

一类脉冲切换系统的最优控制

李丽花^{1,2}, 高岩¹

(1. 上海理工大学 管理学院, 上海 200093; 2. 上海电力学院 数理学院, 上海 200433)

摘要: 研究一类脉冲依赖于状态的脉冲切换系统的最优控制问题. 考虑了目标函数的两种情况: 当目标函数光滑时, 通过将跳跃瞬间转化为一个新的待优化参数, 得到了该脉冲切换系统的必要最优性条件; 当目标函数不光滑时, 利用非光滑分析的知识, 得到了广义微分形式的必要最优性条件. 算例分析验证了所提出方法的有效性.

关键词: 最优控制; 脉冲切换系统; 状态依赖

中图分类号: O231.2

文献标志码: A

Optimal control for a class of impulsive and switching systems

LI Li-hua^{1,2}, GAO Yan¹

(1. School of Management, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China; 2. School of Mathematics and Physics, Shanghai University of Electric Power, Shanghai 200433, China. Correspondent: LI Li-hua, E-mail: dlxylh2004@163.com)

Abstract: Optimal control problems are investigated for a class of impulsive and switching systems, where the transitions are state-dependent. Two kinds of situations for the cost function are considered. When the cost function is smooth, by parameterizing the jumping instants as a new parameter to be optimized, the necessary optimality conditions of the hybrid systems are obtained. When the cost functional is nonsmooth, necessary optimality conditions of the generalized differential form are presented by the knowledge of nonsmooth analysis. An example is given to illustrate the effectiveness of the proposed method.

Key words: optimal control; impulsive and switching systems; state-dependence

0 引言

混杂系统是指既包含连续变量子系统, 又包含离散变量子系统的一类复杂系统. 在混杂系统中, 连续变量和离散变量互相作用, 使整个系统的运行状态在整体上表现出离散位置的跳跃, 在局部上表现出连续状态的动态演化^[1]. 在很多情况下, 只有利用混杂系统才能较为准确地描述系统的动态行为. 例如: 汽车的换挡行为, 室内空调的“开”和“关”模式, 具有间歇特性和批处理的生产过程等. 因此, 混杂系统在交通管理系统、生产库存管理和机器人等领域得到了广泛的应用.

近年来, 混杂系统的最优控制受到了许多研究者的关注. 文献[2]提出了混杂系统最优切换的两阶段算法; 文献[3]通过将混杂系统嵌入到一个连续性系统, 从而得到原混杂问题的最优解. 利用直接变分法

或间接方法, 人们得到了各种不同的混杂必要最优性条件^[4-8].

作为一类重要且特殊的混杂系统, 切换系统由一些连续子系统和一定的切换法则所构成. 在切换系统的实际工作过程中, 由于受到外在环境的干扰或内在系统发生故障等原因, 系统的切换往往伴随着脉冲行为, 即系统的运行轨迹发生一定的跳变, 这类系统被称为脉冲切换系统. 目前, 对脉冲切换系统的研究大都集中在稳定性方面^[9-14], 而从最优控制的角度对该类系统进行的研究相对较少. 在文献[15-16]中, 作者研究了脉冲切换依赖于时间的脉冲切换系统的最优控制. 在实际生活中, 许多混杂系统状态的改变是事件驱动的. 例如在机器人的设计中, 可以要求机器人到达一定位置时立即改变其状态. 因此, 研究脉冲依赖于状态的脉冲切换系统的最优控制具有重要的理

收稿日期: 2012-10-07; 修回日期: 2013-01-04.

基金项目: 国家自然科学基金项目(11171221, 61203006); 高等学校博士学科专项科研基金项目(20123120110004); 上海市教委项目(11YZ193).

作者简介: 李丽花(1979—), 女, 讲师, 博士生, 从事混杂系统控制的研究; 高岩(1962—), 男, 教授, 博士生导师, 从事混杂系统控制、非光滑优化、系统工程等研究.

论和现实意义.

本文研究一类事件驱动的脉冲切换系统的最优控制问题. 通过引入一个新的时间变量, 得到了这类混杂系统连续运行过程及跳变时刻所满足的必要最优性条件; 而且, 利用非光滑分析的知识, 将该必要最优性条件推广到广义微分形式. 算例分析表明了所得结论的有效性.

