

移动机器人速度加速度饱和约束下的时间最优控制

熊蓉, 詹剑波, 汤卿, 褚健

(浙江大学工业控制技术国家重点实验室, 杭州 310027)

摘要: 针对机器人运动系统中普遍存在的速度和加速度约束, 提出一种满足以上约束的机器人运动时间最优控制方法. 首先, 通过最优条件构造哈密顿函数, 根据极小值原理求解时间最优控制; 其次, 通过相轨迹分析, 证明了满足约束的时间最优控制律的形式; 再次, 通过求解最优时间, 将满足约束的时间最优控制律转换成末端时间为最优时间的燃料最优控制律; 最后, 在RoboCup小型足球机器人上进行对比实验, 验证了该方法在规划与实际的一致性.

关键词: 速度饱和; 加速度饱和; 时间最优控制; 燃料最优控制; 最优时间

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Time optimal control of mobile robots under constraints of velocity and acceleration limits

XIONG Rong, ZHAN Jian-bo, TANG Qing, CHU Jian

(State Key Laboratory of Industrial Control Technology, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China.

Correspondent: XIONG Rong, E-mail: rxiong@iipc.zju.edu.cn)

Abstract: A time optimal control method considering the velocity and acceleration limits for mobile robots motion is proposed. Firstly, the Hamiltonian function is constructed, and time optimal control is obtained on basis of the minimum principle. Secondly, the control method under the constraints is proved through phase analysis. Thirdly, the time optimization problem under the constraints is converted into the energy optimization problem with the computed minimum time. Finally, the results are verified on RoboCup small size soccer robots.

Key words: velocity limits; acceleration limits; time optimal control; fuel optimal control; optimal time

0 引言

机器人的位姿控制问题(又称点镇定问题、姿态镇定问题)是机器人学的一个非常重要的问题, 它指系统从给定的初始状态到达并稳定在指定的目标状态^[1]. Aicardi等^[2]在极坐标中对移动机器人的点镇定问题进行分析, 得到了移动机器人的反馈镇定律, 为移动机器人的反馈控制提供了一个新的思路. 然而, 该方法并没有考虑机器人的速度约束和加速度约束, 即缺少对机器人的加减速控制, 使得实际机器人的应用受到较大的限制.

插值方法是解决机器人加减速问题的一类典型方法. 冷洪滨等^[3]提出了基于三次多项式的插值方法, 赵巍^[4]提出了基于直线和基于圆弧的插值方法以解决数控系统的加工问题, 两种算法都取得了不错的效果. 然而由于需要人工对曲线进行分段, 直接影响

了机器人的运动控制. 另一类典型的加减速控制方法是S型曲线加减速方法^[5-7]. 石川等^[8]研究S型曲线加减速方法, 考虑了运动的加速度, 使运动更加平滑. 然而, 由于S型加减速算法主要适用于初始速度和末端速度均为零的数控机床加工^[9-10], 对于始末速度不为零的移动机器人运动控制具有较高的局限性. 本文拟研究同时考虑具有速度约束和加速度约束的初始速度和末端速度不强制为零的机器人时间最优控制算法, 以实现移动机器人的快速、平稳移动.

由庞特里亚金提出的Bang-Bang控制被广泛用于解决线性系统的时间最优性问题. 熊蓉等^[11]将Bang-Bang控制运用于4轮全方位移动机器人, 取得了较好的控制效果. 由于Bang-Bang控制方法不考虑系统的状态约束, 当实际机器人的运动速度受限时, 容易产生机器人的跟踪误差, 不能很好地满足机器人的实际控制要求. 武星等^[12]提出了考虑速度、加速度

收稿日期: 2012-10-09; 修回日期: 2013-01-24.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61075078).

作者简介: 熊蓉(1972—), 女, 教授, 从事智能移动机器人的研究; 褚健(1963—), 男, 教授, 博士生导师, 从事控制理论与应用等研究.

约束的跟随控制算法, 该方法同时考虑位置偏差和角度偏差, 取得了良好的效果, 但是在时间最优方面考虑不足.

本文从机器人轨迹的运动方程出发, 考虑机器人的速度约束和加速度约束, 分析相轨迹的运动特征, 给出点镇定的最短时间的计算方法, 并证明机器人的速度、加速度饱和的时间最优控制就是以最短时间作为末端时间的加速度受限的燃料最优控制. 该方法对初末速度没有要求, 因此可以做到在状态空间上的时间最优点镇定.

