, 1]$  ( $1 \leq i \leq n$ ) 和  $\bar{\alpha} > 0$  使得  $|f(\mathbf{x}) -$

$f(\tilde{\mathbf{x}})| \leq \bar{\alpha} \sum_{i=1}^n |x_i - \tilde{x}_i|^{\rho_i}$ ; 3)  $v(t)$  是具有  $n-1$  阶连续可微的已知函数. 则存在  $\gamma > 0$  ( $\gamma\rho > n$ ) 和时刻  $\Gamma > 0$  使得

$$x_i - v^{(i-1)}(t) = O(\epsilon^{\gamma\rho-i+1}), t \geq \Gamma, 1 \leq i \leq n.$$

其中:  $\gamma = (1 - \theta)/\theta$ ,  $\theta \in (0, \min(\rho/(\rho + n), 1/2))$ ,  $\rho = \min_{i=1,2,\dots,n} \{\rho_i\}$ ,  $v^{(k)}$  为  $v$  的  $k$  阶导数,  $1 \leq k \leq n-1$ .

受引理2和引理3的启发, 设计 RCND 如下:

$$\begin{cases} \dot{x}_{f1} = x_{f2}, \\ \vartheta^2 \dot{x}_{f2} = f(x_{f1} - v, \vartheta x_{f2}) = \\ -\lambda_{10}(x_{f1} - v) - \lambda_{11} \text{sig}(x_{f1} - v)^{\alpha/(2-\alpha)} - \\ \lambda_{20} \vartheta x_{f2} - \lambda_{21} \text{sig}(\vartheta x_{f2})^\alpha. \end{cases} \quad (14)$$

其中:  $\mathbf{x}_f = [x_{f1}, x_{f2}]^T \in \mathbf{R}^2$  为 RCND 的状态,  $v \in \mathbf{R}$  为具有一阶连续可微的已知函数,  $\vartheta, \lambda_{10}, \lambda_{11}, \lambda_{20}, \lambda_{21} > 0$  以及  $0 < \alpha < 1$  均为设计的参数.

定义误差向量  $\mathbf{e}_f = [e_{f1}, e_{f2}]^T$ ,  $e_{f1} = x_{f1} - v$ ,  $e_{f2} = x_{f2} - \dot{v}$ . 代入式(14), 则误差动态方程为

$$\begin{cases} \dot{e}_{f1} = e_{f2}, \\ \vartheta^2 \dot{e}_{f2} = f(e_{f1}, \vartheta e_{f2} + \vartheta \dot{v}) - \vartheta^2 \dot{v} = \\ -\lambda_{10} e_{f1} - \lambda_{11} \text{sig}(e_{f1})^{\alpha/(2-\alpha)} - \\ \lambda_{20} \Theta(e_{f2} + \dot{v}) - \lambda_{21} \text{sig}(\vartheta e_{f2} + \\ \vartheta v^{(1)})^\alpha - \vartheta^2 \ddot{v}. \end{cases} \quad (15)$$

显然, 若  $\|\mathbf{e}_f\|$  能收敛到任意小的界, 则  $x_{f1} \rightarrow v$ ,  $x_{f2} \rightarrow \dot{v}$ .

**注3** 当  $\lambda_{10} = \lambda_{20} = 0$  时, 式(14)将转化为韩京清<sup>[20]</sup>所提出的非线性微分器; 当  $\lambda_{11} = \lambda_{21} = 0$ ,  $0 < \lambda_{20} < 2\lambda_{10}$  时, 式(14)将简化为 Farrell<sup>[13]</sup>所提出

的线性微分器. 因此, 本节所设计的 RCND 式(14)可视为非线性微分器和线性微分器的结合. 其具有的快速收敛性将在下面的 RCND 稳定性分析中进行说明.

## 2.2 RCND 稳定性分析

为证明 RCND 的稳定性, 需先证明如下引理.

**引理 4** 考虑系统

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2, \\ \dot{z}_2 = f(z) = -\lambda_{10}z_1 - \lambda_{11}\text{sig}(z_1)^{\alpha/(2-\alpha)} - \lambda_{20}z_2 - \lambda_{21}\text{sig}(z_2)^\alpha. \end{cases} \quad (16)$$

其中:  $z = [z_1, z_2]^T \in \mathbf{R}^2$  为状态向量, 其他参数定义与式(14)相同. 对于任意初始有界的  $z(0)$ ,  $z = 0$  是系统(16)的有限时间稳定平衡点, 即存在时间常数  $t_s > 0$ , 使得

$$z_1(t) \equiv 0, z_2(t) \equiv 0, t \geq t_s. \quad (17)$$

**证明** 针对系统(16), 选择 Lyapunov 函数为

$$V = \frac{1}{2}(\lambda_{10}z_1^2 + z_2^2) + \frac{\lambda_{11}(2-\alpha)}{2}|z_1|^{\frac{2}{2-\alpha}}. \quad (18)$$