1 问题描述和预备知识

考虑定义在固定区间 $[t_0, t_N]$ 上的脉冲切换系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{\sigma(x)}x(t) + f(x(t), u(t)), h(x(t)) \neq 0; \\ x(t) \mapsto x(t) + B_{\sigma(x)}x(t), h(x(t)) = 0; \\ x(t_0^+) = x_0; \\ g(x(t_N)) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

其中: $\sigma : [0, +\infty) \rightarrow \{1, 2, \dots, N\}$ 为切换法则; $x(t) \in \mathbf{R}^n$ 为状态; Ω 为 \mathbf{R}^m 中有界闭集; $u(t) \in \Omega$ 为控制; $A_{\sigma(t)}, B_{\sigma(t)}$ 为 $n \times n$ 矩阵; f, h, g 关于其变量连续可微.

设 $h(x(t))$ 存在有限个孤立零点 $t_i (i = 1, 2, \dots, N-1)$, $t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N$, 且对于 $\forall t \in [t_0, t_N] \setminus \{t_1, \dots, t_{N-1}\}$, 均有 $h(x(t)) \neq 0$. 在切换控制和脉冲作用下, 系统 (1) 在脉冲切换点 $t_i (i = 1, 2, \dots, N-1)$ 处由第 $i-1$ 个子系统进入第 i 个子系统.

设系统 (1) 中的状态左连续, 即 $x(t_i) = x(t_i^-) = \lim_{t \rightarrow t_i^-} x(t)$, 记 $x(t_i^+) = \lim_{t \rightarrow t_i^+} x(t)$.

下面给出本文研究的最优控制问题 (P): 对于脉冲切换系统 (1), 确定分片连续控制函数 $u(t)$ 和脉冲切换瞬间 $t_i (i = 1, 2, \dots, N-1)$, 使得如下泛函最小:

$$J = \sum_{i=1}^N \varphi_i(x(t_i)) + \int_{t_0}^{t_N} L(x(t), u(t))dt. \quad (2)$$

其中: φ_i 和 L 关于其变量连续可微, $i = 1, 2, \dots, N$.

利用函数 $h(x(t))$ 的特点, 问题 (P) 等价于如下问题 (Q): 对于系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + f(x(t), u(t)), \\ \quad t \in (t_{i-1}, t_i], i = 1, 2, \dots, N; \\ x(t_i^+) = (I_n + B_i)x(t_i), i = 1, 2, \dots, N-1; \\ h(x(t_i)) = 0, i = 1, 2, \dots, N-1; \\ x(t_0^+) = x_0; \\ g(x(t_N)) = 0. \end{cases}$$

确定分片连续控制函数 $u(t)$ 和脉冲切换瞬间 $t_i (i = 1, 2, \dots, N-1)$, 使得如下泛函最小:

$$\sum_{i=1}^N \varphi_i(x(t_i)) + \sum_{i=1}^N \int_{t_{i-1}}^{t_i} L(x(t), u(t))dt.$$

下面介绍一些非光滑分析方面的知识, 详细可参见文献 [17].

设 $\varphi : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ 在点 x 处下半连续, 则函数 φ 在该点的 Fréchet 下微分 $\hat{\partial}\varphi(x)$ 定义为

$$\left\{ x^* \in \mathbf{R}^n \mid \liminf_{y \rightarrow x} \frac{\varphi(y) - \varphi(x) - \langle x^*, y - x \rangle}{\|y - x\|} \geq 0 \right\}.$$

设 $\varphi : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ 在点 x 处上半连续, 则函数 φ 在该点的 Fréchet 上微分 $\hat{\partial}^+\varphi(x)$ 定义为

$$\left\{ x^* \in \mathbf{R}^n \mid \limsup_{y \rightarrow x} \frac{\varphi(y) - \varphi(x) - \langle x^*, y - x \rangle}{\|y - x\|} \leq 0 \right\}.$$

例如在实数域中, 设 $\varphi(x) = |x|$, 则 $\hat{\partial}\varphi(0) = [-1, 1]$ 且 $\hat{\partial}^+\varphi(0) = \emptyset$.