1 机器人的运动模型

通常研究的机器人运动是平面中的二维运动. 由于机器人各向特性不一致, 二维空间中的点镇定问题和最优控制问题是一个非常困难的问题. 随着全方向移动机器人技术的逐渐成熟和普及, 机器人的运动可以分解成相互独立的两个一维运动. 因此, 对机器人在一维方向上的位置、速度和加速度的控制也具有非常重要的意义. 这里将机器人的运动模型表示为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u. \tag{1}$$

其中: $\boldsymbol{x} = m[x, \dot{x}]^T$ 为运动系统的状态变量, 由机器人的位移和速度组成; \boldsymbol{A} 为机器人运动系统的系统矩阵; \boldsymbol{b} 为输入矩阵; u 为运动系统的输入, 这里为机器人的加速度. 通常情况下, 系统矩阵 \boldsymbol{A} 和输入矩阵 \boldsymbol{b} 可以表示为

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}. \tag{2}$$

2 速度加速度饱和约束下的时间最优控制

机器人运动的状态饱和时间最优控制问题主要解决 3 方面的问题: 1) 以位置和速度作为目标状态的点镇定问题; 2) 机器人系统满足速度约束和加速度约束; 3) 系统由当前状态移动到目标状态的时间最短. 本文分 3 步对以上问题进行分析:

Step 1: 不考虑机器人的速度约束和加速度约束, 采用常用的时间最优控制方法求解最优控制问题;

Step 2: 提出速度受到约束时的时间最优控制律的表示形式, 并求解最优时间;

Step 3: 将速度、加速度饱和和时间最优控制转换为末端时间为最优时间的燃料最优控制问题, 并展示控制律的显式表达形式.

2.1 时间最优控制律设计

问题描述 针对机器人运动控制系统(1)满足约束条件

$$\|\dot{\boldsymbol{x}}\| < \dot{\boldsymbol{x}}_{\max}, \tag{3}$$

设计控制律 $|u(t)| \leq 1$, 使得机器人运动系统满足时间最短的最优条件

$$J = \int_{t_0}^{t_f} dt = t_f - t_0. \tag{4}$$

令机器人运动系统的状态为 $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2]^T$, 根据极小值原理构造哈密尔顿函数

$$H = 1 + \lambda_1(t)x_2(t) + \lambda_2(t)bu(t), \tag{5}$$

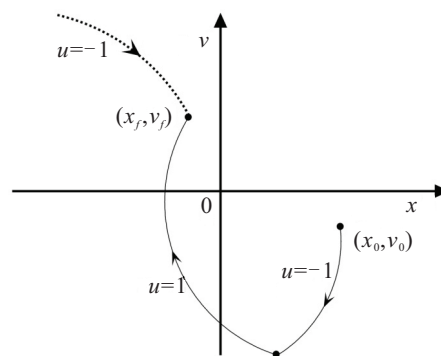
对应的协态方程可表示为

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1(t) = 0, \\ \dot{\lambda}_2(t) = -\lambda_1(t). \end{cases} \tag{6}$$

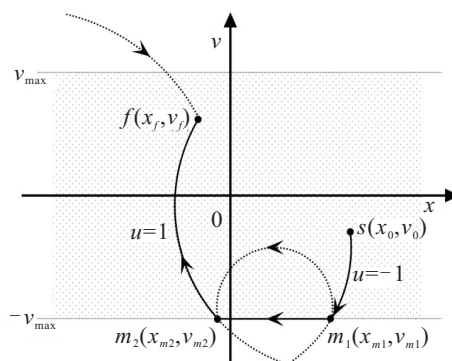
最终获得最优控制律为

$$u^*(t) = -\text{sgn}[b\lambda_2(t)]. \tag{7}$$

机器人运动系统的相轨迹如图 1(a) 所示. 图 1(a) 表示的是由初始状态 (x_0, v_0) 变化到末端状态 (x_f, v_f) 的机器人相轨迹变化. 可以看到, 在不考虑速度饱和约束情况下, 系统的时间最优控制方法就是最常见的 Bang-Bang 控制. 然而在实际机器人运动过程中, 不仅机器人的加速度受到电机力矩和地面摩擦力的限制, 而且机器人的速度也受到电机转速的限制. 如果依然采用 Bang-Bang 控制, 则机器人的实际运动将与规划运动产生较大的偏差, 因此需要考虑机器人运动系统的饱和特性. 如图 1(b) 所示, 机器人由于受到速度饱和的约束, 在 Bang-Bang 控制下的机器人运动轨线将超出机器人的可行区域, 这会导致机器人的运



(a) 不考虑速度饱和时的时间最优相轨迹变化



(b) 考虑速度饱和时的时间最优相轨迹变化

图 1 时间最优相轨迹变化图

动产生偏差. 因此 Bang-Bang 控制已经不再适用, 应根据速度约束设计机器人的时间最优控制方法.