对  $V$  沿着式(16)求导, 有

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \lambda_{10}z_1z_2 + z_2(-\lambda_{10}z_1 - \lambda_{20}z_2 - \\ &\quad \lambda_{11}\text{sig}(z_1)^{\alpha/(2-\alpha)} - \lambda_{21}\text{sig}(z_2)^\alpha) + \\ &\quad \lambda_{11}\text{sig}(z_1)^{\alpha/(2-\alpha)}z_2 \leq \\ &\quad -\lambda_{20}z_2^2 - \lambda_{21}|z_2|^{1+\alpha}. \end{aligned} \quad (19)$$

由式(19)可知, 当  $z_2 \neq 0$  时,  $\dot{V} < 0$ . 此外, 在有界初值  $z(0)$  下, 式(16)的解可由文献[21]求取. 由式(16)的解、式(19)和 Lasalle 不变原理易知式(16)是渐近稳定的.

为进一步证明  $z = 0$  是式(16)全局唯一有限时间稳定的平衡点, 需利用文献[22]中定理 3.2, 即可得知式(16)在有限时间内一致收敛于原点.  $\square$

为说明式(16)中参数  $\lambda_{10}$ 、 $\lambda_{11}$ 、 $\lambda_{20}$ 、 $\lambda_{21}$  对收敛速度的影响, 图 2 给出了不同参数情况下收敛速度变化曲线. 由图 2 可知: 曲线①可以保证  $z$  接近原点时有着较快的收敛速度, 而远离原点时, 收敛速度较曲线②明显下降; 曲线②得到与曲线①正好相反的结论; 而本文所设计的曲线③, 则可以很好地结合曲

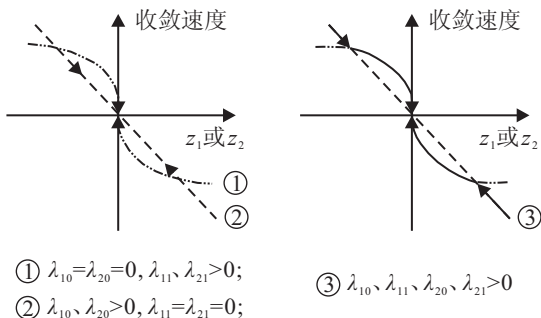


图 2 收敛速度比较

线①和②的各自优点, 从而保证  $z$  有着快速的收敛性.

**引理 5**  $|\text{sig}(a^\alpha) - \text{sig}(b^\alpha)| \leq 2^{1-\alpha}|a-b|^\alpha, \forall a, b \in \mathbf{R}, 0 < \alpha < 1$ .

**证明** 分如下两种情况.

1) 当  $a, b$  同号时, 不妨设  $0 < a < b$ , 根据两点  $(a, a^\alpha)$ 、 $(b, b^\alpha)$  连线和两点  $(0, 0)$ 、 $(b, b^\alpha)$  连线的斜率关系, 有如下不等式:

$$\frac{b^\alpha - a^\alpha}{b - a} < \frac{b^\alpha}{b} = b^{\alpha-1}.$$

由此有

$$\begin{aligned} |\text{sig}(a^\alpha) - \text{sig}(b^\alpha)| &= b^\alpha - a^\alpha < \frac{(b-a)}{b^{1-\alpha}} = \\ &(1-a/b)^{1-\alpha}(b-a)^\alpha \leq 2^{1-\alpha}|a-b|^\alpha. \end{aligned} \quad (20)$$

2) 当  $a, b$  异号时, 不妨设  $0 < -a < b$ , 利用函数凸性有

$$\begin{aligned} |\text{sig}(a^\alpha) - \text{sig}(b^\alpha)| &= b^\alpha + (-a)^\alpha \leq \\ &2\left(\frac{b-a}{2}\right)^\alpha = 2^{1-\alpha}|a-b|^\alpha. \end{aligned} \quad (21)$$

由式(20)和(21)可知, 引理 5 成立.  $\square$

**定理 1** 快速非线性微分器误差系统(15), 对于任意给定有限初始误差状态  $e_f(0)$ , 总存在一组参数  $\vartheta, \lambda_{10}, \lambda_{11}, \lambda_{20}, \lambda_{21} > 0$  以及  $0 < \alpha < 1$ , 使得式(15)是 Lyapunov 稳定的, 且误差收敛满足

$$e_{fi} = O(\vartheta^{\gamma\rho-i+1}), i = 1, 2. \quad (22)$$

其中: 参数  $\vartheta, \gamma, \rho$  与引理 3 相同.