设 $\varphi : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ 在点 x 处连续, 则函数 φ 在该点的 Fréchet 微分 $\nabla\varphi(x)$ 定义为

$$\left\{ x^* \in \mathbf{R}^n \mid \lim_{y \rightarrow x} \frac{\varphi(y) - \varphi(x) - \langle x^*, y - x \rangle}{\|y - x\|} = 0 \right\}.$$

由定义可知, Fréchet 微分是普通微分的推广, 当函数光滑时, Fréchet 微分即为普通微分.

2 最优性条件

下面给出问题 (P) 的必要最优性条件. 为方便起见, 记 $\tau = (t_1, \dots, t_{N-1})$.

定理 1 设 (τ^0, x^0, u^0) 为问题 (P) 的弱极小值点, 则存在分片连续的变量 $\lambda(t) : [t_0, t_N] \rightarrow \mathbf{R}^n$, 乘子 $\mu \in \mathbf{R}, \lambda_0 \in \mathbf{R}$ 以及 $\xi_i \in \mathbf{R} (i = 1, 2, \dots, N-1)$, 使得对于 $H(x, u, \lambda) = \lambda_0 L(x, u) + \lambda^T [A_i x(t) + f(x, u)]$ 及 $t \in [t_0, t_N]$, 有

$$\dot{\lambda}(t) = -\lambda_0 \frac{\partial L}{\partial x} - \left(A_i + \frac{\partial f}{\partial x} \right)^T \lambda(t); \quad (3)$$

$$u^0(t) = \operatorname{argmin}\{H(x^0(t), u, \lambda_0, \lambda(t)) \mid u \in \Omega\}; \quad (4)$$

$$H[t_i^{0+}] = H[t_i^{0-}]; \quad (5)$$

$$\lambda(t_i^{0-}) = \lambda_0 \frac{\partial[\varphi_i(x^0(t_i^0))]}{\partial x(t_i)} + \xi_i \frac{\partial[h(x^0(t_i^0))]}{\partial x(t_i)} + (I_n + B_i)^T \lambda(t_i^{0+}), i = 1, 2, \dots, N-1; \quad (6)$$

$$\lambda(t_N) = \lambda_0 \frac{\partial \varphi_N}{\partial x(t_N)} + \mu \frac{\partial g}{\partial x(t_N)}. \quad (7)$$

证明 令

$$\begin{aligned} x_i(s) &= x(t_{i-1} + s(t_i - t_{i-1})), \\ u_i(s) &= u(t_{i-1} + s(t_i - t_{i-1})), \\ s &\in [0, 1], i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

则对于 $s \in [0, 1]$, 问题 (Q) 可化为如下古典最优控制问题 (R): 对于系统

$$\begin{cases} \dot{x}_i(s) = (t_i(s) - t_{i-1}(s))[A_i x_i(s) + f(x_i(s), u_i(s))], i = 1, 2, \dots, N; \\ \dot{t}_i(s) = 0, i = 1, 2, \dots, N-1; \\ x_{i+1}(0) = (I_n + B_i)x_i(1), i = 1, 2, \dots, N-1; \\ h(x_i(1)) = 0, i = 1, 2, \dots, N-1; \\ x_1(0) = x_0; \\ g(x_N(1)) = 0. \end{cases}$$

确定分片连续的控制函数 $u(t)$ 和脉冲切换瞬间 t_i ($i = 1, 2, \dots, N-1$), 使得如下泛函最小:

$$\sum_{i=1}^N \varphi_i(x_i(1)) + \sum_{i=1}^N \int_0^1 [(t_i(s) - t_{i-1}(s))L(x_i(s), u_i(s))] ds,$$

其中 $s \in [0, 1]$.

对于问题 (R) 应用古典最优控制问题的必要最优性条件, 存在 $\lambda_i(s) \in \mathbf{R}^n$ ($i = 1, 2, \dots, N$), $\lambda_i^*(s) \in \mathbf{R}$ ($i = 1, 2, \dots, N-1$), $\xi_i \in \mathbf{R}$, $\omega_i \in \mathbf{R}^n$ ($i = 1, 2, \dots, N-1$), 使得对于

$$\hat{H}(x, u, \lambda) = \sum_{i=1}^N \{(t_i - t_{i-1})[\lambda_0 L(x_i, u_i) + \lambda_i^T (A_i + f(x_i, u_i))]\},$$

$$\phi(x, u) =$$

$$\lambda_0 \left[\sum_{i=1}^N \varphi_i(x_i(1)) \right] + \sum_{i=1}^{N-1} \xi_i h(x_i(1)) +$$

$$\sum_{i=1}^{N-1} \omega_i^T [x_{i+1}(0) - (I_n + B_i)x_i(1)] + \mu g(x_N(1)),$$