当考虑约束 (3) 时, 机器人从初始状态运行到目标状态的时间可以表示为

$$\Delta t = t_f - t_0 = \int_{t_0}^{t_f} dt, \quad (8)$$

通过变换可以得到

$$\Delta t = t_f - t_0 = \int_{t_0}^{t_f} \frac{dx_1}{dx_2} dt = \int_{x_0}^{x_f} \frac{dx_1}{|x_2|}. \quad (9)$$

由式 (9) 可以看出, 若想要时间最短, 则要求 x_2 较大. 因此考虑两种情况: 1) 当机器人的速度没有超过速度限制时, Bang-Bang 控制的运动轨迹为满足系统要求的时间最优轨迹; 2) 当 Bang-Bang 控制的最优轨迹不满足速度约束, 即不满足约束条件 (3) 时, 应重新考虑机器人的控制方法. 这里主要考虑系统由 m_1 点运动到 m_2 点, Bang-Bang 控制速度超限时的机器人运动轨迹. 由式 (9) 可以得到, 从 m_1 点运动到 m_2 点的时间最优控制律当且仅当 $|x_2| = v_{\max}$ 时, 机器人的运动时间最短, 从而最优控制律可以表示为

$$u = 0. \quad (10)$$

最后可以得到机器人运动系统在满足速度、加速度约束情况下的最优时间为

$$t_{\text{total}} = t_{s-m_1} + t_{m_1-m_2} + t_{m_2-f}. \quad (11)$$

由于系统的初始状态、末端状态、约束条件各不相同, 3 段时间 t_{s-m_1} , $t_{m_1-m_2}$ 和 t_{m_2-f} 均可能为零值. 因此满足速度、加速度约束的时间最优控制律 u 具有以下几种组合形式:

$$\begin{aligned} & \{1\}, \{-1\}, \{0\}; \\ & \{0, 1\}, \{0, -1\}, \{1, 0\}, \{-1, 0\}, \{1, -1\}, \{-1, 1\}; \\ & \{1, 0, -1\}, \{-1, 0, 1\}. \end{aligned} \quad (12)$$

这几种组合形式与燃料最优控制律的形式相同, 因此本文将机器人的速度、加速度饱和时间最优控制转换为终端时间固定的燃料最优控制.

2.2 最优时间的计算

为了计算机器人运动的最优时间, 先考虑 Bang-Bang 控制下的机器人速度是否超出了系统的最大速度约束. 设 Bang-Bang 控制的最大速度为 v_m , 则 v_m 满足

$$\frac{v_m^2 - v_0^2}{2b} + \frac{v_m^2 - v_f^2}{2b} = x_f - x_0. \quad (13)$$

由此可以获得 Bang-Bang 控制的最大速度为

$$|v_m| = \sqrt{b(x_f - x_0) + \frac{v_0^2 + v_f^2}{2}}. \quad (14)$$

1) 当 $|v_m| \leq v_{\max}$ 时, 最优控制的时间与 Bang-Bang 控制相同, 可以表示为

$$t_{\text{total}} = t_{s-m} + t_{m-f} = \frac{v_m - v_0}{b} + \frac{v_m - v_f}{b}; \quad (15)$$

2) 当 $|v_m| > v_{\max}$ 时, 最优控制的时间包括匀速运行的时间, 匀速前进的距离可以表示为

$$\Delta x = x_f - x_0 - \frac{v_{\max}^2 - v_0^2}{2b} - \frac{v_{\max}^2 - v_f^2}{2b}. \quad (16)$$

因此, 最优控制的总时间可以表示为

$$t_{\text{total}} = t_{s-m_1} + t_{m_1-m_2} + t_{m_2-f}, \quad (17)$$

代入后即得

$$t_{\text{total}} = \frac{v_{\max} - v_0}{b} + \frac{\Delta x}{v_{\max}} + \frac{v_{\max} - v_f}{b}. \quad (18)$$

2.3 最优控制律的求解

因为满足速度、加速度约束的时间最优控制律的表现方式与燃料最优控制相同, 故将上述问题转换为初始条件和末端条件固定的燃料最优控制问题进行求解.