**证明** 首先, 由引理 2、引理 4 和式(18)可知引理 3 中的条件 1) 满足. 然后, 利用引理 5 验证式(15)中函数  $f$  满足引理 3 中的条件 2), 即

$$\begin{aligned} |f(x_f) - f(\tilde{x}_f)| &\leq \\ &\lambda_{10}|x_{f1} - \tilde{x}_{f1}| + \lambda_{11}2^{\frac{(2-2\alpha)}{(2-\alpha)}}|x_{f1} - \tilde{x}_{f1}|^{\frac{\alpha}{(2-\alpha)}} + \\ &\lambda_{20}|x_{f2} - \tilde{x}_{f2}| + \lambda_{21}2^{1-\alpha}|x_{f2} - \tilde{x}_{f2}|^\alpha \leq \\ &\bar{a} \sum_{i=1}^2 |x_{fi} - \tilde{x}_{fi}|^{\rho_i}. \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{a} &= 2 \max\{\lambda_{10}, \lambda_{11}2^{\frac{(2-2\alpha)}{(2-\alpha)}}, \lambda_{20}, \lambda_{21}2^{1-\alpha}\}, \\ |x_{f1} - \tilde{x}_{f1}|^{\rho_1} &= \max\{|x_{f1} - \tilde{x}_{f1}|, |x_{f1} - \tilde{x}_{f1}|^{\frac{\alpha}{(2-\alpha)}}\}, \\ |x_{f2} - \tilde{x}_{f2}|^{\rho_2} &= \max\{|x_{f2} - \tilde{x}_{f2}|, |x_{f2} - \tilde{x}_{f2}|^\alpha\}. \end{aligned}$$

基于以上分析, 兼顾到式(14)中  $v$  为一阶连续可微的已知函数, 从而可知引理 3 的 3 个条件均满足, 即定理 1 结论成立.  $\square$

**注 4** 从定理 1 可知, RCND 设计中的参数  $\vartheta$  与微分估计的准确性密切相关, 因此, 应选取  $\vartheta \in (0, 1)$ . 此外, 由图 2 分析可知, 将线性项和非线性项相结合保证了所提出的 RCND 具有快速收敛的优势. 这对于

后续干扰估计和虚拟信号微分估计的快速性是非常重要的。

### 3 非线性控制器设计及 ISS 分析

控制器设计的具体思路是: 首先针对系统中存在的未知复合干扰问题, 利用 RCND 给出复合干扰的估计算法; 然后在全局的时变近似方法下, 将上述的复合干扰估计算法、RCND 和 Backstepping 方法应用到复合控制器设计中, 并构造鲁棒项和非线性阻尼项以减少干扰估计误差、微分器估计误差以及近似方法的动态误差对跟踪效果的影响。

#### 3.1 复合干扰估计算法

由式(1)和(2), 有

$$d_i = \dot{x}_i - f_i - g_i x_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n-1; \quad (23)$$

$$d_n = \dot{x}_n - f_n(\mathbf{x}, u). \quad (24)$$

在假设3下, 针对式(23), 由于  $x_i$  可测, 用 RCND 可得到  $\dot{x}_i$  的估计值, 记作  $\hat{x}_i$ . 定义其误差为  $\tilde{x}_i = \dot{x}_i - \hat{x}_i$ , 则复合干扰  $d_i$  的估计值为

$$\hat{d}_i = \hat{x}_i - f_i - g_i x_{i+1}. \quad (25)$$

定义  $d_i$  的估计误差  $\tilde{d}_i = d_i - \hat{d}_i$ , 则  $\tilde{d}_i$  为

$$\tilde{d}_i = \dot{x}_i - f_i - g_i x_{i+1} - \hat{x}_i + f_i + g_i x_{i+1} = \tilde{x}_i. \quad (26)$$

针对式(24),  $d_n$  的估计值  $\hat{d}_n$  的求取, 不能直接用  $\hat{d}_n = \hat{x}_n - f_n$  来获得. 因为  $\hat{d}_n$  需要已知  $u$ , 而  $u$  的设计又需以  $\hat{d}_n$  的获得为前提(与1.2节近似方法中  $u$  的获取有着类似的原因), 所以, 采用1.2节中的滤波器(6)获取  $u$  的预测值. 于是  $d_n$  的估计值为

$$\hat{d}_n = \hat{x}_n - f_n(\mathbf{x}, \zeta), \quad (27)$$

其中  $\zeta$  在式(6)中已定义.

定义  $d_n$  的估计误差  $\tilde{d}_n = d_n - \hat{d}_n$ , 有

$$\tilde{d}_n = \dot{x}_n + f_n(\mathbf{x}, \zeta) - f_n(\mathbf{x}, u), \quad (28)$$

其中  $\tilde{x}_n = \dot{x}_n - \hat{x}_n$ .