有

$$\lambda_i^*(s) = -\frac{\partial \hat{H}(x^0, u^0, \lambda_i)}{\partial t_i} = -H_i(x_i^0, u_i^0, \lambda_i), \quad i = 1, 2, \dots, N-1; \quad (8)$$

$$\lambda_i^*(0) = -\frac{\partial \phi(x^0, u^0)}{\partial t_i(0)} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N-1; \quad (9)$$

$$\lambda_i^*(1) = \frac{\partial \phi(x^0, u^0)}{\partial t_i(1)} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N-1. \quad (10)$$

对于定常系统, 哈密尔顿函数沿最优轨道为常数. 由式 (8) 可知 $\lambda_i^*(s)$ 在 $[0, 1]$ 上为线性函数, 结合边界条件 (9) 和 (10), 得到连续性条件 (5). 同时, 可以得到

$$\dot{\lambda}_i(s) = -\frac{\partial \hat{H}(x^0, u^0, \lambda_i)}{\partial x_i} = -(t_i - t_{i-1}) \left[\lambda_0 \frac{\partial L}{\partial x_i} - \left(A_i^T + \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \lambda_i(t) \right], \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad (11)$$

$$\lambda_{i+1}(0) = -\frac{\partial \phi(x^0, u^0)}{\partial x_{i+1}(0)} = -\omega_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1; \quad (12)$$

$$\lambda_i(1) = \frac{\partial \phi(x^0, u^0)}{\partial x_i(1)} = \lambda_0 \frac{\partial \phi_i(x_i(1))}{\partial x_i(1)} + \xi_i \frac{\partial h(x_i(1))}{\partial x_i(1)} - (I_n + B_i)^T \omega_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1; \quad (13)$$

$$\lambda_N(1) = \frac{\partial \phi(x^0, u^0)}{\partial x_N(1)} = \lambda_0 \frac{\partial \phi_N}{\partial x_N(1)} + \mu \frac{\partial g}{\partial x_N(1)}; \quad (14)$$

$$u^0(s) = \operatorname{argmin}\{\hat{H}(x^0(s), u(s), \lambda_0, \lambda(s)) | u \in \Omega\}. \quad (15)$$

利用

$$\lambda_i(t) = \lambda_i \left(\frac{t - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} \right), \quad t \in [t_{i-1}^0, t_i^0], \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

由式 (11) 可得 (3), 由式 (12) 和 (13) 可得 (6), 由式 (14) 和 (15) 可得 (7) 和 (5). \square

定理 1 给出的必要最优性条件推广了文献 [15] 的结论. 文献 [15] 给出了时间依赖的脉冲切换系统在连续运行区间上所满足的最优性条件. 定理 1 对于状态依赖的脉冲切换系统, 给出了其在连续运行过程及跳变时刻所满足的最优性条件.

利用定理 1, 原最优控制问题可以转化为一边界值问题. 该边界值问题可由解析方法或数值方法解决.

例 1 设脉冲切换系统由如下两个子系统组成:

$$\begin{bmatrix} \dot{k}(t) \\ \dot{l}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k(t) \\ l(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u, \quad (16)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{k}(t) \\ \dot{l}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k(t) \\ l(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad (17)$$

其中 $|u| \leq 1$, 其边界条件为

$$\begin{bmatrix} k(0) \\ l(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} k(2) \\ l(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}. \quad (18)$$

设系统由初始点开始沿子系统 (16) 运行, 遇到条件 $k(t) - \frac{1}{2}l(t) = -2$ 时, 系统的状态产生如下脉冲后并沿第 2 个子系统继续运行:

$$\begin{bmatrix} k(t^+) \\ l(t^+) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k(t) \\ l(t) \end{bmatrix}. \quad (19)$$

求最优控制 $u(t)$ 及脉冲切换点 t_i ($i = 1, 2, \dots, N$), 使 $\frac{1}{5} \sum_{i=1}^N k^2(t_i) + \int_0^2 (l(t) - u(t)) dt$ 取最小.