问题描述 针对机器人运动控制系统 (1), 设计最优控制律 $u(t)$ 满足边界条件

$$|u(t)| \leq 1, \quad \forall t \in [t_0, t_f], \quad (19)$$

其中 $t_f = t_0 + t_{\text{total}}$, 使得机器人运动系统 (1) 从 t_0 到 t_f 时刻, 由初始状态 $\mathbf{x}(t_0) = [x_0, v_0]^T$ 运动到末端状态 $\mathbf{x}(t_f) = [x_f, v_f]^T$, 并满足使得以下性能指标 J 最小:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} |u(t)| dt, \quad (20)$$

则该控制律 $u^*(t)$ 即为机器人运动控制系统 (1) 满足约束条件 (3) 的时间最优控制律.

令系统状态表示为 $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$, 根据极小值原理, 可以构造哈密顿函数

$$H = |u(t)| + \lambda_1 x_2(t) + \lambda_2 b u(t), \quad (21)$$

求得协态方程为

$$\begin{cases} \lambda_1(t) = c_1, \\ \lambda_2(t) = -c_1 t + c_2. \end{cases} \quad (22)$$

从而得到最优控制律

$$u^*(t) = \begin{cases} 0, & |b\lambda_2(t)| \leq 1; \\ -\text{sgn}\{b\lambda_2(t)\}, & |b\lambda_2(t)| > 1 \end{cases} \quad (23)$$

使得性能指标取最小值

$$H^* = H(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}^*) = \min_{\mathbf{u} \in \Omega} H(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}). \quad (24)$$

其中: Ω 为满足系统初始状态和末端状态的控制律集合, \mathbf{x} 为系统状态矢量, $\boldsymbol{\lambda}$ 为协态变量矢量. 当控制律 $u(t)$ 分别等于 $-1, 0, 1$ 时的系统相轨迹如图 2 所示.

机器人速度、加速度饱和下的时间最优控制可以通过以上 3 种相轨迹或其组合完成, 组合形式如式 (12) 所示. 比较典型的速度、加速度饱和时间最优控制相轨迹曲线如图 1(b) 所示, 系统先加速到最大速度, 再保持匀速运动, 最后减速到目标状态.

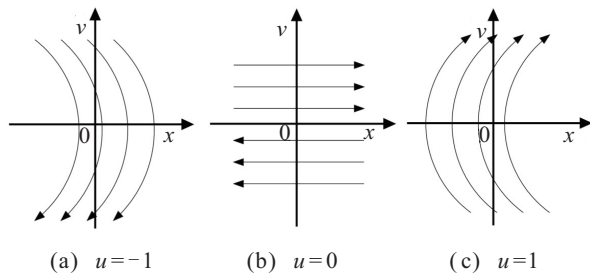


图 2 不同控制率下的系统相轨迹

3 实验分析

为验证本文方法的有效性, 在 RoboCup 小型足球机器人平台上进行测试, 该平台是针对 RoboCup 机器人足球赛小型组特别研制的. 比赛具有高实时性和对抗性, 机器人的运动也讲究时间最优性和一致性. 平台中机器人采用 4 轮全方位移动方式, 控制周期为 60 Hz, 由场外固定视觉定位, 定位精度为 1 cm. 实验过程中先在连续空间计算机器人的控制量; 然后将运算结果以 60 Hz 离散化得到机器人的实际控制指令; 最后通过无线通讯发送给机器人.

实验分为 3 个部分, 第 1 部分采用不考虑速度约束而仅考虑加速度约束的时间最优控制方法. 给定机器人的初始位置为 0 m, 速度为 0 m/s, 再设定机器人的目标位置为 4 m, 目标速度为 0 m/s, 给定机器人的最大加速度约束为 3.5 m/s^2 . 由此得到的机器人运动轨迹如图 3(a) 所示, 其中实线表示控制算法给出的目标位置, 虚线表示根据摄像机获取的机器人的实际位置. 通过对比可以发现, 实际机器人的运动无法跟踪机器人的目标位置, 产生了较大的偏差, 机器人的最终位置没有到达 4 m, 与目标值有较大的出入. 根据对机器人在图像上位置信息的求导可以得到机器人的实际运动速度, 由它和参考速度的比较 (图 3(b)) 所