**引理 6** 对于不确定非仿射非线性系统(1)~(2), 在假设1~假设3下, 设计一组 RCND 如式(14)所示, 当选取复合干扰估计为式(25)和(27)时, 复合干扰估计误差收敛于任意小的有界集内.

**证明** 当  $1 \leq i \leq n-1$  时, 由式(26)和定理1可知结论成立.

下面分析  $\tilde{d}_n$  的收敛情况. 当  $i = n$  时, 由式(9)和(28)可得

$$|\tilde{d}_n| \leq |\tilde{x}_n| + L_1 |u - \zeta|. \quad (29)$$

由式(6)可知, 当  $k_\zeta$  选取得足够大时,  $|u - \zeta|$  收敛足够小. 由定理1,  $|\tilde{x}_n|$  可收敛任意小. 由此, 式(28)收敛于任意小的有界集内.  $\square$

#### 3.2 基于 RCND 的 Backstepping 控制器设计

**Step 1** 当系统(1)中的  $i = 1$  时, 定义第1个跟踪误差  $e_1 = y - y_d$ , 则  $\dot{e}_1$  可表示为

$$\dot{e}_1 = f_1 + g_1 x_2 + d_1 - \dot{y}_d. \quad (30)$$

在假设1下, 设计虚拟控制量  $x_2^*$  为

$$x_2^* = (-k_1 e_1 - f_1 - \hat{d}_1 + \dot{y}_d + r_1)/g_1. \quad (31)$$

其中:  $k_1 > 0$  为设计常数;  $\hat{d}_1$  是当式(25)中  $i = 1$  时得到的  $d_1$  估计值;  $r_1 = -k_{r11} e_1$  是为减少  $\tilde{d}_1$  而引入的鲁棒项,  $k_{r11} > 0$  为设计常数.

构造 Lyapunov 函数为  $V_1 = e_1^2/2$ . 将其对时间  $t$  求导, 并代入式(30)和(31), 经整理可得

$$\dot{V}_1 \leq -k_1 e_1^2 + e_1 g_1 e_2 + \tilde{d}_1^2/k_{r11}. \quad (32)$$

其中:  $e_2 = x_2 - x_2^*$ ,  $\tilde{d}_1$  在式(26)中已定义.

**Step i** ( $2 \leq i \leq n-1$ ) 定义第  $i$  步跟踪误差  $e_i = x_i - x_i^*$ . 由式(1),  $\dot{e}_i$  可表示为

$$\dot{e}_i = f_i + g_i x_{i+1} + d_i - \dot{x}_i^*. \quad (33)$$

因  $\dot{x}_i^*$  不可测, 采用以  $x_i^*$  为输入的 RCND 对  $\dot{x}_i^*$  进行估计. 此外与第1步相同, 利用式(25)对  $d_i$  进行估计. 由此, 选取虚拟控制量为

$$x_{i+1}^* = (-k_i e_i - g_{i-1} e_{i-1} - f_i - \hat{d}_i + \dot{x}_i^* + r_i)/g_i. \quad (34)$$

其中:  $k_i > 0$  为设计常数;  $\hat{d}_i$  是由式(25)得到的  $d_i$  的估计值;  $\dot{x}_i^*$  是当式(14)中  $v = x_i^*$  时得到的  $\dot{x}_i^*$  的估计值;  $r_i = -(k_{ri1} + k_{ri2})e_i$  为第  $i$  步的鲁棒项,  $k_{ri1} > 0$  和  $k_{ri2} > 0$  分别是为减少  $d_i$  和  $\dot{x}_i^*$  的估计误差而引入的设计参数.

选取扩充 Lyapunov 函数为  $V_i = \sum_{j=1}^{i-1} V_j + e_i^2/2$ .

沿式(33)对  $V_i$  求导, 并代入式(32)和(34), 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_i \leq & \sum_{j=1}^i -k_j e_j^2 + \tilde{d}_j^2/k_{rj1} + \\ & \sum_{l=2}^i e_{f_l}^2/k_{rl2} + e_i g_i e_{i+1}. \end{aligned} \quad (35)$$

其中:  $\tilde{d}_j$  在式(26)中已定义,  $e_{i+1} = x_{i+1} - x_{i+1}^*$ ,  $e_{f_l} = \dot{x}_l^* - \hat{x}_l^*$ .