为简单起见, 假设切换函数 $k(t) - \frac{1}{2}l(t) = -2$ 在区间 $[0, 2]$ 上只有一个根 t_1 . 下面将在区间 $[0, t_1]$ 和 $(t_1, 2]$ 上考虑方程解的情况.

在 $[0, t_1]$ 上, 记 $H(t) = l(t) - u(t) + \lambda_1(t)(l(t) + u(t)) - \lambda_2(t)u(t)$, 由式 (3) 可得

$$\begin{cases} \lambda_1(t) = c_1, \\ \lambda_2(t) = (c_1 - 1)t + c_2. \end{cases} \quad (20)$$

利用式 (4) 和 (20), 得

$$u(t) = \begin{cases} -1, & (c_1 - 1)t - c_1 + c_2 - 1 < 0; \\ 1, & (c_1 - 1)t - c_1 + c_2 - 1 > 0. \end{cases} \quad (21)$$

其中 c_1, c_2 为 \mathbf{R} 中任意常数. 利用式 (16), (18) 和 (21), 得

$$k(t) = \begin{cases} -\frac{1}{2}t^2 - t, & t \in [0, t_m]; \\ \frac{1}{2}t^2 - 2t_m t + t + t_m^2 - 2t_m, & t \in (t_m, t_1]; \end{cases}$$

$$l(t) = \begin{cases} t, & t \in [0, t_m]; \\ -t + 2t_m, & t \in (t_m, t_1]. \end{cases}$$

其中 t_m 为方程 $(c_1 - 1)t - c_1 + c_2 - 1 = 0$ 的根.

在 $(t_1, 2]$ 上, 利用同样的方法可以得到

$$\begin{cases} \lambda_1(t) = c_3 e^t, \\ \lambda_2(t) = -c_3 e^t - t + c_4; \end{cases}$$

$$u(t) = \begin{cases} -1, & c_3 e^t + t - c_4 + 1 < 0; \\ 1, & c_3 e^t + t - c_4 + 1 > 0; \end{cases}$$

$$k(t) = \begin{cases} 2(e^2 - e^{t_n})e^{-t} - t + 2t_n + 1, & t \in [t_1, t_n]; \\ 2e^{2-t} + t - 1, & t \in (t_n, 2]; \end{cases}$$

$$l(t) = \begin{cases} -t + 2t_n, & t \in [t_1, t_n]; \\ -t, & t \in (t_n, 2]. \end{cases}$$

其中: c_3, c_4 为 \mathbf{R} 中任意常数; t_n 为方程 $c_3 e^t + t - c_4 + 1 = 0$ 的根. 由跳跃性条件 (6) 可得

$$\begin{cases} \lambda_1(t^-) = 0.4k(t) + \xi - 3\lambda_1(t^+), \\ \lambda_2(t^-) = -0.5\xi + 1.5\lambda_2(t^+). \end{cases} \quad (22)$$

利用式 (5), (19), (22), $k(t_1) + l(t_1) = 3$, $(c_1 - 1)t - c_1 + c_2 - 1 = 0$ 和 $c_3 e^t + t - c_4 + 1 = 0$, 可以得到含有 8 个未知数的 8 个方程. 采用求解非线性方程组的牛顿法, 得到脉冲切换点 $t_1 = 1.1897$, 控制变量

$$u(t) = \begin{cases} -1, & t \in [0, 1.0336]; \\ 1, & t \in (1.0336, 1.1897]; \\ -1, & t \in (1.1897, 1.2530]; \\ 1, & t \in (1.2530, 2]. \end{cases}$$

控制变量、协态变量和状态变量的曲线如图 1~图 3 所示.