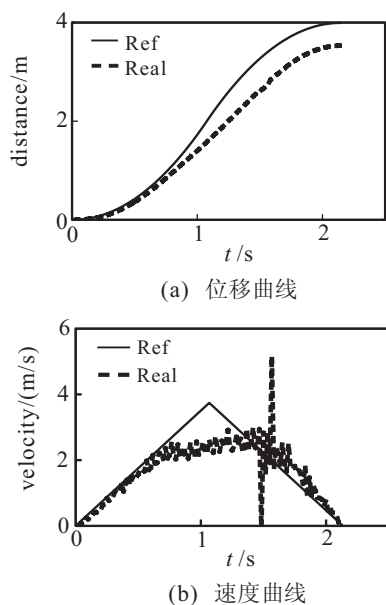


图 3 不考虑机器人速度约束的时间最优控制运动曲线

示) 可知, 运动结果产生的原因是状态的饱和使得机器人对过高的速度无法跟踪.

第 2 部分采用不考虑加速度约束而仅考虑速度约束的时间最优控制方法. 机器人的初末状态与第 1 部分实验给定的相同, 同时给定机器人的最大速度约束为 2.5 m/s, 最大加速度给定为远超机器人能力的 6.5 m/s^2 . 由此得到的机器人运动轨迹如图 4(a) 所示, 实际的位置与目标位置也有较大出入. 而从图 4(b) 的速度曲线可以看出, 此时在加减速阶段就已经出现了实际速度无法快速地跟踪目标速度, 原因即是加速度的过饱和和作用.

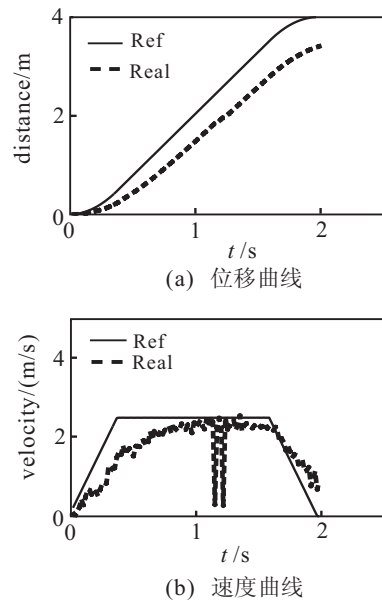


图 4 不考虑机器人加速度约束的时间最优控制运动曲线

第 3 部分采用本文所提出的速度加速度饱和和时间最优控制, 机器人的初末状态与前两部分实验给定的相同, 另外加入了 2.5 m/s 的速度饱和限制, 加速度的饱和限制为 3.5 m/s^2 , 运动结果如图 5(a) 所示. 其中

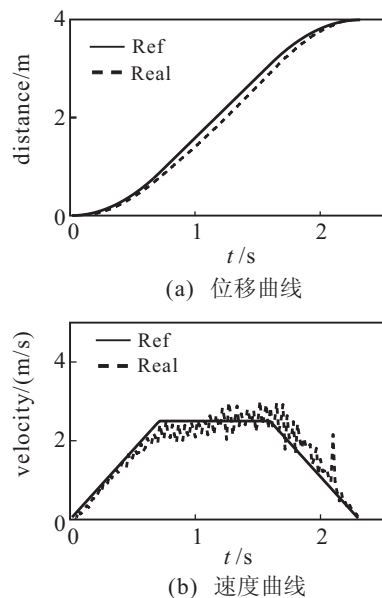


图 5 考虑机器人速度约束的时间最优控制运动曲线

实线为机器人的目标位置曲线,虚线为由摄像机获得的机器人的实际位置.可以看出,机器人的实际运动能够较好地符合机器人的目标曲线,且最终能够到达4m这个末端位置.从图5(b)也可看出,此时机器人的速度曲线也较好地跟踪了参考速度.因此,考虑机器人速度、加速度约束的时间最优控制方法能够更好地反映机器人的物理特性,提高机器人的执行效果.