**Step n** 由1.2节可知式(2)可用(5)近似. 定义式(2)的跟踪误差  $e_n = x_n - x_n^*$ , 则有

$$\dot{e}_n = f_{n1} + g_n u + O(\cdot) + d_n - \dot{x}_n^*. \quad (36)$$

由式(36)与(33)对比可知, 式(36)存在  $O(\cdot)$ . 为此, 在控制器设计中必须考虑抑制  $O(\cdot)$  对式(2)跟踪的影响. 根据引理1有  $\exists \varpi > 0$ , 使得  $|O(\cdot)| \leq \varpi$ . 另外, 类似于 Step  $i$  的方法, 分别利用 RCND 和式(27)对  $\dot{x}_n^*$  和  $d_n$  进行估计. 由此, 设计  $u$  为

$$u = (-k_n e_n - f_{n1} - g_{n-1} e_{n-1} - \eta - \hat{d}_n + \hat{x}_n^* + r_n) / g_n. \quad (37)$$

其中

$$\eta = \begin{cases} \frac{\chi e_n}{|e_n|}, & e_n \neq 0; \\ 0, & e_n = 0. \end{cases} \quad (38)$$

$k_n > 0$  为设计常数;  $\eta$  为非线性阻尼项, 且  $\chi > \varpi$ ;  $\hat{d}_n$  为经式 (6) 和 (27) 得到的  $d_n$  的估计值;  $\hat{x}_{n-1}^*$  是当式 (14) 中  $v = x_n^*$  时  $\hat{x}_n^*$  的估计值;  $r_n = -(k_{rn1} + k_{rn2})e_n$  为鲁棒项,  $k_{rn1}$  和  $k_{rn2} > 0$  为设计常数.

构造扩充的 Lyapunov 函数为  $V = \sum_{i=1}^{n-1} V_i + e_n^2/2$ .

对  $V$  求导, 并代入式 (35)~(37), 可得

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & \sum_{i=1}^{n-1} -k_i e_i^2 + \tilde{d}_i^2/k_{ri1} + \sum_{l=2}^{n-1} e_{f_l}^2/k_{rl2} + \\ & e_n \left( -k_n e_n - \frac{\chi e_n}{|e_n|} + O(\cdot) + \tilde{d}_n - e_{f_n} + r_n \right) \leq \\ & \sum_{i=1}^n -k_i e_i^2 + \tilde{d}_i^2/k_{ri1} + \sum_{l=2}^n e_{f_l}^2/k_{rl2}. \end{aligned} \quad (39)$$

其中:  $\tilde{d}_n$  在式 (28) 中已定义,  $e_{f_n} = \hat{x}_n^* - \hat{x}_n$ .

**注 5** 从式 (39) 可知, 式 (37) 中的  $\eta$  可以抑制 (36) 中的  $O(\cdot)$ . 但在原点处, 因  $\eta$  的存在会产生  $u$  的不连续. 为避免此问题, 可采用连续函数  $\eta = \frac{\chi e_n}{|e_n| + \epsilon}$  代替式 (38), 其中  $\epsilon$  是一个任意小的正数.

### 3.3 闭环系统的 ISS 分析

基于上述设计的复合控制器, 下面给出闭环不确定非仿射非线性系统的 ISS 分析.

**定理 2** 考虑不确定非仿射非线性系统 (1)~(3), 在非仿射非线性近似方法 (5) 和 (6)、一组 RCND (14)、干扰估计算法 (25) 和 (27)、控制器 (31)、(34)、(37) 和  $O(\cdot)$  的补偿项 (38) 下, 若假设 1~假设 3 成立, 则不确定非仿射非线性系统的所有跟踪误差  $e_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) 在  $[t_0, t)$  内是关于  $\tilde{d}$  和  $e_f$  输入状态实际稳定的, 即存在  $\mathcal{KL}$  类函数  $\beta_1$ ,  $\mathcal{K}_\infty$  类函数  $\alpha_1$ 、 $\gamma_1$ 、 $\gamma_2$ , 使得  $\alpha_1(|e_i(t)|) \leq$

$$\beta_1(|e_i(t_0)|, t) + \gamma_1(\tilde{d}_{[t_0, t]}) + \gamma_2(e_{f_{[t_0, t]}}) + \varrho, \quad t \geq t_0.$$

其中:  $\tilde{d} = \max_{i=1,2,\dots,n} (\tilde{d}_i^2)$ ,  $e_f = \max_{i=2,\dots,n} (e_{f_i}^2)$ ,  $\varrho$  为任意小的正数.

**证明** 由式 (39) 可得

$$\dot{V} \leq -\kappa V + \varsigma_1 \tilde{d} + \varsigma_2 e_f + \varrho. \quad (40)$$

其中:  $\kappa = \min_{i=1,2,\dots,n} (k_i)$ ,  $\varsigma_1 = \max_{i=1,2,\dots,n} (1/k_{ri1})$ ,  $\varsigma_2 = \max_{i=2,3,\dots,n} (1/k_{ri2})$ ,  $\varrho > 0$  为任意小的数.