当目标函数中的切换费用函数和终端费用函数不光滑时, 定理 1 中的式 (6) 和 (7) 不再成立. 下面给

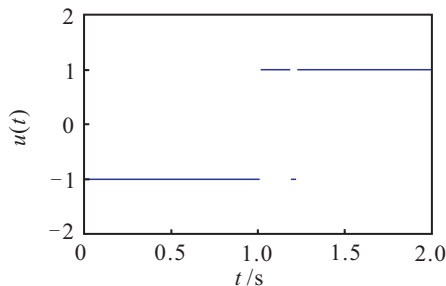


图 1 例 1 中的控制变量

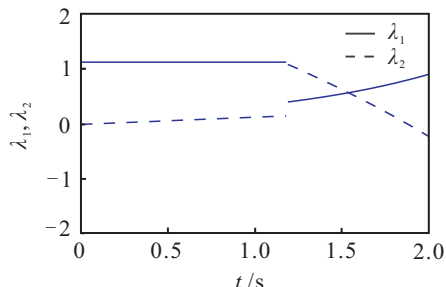


图 2 例 1 中的协态变量

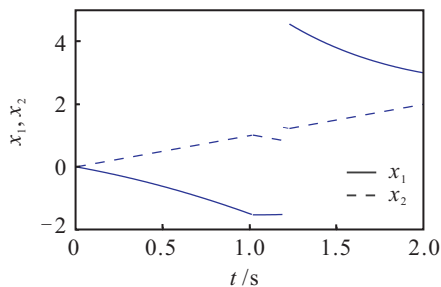


图 3 例 1 中的状态变量

出这种情况下, 问题 (P) 的广义微分形式的必要最优性条件. 首先引入如下引理^[8,17]:

引理 1 设 $\varphi : X \rightarrow \mathbf{R}$ 且 $|\varphi(\bar{x})| < \infty$, 则对于任意 $x^* \in \hat{\partial}\varphi(\bar{x})$, 存在函数 $s : X \rightarrow \mathbf{R}$, 满足 $s(\bar{x}) = \varphi(\bar{x})$, 且当 $x \in X$ 时, $s(x) \leq \varphi(x)$, 使得 $s(x)$ 在点 \bar{x} 处 Fréchet 可微, 且 $\nabla s(\bar{x}) = x^*$.

定理 2 设 (τ^0, x^0, u^0) 为问题 (P) 的弱极小值, φ_i 在 $x^0(t_i^0)$ 处 Fréchet 次可微, 则对于任意 $x^*(t_i^0) \in \hat{\partial}^+ \varphi_i(x^0(t_i^0))$ ($i = 1, 2, \dots, N$) 及 $t \in [t_0, t_N]$, 有

$$\dot{\lambda}(t) = -\lambda_0 \frac{\partial L}{\partial x} - \left(A_i + \frac{\partial f}{\partial x} \right)^T \lambda(t), \quad (23)$$

$$\lambda(t_N) = \lambda_0 x^*(b) + \mu \frac{\partial g}{\partial x(t_N)}, \quad (24)$$

$$u^0(t) = \operatorname{argmin}\{H(x^0(t), u, \lambda_0, \lambda(t)) | u \in \Omega\}, \quad (25)$$

$$H[t_i^0+] = H[t_i^0-], \quad (26)$$

$$\lambda(t_i^{0-}) = \lambda_0 x^*(t_i^0) + \xi_i \frac{\partial [h(x^0(t_i^0))]}{\partial x(t_i)} + (I_n + B_i)^T \lambda(t_i^{0+}), \quad i = 1, 2, \dots, N-1. \quad (27)$$

证明 对于任意 $x^*(t_i^0) \in \hat{\partial}^+ \varphi_i(x^0(t_i^0))$, 对 $-x^*(t_i^0)$ 应用引理 1 可知, 存在 s_i 满足 $s_i(x^0(t_i^0)) = \varphi_i(x^0(t_i^0))$, 且在 $x^0(t_i^0)$ 的某领域内 $s_i(x(t_i)) \leq \varphi_i(x(t_i))$. 而且 s_i 在 $x^0(t_i^0)$ 处 Fréchet 可微, 其 Fréchet 微分 $\nabla s_i(x^0(t_i^0)) = x^*(t_i^0)$ ($i = 1, 2, \dots, N$). 因此, (τ^0, x^0, u^0) 为如下问题 (T) 的弱极小值: 对于脉冲切换系统 (1), 确定分段连续控制函数 $u(t)$ 和脉冲切换瞬间 t_i ($i = 1, 2, \dots, N-1$), 使得如下泛函最小:

$$J = \sum_{i=1}^N s_i(x(t_i)) + \int_{t_0}^{t_N} L(x(t), u(t)) dt.$$

利用定理 1 的结论和 $\nabla s_i(x^0(t_i^0)) = x^*(t_i^0)$ 即可得证. \square

3 结 论

系统的脉冲和切换特性导致该系统解的非光滑性, 因此仅限于以光滑函数作为目标函数往往不能很好地刻画和研究相应的最优性条件. 本文针对一类事件驱动的脉冲切换系统, 研究了其目标函数光滑和非光滑时的最优控制问题. 首先根据系统的特点, 将原问题转化为可变区间上的混杂问题, 通过引入一个新的时间变量, 将可变区间上的问题转化为固定

区间上的光滑最优控制问题; 然后利用光滑最优控制问题的必要条件, 得到原问题的必要最优性条件; 最后利用非光滑的知识, 将该必要最优性条件推广到 Fréchet 上微分形式. 算例分析结果表明, 在切换瞬间, 哈密尔顿函数连续, 而伴随变量则满足一定的跳跃性条件.

参考文献(References)

- [1] 郑刚, 谭民, 宋永华. 混杂系统的研究进展[J]. 控制与决策, 2004, 19(1): 7-12.
(Zheng G, Tan M, Song Y H. Research on hybrid systems: A survey[J]. Control and Decision, 2004, 19(1): 7-12.)
- [2] Xu X P, Antsaklis P J. Optimal control of switched systems based on parameterization of the switching instants[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2004, 49(1): 2-16.
- [3] Bengua S C, DeCarlo R A. Optimal control of switching systems[J]. Automatica, 2005, 41(1): 11-27.
- [4] Maharramov S F. Necessary optimality conditions for switching control problems[J]. J of Industrial and Management Optimization, 2010, 6(1): 47-55.
- [5] Sheikh M, Caines P. On the hybrid optimal control problem: Theory and algorithms[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2007, 52(9): 1587-1603.
- [6] Oberle H J, Rosendahl R. Numerical computation of a singular-state subarc in an economic optimal control model[J]. Optimal Control Application & Methods, 2006, 27(4): 211-235.
- [7] Attia S A, Azhmyakov V, Raisch J. On an optimization problem for a class of impulsive hybrid systems[J]. Discrete Event Dynamic Systems, 2010, 20(2): 215-231.
- [8] Li L H, Gao Y, Yang J F. Optimal control of a class of hybrid systems[J]. Control Theory & Applications, 2013, 30(7): 891-897.
- [9] Guan Z H, Hill D J, Shen X M. On hybrid impulsive and switching systems and application to nonlinear control[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2005, 50(7): 1058-1062.
- [10] Xu H, Teo K L, Liu X. Robust stability analysis of guaranteed cost control for impulsive switched systems[J]. IEEE Trans on Systems, Man and Cybernetics, Part B: Cybernetics, 2008, 38(5): 1419-1422.
- [11] Zhang Z, Liu X. Robust stability of uncertain discrete impulsive switching systems[J]. Computers and Mathematics Applications, 2009, 58(2): 380-389.
- [12] Yao J, Guan Z H, Chen G, et al. Stability, robust stabilization and H_∞ control of singular-impulsive systems via switching control[J]. Systems & Control Letters, 2006, 55(11): 879-886.
- [13] Xu H, Teo K L. Exponential stability with L^2 -gain condition of nonlinear impulsive switched systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2010, 55(10): 2429-2433.
- [14] Liu J, Liu X, Xie W C. Class- \mathcal{KL} estimates and input-to-state stability analysis of impulsive switched systems[J]. Systems & Control Letters, 2012, 61(6): 738-746.
- [15] Gao R, Liu X, Yang J L. On optimal control of a class of impulsive switching systems with terminal constraints[J]. Nonlinear Analysis—Theory, Methods and Application, 2010, 73(7): 1940-1951.
- [16] Li L H, Gao Y, Wang G X. Necessary optimality conditions for a class of impulsive and switching systems[J]. J of Applied Mathematics, 2012, Doi: 10.1155/2012/457121.
- [17] Mordukhovich B S. Variational analysis and generalized differentiation[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2004: 82-97.
(责任编辑: 李君玲)