4 结 论

本文针对机器人常见的速度约束和加速度约束,提出了机器人系统的速度、加速度饱和时间最优控制.该方法通过分析系统的相轨迹图,证明了满足速度、加速度约束的时间最优控制律,即末端时间为最优时间的燃料最优控制律,提出了最优时间的求解方法,给出了最优控制律的表现形式.该控制方法可以从任意非零初始状态生成一条时间最优轨迹运动到任意非零末端状态,并且满足机器人的速度、加速度约束.因此该方法可以用于机器人的实时轨迹生成,即机器人在运动过程中可以随时改变设定目标状态,实现机器人的平滑运动.

参考文献(References)

- [1] 蔡自兴,贺汉根,陈虹.未知环境中移动机器人导航控制理论与方法[M].北京:科学出版社,2009.
(Cai Z X, He H G, Chen H. Navigation control theory and methods for mobile robots in unknown environments[M]. Beijing, Science Press, 2009.)
- [2] Aicardi M, Casalino G, Bicchi A, et al. Closed loop steering of unicycle-like vehicles via Lyapunov techniques[J]. IEEE Robotics and Automation Magazine, 1995, 2(1): 27-35.
- [3] 冷洪滨, 邬义杰, 潘晓弘. 三次多项式型段内加减速控制新方法[J]. 浙江大学学报: 工学版, 2008, 42(8): 1440-1446.
(Leng H B, Wu Y J, Pan X H. New single segment acceleration and deceleration control method based on cubic polynomial model[J]. J of Zhejiang University: Engineering Science, 2008, 42(8): 1440-1446.)
- [4] 赵巍. 数控系统的插补算法及加减速控制方法研究[D]. 天津: 天津大学机械工程学院, 2004.
(Zhao W. Research on interpolator and acceleration and deceleration control for CNC system[D]. Tianjin: School of Mechanical Engineering, Tianjin University, 2004.)
- [5] 李晓辉, 邬义杰, 冷洪滨. S曲线加减速控制新方法的研究[J]. 组合机床与自动化加工技术, 2007(10): 50-53.
(Li X H, Wu Y J, Leng H B. Research on a new S-curve acceleration and deceleration control method[J]. Modular Machine Tool and Automatic Manufacturing Technique, 2007(10): 50-53.)
- [6] 郭新贵, 李从心. S曲线加减速算法研究[J]. 机床与液压, 2002(5): 60-62.
(Guo X G, Li C X. Studying S-shape acceleration/deceleration algorithm[J]. Machine Tool and Hydraulics, 2002(5): 60-62.)
- [7] 张碧陶, 高伟强, 沈列, 等. S曲线加减速控制新算法的研究[J]. 机床与液压, 2009, 37(10): 27-30.
(Zhang B T, Gao W Q, Shen L, et al. The study of new S-curve acceleration/deceleration arithmetic[J]. Machine Tool and Hydraulics, 2009, 37(10): 27-30.)
- [8] 石川, 赵彤, 叶佩青, 等. 数控系统S曲线加减速规划研究[J]. 中国机械工程, 2007, 18(12): 1421-1427.
(Shi C, Zhao T, Ye P Q, et al. Study on S-shape curve acceleration and deceleration control on NC system[J]. China Mechanical Engineering, 2007, 18(12): 1421-1425.)
- [9] 张得礼, 周来水. 数控加工运动的平滑处理[J]. 航空学报, 2006, 27(1): 125-139.
(Zhang D L, Zhou L S. Adaptive algorithm for feedrate smoothing of high speed machining[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2006, 27(1): 125-139.)
- [10] 郭新贵. 面向高速切削的高速高精度插补技术研究[D]. 上海: 上海交通大学材料科学与工程学院, 2002.
(Guo X G. Research on high accuracy interpolation strategy for high-speed cutting[D]. Shanghai: School of Materials Science and Engineering, Shanghai Jiaotong University, 2002.)
- [11] 熊蓉, 张翻, 褚健, 等. 四轮全方位移动机器人的建模和最优控制[J]. 控制理论与应用, 2006, 23(1): 93-98.
(Xiong R, Zhang H, Chu J, et al. Modeling and optimal control of omni-directional mobile robots[J]. Control Theory & Applications, 2006, 23(1): 93-98.)
- [12] 武星, 楼佩煌, 唐敦兵. 基于速度和加速度约束的有限控制能力路径跟踪[J]. 南京航空航天大学学报, 2012, 44(3): 279-284.
(Wu X, Lou P H, Tang D B. Path tracking with finite control ability based on velocity and acceleration constraints[J]. J of Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2012, 44(3): 279-284.)

(责任编辑: 孙艺红)