由定理 1 和引理 6 可知,  $\exists \delta_1, \delta_2 > 0$  使得  $\tilde{d} \leq \delta_1$ 、 $e_f \leq \delta_2$  成立. 因此, 式 (1)~(3) 的 Lyapunov 函数  $V$  满

足文献 [17] 的定理 4.19, 结论成立.  $\square$

**注 6** 为简化分析, 本文仅研究单输入单输出系统. 对于一类严格块反馈的不确定非仿射非线性系统, 有类似的结论成立.

## 4 仿真实验

下面通过两个仿真实例来验证本文所提出的近似方法对非仿射非线性系统的可行性以及本文控制器的有效性.

**例 1** 考虑 Duffing-Holmes 系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -p_1 x_1 - p_2 x_2 - x_1^3 + h(x_2, u). \end{cases} \quad (41)$$

其中:  $p_1 = 0.2 \sin(10t)$ ,  $p_2 = 0.2(1 + \cos(5t))$ ,  $h(x_2, u) = u^3 + (2 + \cos(x_2))u$  为非仿射控制项.

设初始状态  $[x_1(0), x_2(0)]^T = 0$ , 仿真时间 30 s, 控制输入为

$$u(t) = \begin{cases} 0.1 \sin(2t), & t \leq 7; \\ \sin(2t), & 7 < t \leq 30. \end{cases}$$

为与已有的近似方法相比较, 采用文献 [6] 的方法可得式 (41) 在局部工作点  $u = 0$  处的仿射非线性系统为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -p_1 x_1 - p_2 x_2 - x_1^3 + (2 + \cos(x_2))u. \end{cases} \quad (42)$$

依据本文引理 1 的近似方法 (5) 和 (6) 得到式 (41) 的仿射非线性系统为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -p_1 x_1 - p_2 x_2 - x_1^3 - 2\zeta^3 + 3\zeta^2 u + (2 + \cos(x_2))u, \\ \dot{\zeta} = -k_\zeta \zeta + k_\zeta u, \quad \zeta(0) = 0. \end{cases} \quad (43)$$

取式 (43) 中  $k_\zeta = 100$ , 得仿真结果如图 3 所示. 由图 3 可知: 当  $t \leq 7$  时, 由于  $u$  在局部工作点附近, 文献 [6] 和本文引理 1 的方法均能很好地反映系统的变化; 而当  $t > 7$  时, 由于  $u$  远离局部工作点, 本文引理 1 的方法较文献 [6] 能更好地逼近系统的变化.

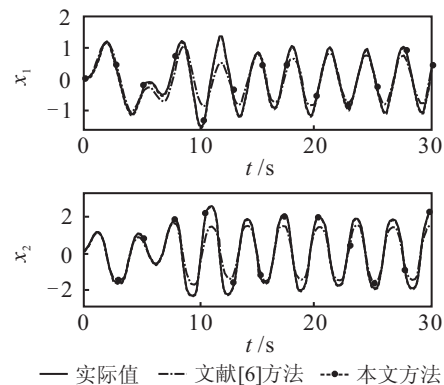


图 3 状态时间响应曲线

这表明了本文近似方法的可行性.

**例 2** 考虑带有参数不确定的 3 极主动磁悬浮轴承系统<sup>[23]</sup>:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3, \\ \dot{x}_2 = x_4; \\ \dot{x}_3 = c_0 / (4l_0^2 - (x_3^2 + x_4^2))^2 (x_1 u_1 + \sqrt{3}(2l_0 + x_2) u_2) ((2l_0 - x_2) u_1 + \sqrt{3} x_1 u_2), \\ \dot{x}_4 = 0.5 c_0 / (4l_0^2 - (x_3^2 + x_4^2))^2 ((x_1 u_1 + \sqrt{3}(2l_0 + x_2) u_2)^2 - ((2l_0 - x_2) u_1 + \sqrt{3} x_1 u_2)^2) - g; \end{cases} \quad (44a)$$

$$\mathbf{y} = [x_1, x_2]^T. \quad (44b)$$

其中:  $x_1$  和  $x_2$  为转子的水平和垂直位置,  $x_3$  和  $x_4$  为转子的水平和垂直速度;  $u_1$  和  $u_2$  为线圈电流, 即控制量;  $l_0 = \hat{l}_0(1 + r_l)$ ,  $\hat{l}_0$  为气隙标称值;  $c_0 = \hat{c}_0(1 + r_c)$ ,  $\hat{c}_0 = 4\mu AN^2/3m$ ,  $r_l$  和  $r_c$  为参数不确定.

设仿真条件为  $r_l = 1.2\%$ ,  $r_c = -1.2\%$ ,  $\hat{l}_0 = 9.45 \times 10^{-4}$  m,  $\mu = 4\pi \times 10^{-7}$  H/m,  $A = 4\pi \times 10^{-4}$  m<sup>2</sup>,  $N = 300$ ,  $m = 0.6325$  kg,  $g = 9.81$  m/s<sup>2</sup>. 初始状态为  $[x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0)]^T = [2 \times 10^{-4}$  m,  $2 \times 10^{-4}$  m,  $1.5 \times 10^{-2}$  m/s,  $-2 \times 10^{-2}$  m/s]<sup>T</sup>. 控制目标是  $\mathbf{y}$  跟踪期望轨迹  $\mathbf{y}_d = 10^{-4} \times [1.0, 0.5]^T$  m.

定义位置向量  $\mathbf{x}_1 = [x_1, x_2]^T$ , 速度向量  $\mathbf{x}_2 = [x_3, x_4]^T$ ,  $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1^T, \mathbf{x}_2^T]^T$ , 控制输入  $\mathbf{u} = [u_1, u_2]^T$ . 则式 (44) 转换成严格块反馈的不确定非仿射非线性系统, 即

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1) + g_1 \mathbf{x}_2 + \mathbf{d}_1(\mathbf{x}), \quad (45a)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{f}_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \mathbf{d}_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad (45b)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}_1. \quad (45c)$$

其中:  $\mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1) = \mathbf{d}_1(\mathbf{x}) = 0$ ;  $g_1 = I_{2 \times 2}$ ,  $I$  为单位阵;  $\mathbf{f}_2(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  为式 (44b) 的右侧标称值;  $\mathbf{d}_2(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  为参数不确定引起的复合干扰.

针对式 (45b), 采用引理 1 给出其全局时变的仿射非线性系统. 选取滤波器 (6) 的参数  $k_c = 50$ , RCND 参数如表 1 所示, 控制器 (31) 和 (37) 的参数为  $k_1 = 0.2$ ,  $k_{r11} = 1$ ,  $k_2 = 0.5$ ,  $k_{r21} = k_{r22} = 1$ ,  $\chi = 0.001$ ,  $\epsilon = 1 \times 10^{-7}$ .

表 1 RCND 参数

$v$	$\lambda_{10}$	$\lambda_{11}$	$\lambda_{20}$	$\lambda_{21}$	$\vartheta$	$\alpha$
$x_3^*$	2	0.7	3	0.5	0.5	0.3
$x_4^*$	3	0.3	5	0.8	0.2	0.3
$x_3$	2	0.3	3	0.5	0.5	0.3
$x_4$	2	0.3	3	0.5	0.5	0.3

首先, 采用不补偿复合干扰的控制器, 即式 (37)

中  $\hat{\mathbf{d}}_2 = 0$ ; 然后利用式 (27) 对  $\mathbf{d}_2$  估计, 并在式 (37) 中进行补偿. 得到的仿真曲线如图 4 和图 5 所示.

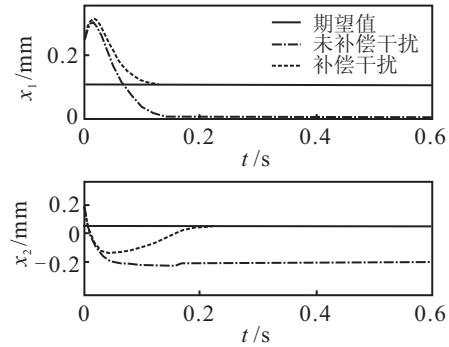


图 4 转子位置跟踪曲线

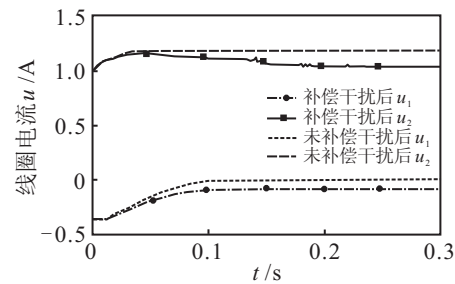


图 5 控制输入(线圈电流)曲线

由图 4 可以看出: 当存在复合干扰的情况时, 若不补偿干扰, 则位置跟踪将产生较大的偏差; 而当采用复合干扰估计算法 (27), 并在控制器 (37) 中进行补偿时, 系统具有良好的跟踪性能. 图 5 反映了线圈电流的有界性.

## 5 结 论

针对一类不确定非仿射非线性系统, 本文研究了其跟踪控制器设计方案. 该方案首先给出了一种将非仿射非线性系统近似为仿射非线性系统的时变方法; 然后设计了一种快速收敛的微分器. 通过所设计的微分器不仅能够实现复合干扰估计, 而且还可避免 Backstepping 设计中微分膨胀问题. 基于所设计的近似方法和快速收敛的微分器, 给出了一类不确定非仿射非线性系统的鲁棒 Backstepping 控制器设计过程, 其中采用鲁棒项和非线性阻尼项来减少逼近误差和近似方法中的动态误差. 仿真结果表明了本文方案的可行性和有效性, 并为一类不确定非仿射非线性系统的跟踪控制拓展出一种新的思路.

## 参考文献(References)

[1] 文杰, 姜长生, 薛雅丽. 严格反馈型非仿射非线性系统的自适应模糊控制[J]. 控制与决策, 2010, 25(8): 1327-1340.  
(Wen J, Jiang C S, Xue Y L. Adaptive fuzzy controller for strict-feedback nonaffine nonlinear systems[J]. Control and Decision, 2010, 25(8): 1327-1340.)

- [2] Labiod S, Guerra T M. Adaptive fuzzy control of a class of SISO nonaffine nonlinear systems[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2007, 158(10): 1126-1137.
- [3] Zhao T, Fan F L. Neural network-based adaptive output feedback control for MIMO non-affine systems[J]. *Neural Computing and Applications*, 2012, 21(1): 145-151.
- [4] Boskovic J, Chen L, Mehra R. Adaptive control design for nonaffine models arising in flight control[J]. *J of Guidance, Control, and Dynamics*, 2004, 27(2): 209-217.
- [5] 胡跃明, 胡终须, 毛宗源, 等. 非线性控制系统的近似化方法[J]. *控制理论与应用*, 2001, 18(2): 160-165.  
(Hu Y M, Hu Z X, Mao Z Y, et al. Approximation methods of nonlinear control systems[J]. *Control Theory & Applications*, 2001, 18(2): 160-165.)
- [6] Wen J, Jiang C S. Adaptive fuzzy control for a class of chaotic systems with nonaffine inputs[J]. *Communication in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2011, 16(1): 475-492.
- [7] Teo J, How J P. Proportional-integral controllers for minimum-phase nonaffine-in-control systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2010, 55(6): 1477-1483.
- [8] Deng H, Li H. A novel neural approximate inverse control for unknown nonlinear discrete dynamical systems[J]. *IEEE Trans on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, 2005, 35(1): 115-123.
- [9] 汤洪海, 李春文. 基于非仿射非线性模型的 AC/DC 系统  $H_\infty$  鲁棒控制器设计[J]. *自动化学报*, 2007, 33(7): 709-713.  
(Tang H H, Li C W.  $H_\infty$  robust control of AC/DC systems with non-affine nonlinear model[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2007, 33(7): 709-713.)
- [10] Chiu C H, Peng Y F, Lin Y W. Intelligent backstepping control for wheeled inverted pendulum[J]. *Expert Systems with Applications*, 2011, 38(4): 3364-3371.
- [11] Traoré D, Leon J D, Glumineau A. Adaptive interconnected observer-based backstepping control design for sensorless induction motor[J]. *Automatica*, 2012, 48(4): 682-687.
- [12] Yip P P, Hedrick J K. Adaptive dynamic surface control: A simplified algorithm for adaptive backstepping control of nonlinear systems[J]. *Int J of Control*, 1998, 71(5): 959-979.
- [13] Farrell J A, Polycarpou M, Sharma M, et al. Command filtered backstepping[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2009, 54(6): 1391-1395.
- [14] Li C Y, Jing W X, Gao C S. Adaptive backstepping-based flight control system using integral filters[J]. *Aerospace Science and Technology*, 2009, 13(3): 105-113.
- [15] Chen M, Ge S S, Ren B B. Adaptive tracking control of uncertain MIMO nonlinear systems with input constraints[J]. *Automatica*, 2011, 47(3): 452-465.
- [16] Cabrera J B D, Narendra K S. Issues in the application of neural networks for tracking based on inverse control[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1999, 44(11): 2007-2027.
- [17] Khalil H K. *Nonlinear systems*[M]. New Jersey: Prentice Hall, 2002: 176-177.
- [18] Bhat S P, Bernstein D S. Finite-time stability of continuous autonomous systems[J]. *SIAM J of Control and Optimization*, 2000, 38(3): 751-766.
- [19] Wang X, Chen Z, Yang G. Finite-time-convergent differentiator based on singular perturbation technique[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2007, 52(8): 1731-1737.
- [20] 韩京清, 王伟. 非线性跟踪-微分器[J]. *系统科学与数学*, 1994, 14(2): 177-183.  
(Han J Q, Wang W. Nonlinear tracking differentiator[J]. *J of System Science and Mathematical Sciences*, 1994, 14(2): 177-183.)
- [21] Ibrir S, Xie W F, Su C Y. Adaptive tracking of nonlinear systems with non-symmetric dead-zone input[J]. *Automatica*, 2007, 43(3): 522-530.
- [22] Orlov Y. Finite time stability and robust control synthesis of uncertain switched systems[J]. *SIAM J on Control Optimization*, 2005, 43(4): 1253-1271.
- [23] Tsai N C, King Y H, Lee R M. Fault diagnosis for magnetic bearing systems[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2009, 23(4): 1339-1351.

(责任编辑: 李君玲)