

不同维数非线性节点非线性耦合复杂动态网络渐近同步

张丽丽^{a,b}, 王银河^a, 王钦若^b

(广东工业大学 a. 自动化学院, b. 应用数学学院, 广州 510006)

摘要: 针对具有不同维数非线性节点的非线性耦合复杂动态网络, 首先给出了它的模型和实现同步的假设; 然后基于不变流形给出了该类复杂网络同步的定义, 并设计了分散动态补偿控制器, 提出了同步方案; 最后运用 Lyapunov 稳定性理论进行了理论证明, 并通过数值仿真验证了该同步方案的有效性。

关键词: 复杂动态网络; 渐近同步; 非线性耦合; 分散动态补偿控制

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Asymptotic synchronization for nonlinear coupled complex dynamical networks with different-dimension nonlinear nodes

ZHANG Li-li^{a,b}, WANG Yin-he^a, WANG Qin-ruo^a

(a. Faculty of Automation, b. Faculty of Applied Mathematics, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510006, China. Correspondent: ZHANG Li-li, E-mail: zh_lili@sina.com)

Abstract: For complex dynamical networks with nonlinear different-dimension nodes and coupling functions, a general network model is proposed. For this kind of network, some assumptions are given to achieve its synchronization, and the synchronous definition is presented based on the invariant manifold. Furthermore, decentralized dynamical compensation controllers are synthesized and the synchronization scheme is given. Finally, the synchronous theorem is proved rigorously by using Lyapunov stability theory, and a numerical example is given to verify the effectiveness of the proposed scheme.

Key words: complex dynamical network; asymptotic synchronization; nonlinear coupled; decentralized dynamical compensation controller

0 引言

近年来, 复杂动态网络已经成为科学界和工程界非常活跃的研究对象. 同步是复杂网络的一种重要的动态行为, 无论是时滞的还是非时滞的复杂网络同步都得到了广泛的研究^[1-16]. 复杂网络一般要通过对节点施加控制才能实现同步, 因此, 复杂网络同步控制器的设计无论在理论研究还是实际应用中都是极其重要的. 目前, 人们已经提出了很多实现复杂网络同步的控制方法. 文献[1]通过分散线性控制实现了具有线性耦合和不同维数线性节点的复杂网络同步. 文献[13]基于牵制控制提出了具有时滞和非时滞耦合的复杂网络全局同步的充分条件. 文献[16]基于自适应控制提出了一类时滞和非时滞耦合的复杂动态网络全局同步准则.

然而, 在大部分现有的复杂网络同步研究成果中, 基本的假设是其各节点动态行为相同^[6-11,13-16]或者带有内部状态线性耦合^[1-5,10-16]. 但在工程问题中, 有许多复杂动态网络具有不同节点或者节点间本质上是非线性耦合的^[7], 与具有相同节点的复杂网络相比, 这类网络的动态行为更加复杂^[12]. 目前, 对具有不同节点的网络同步的研究尚处于起步阶段. 文献[2-5,12]研究了具有不同节点复杂网络的同步问题, 但其网络中所有节点状态维数相同. 文献[1]提出的同步方案尽管适用于节点具有不同维数的复杂网络, 但其节点是线性的且节点间耦合也是线性的. 非线性耦合复杂网络的同步虽有研究^[7-9], 但它们的节点动态行为都相同. 在实际网络中还存在许多网络, 它们的节点在本质或表面上具有相同或相似的特性^[1,17], 这些

收稿日期: 2012-10-23; 修回日期: 2013-01-20.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61273219); 广东省自然科学基金项目(S2013010015768, 2011010005029); 教育部高等学校博士学科点专项科研项目(20134420110003); 广东工业大学青年基金项目(062053).

作者简介: 张丽丽(1978—), 女, 讲师, 博士生, 从事非线性控制理论的研究; 王银河(1962—), 男, 教授, 博士生导师, 从事控制理论与工程研究.

节点称为相似节点(其特殊情况是相同节点). 如果网络是由不同维数的非线性相似节点以及非线性耦合函数构成, 则该网络将具有复杂的动态行为, 但现有的同步方法不适用于该类网络. 鉴于以上讨论, 研究具有不同维数的非线性相似节点和非线性耦合函数的复杂网络的同步控制是非常必要的.

本文以具有不同维数的非线性相似节点和非线性耦合的复杂网络为研究对象, 首先, 给出了该类网络的数学模型及两个假设; 然后, 基于不变流形定义了该类网络的同步; 再次, 通过设计分散动态补偿控制器, 提出了该类网络渐近同步的控制算法, 并基于 Lyapunov 稳定性理论对该算法进行了严格的证明; 最后, 通过数值仿真验证了本文同步方案的有效性.

1 复杂动态网络模型

考虑由 N 个非线性节点经由非线性耦合的复杂动态网络

$$\dot{x}_i = f_i(x_i) + \delta \sum_{j=1, j \neq i}^N c_{ij} h_i(x_i) (\varphi_j(x_j) - \varphi_i(x_i)) + g_i(x_i) u_i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (1)$$

其中: $x_i \in R^{n_i}$ 为状态向量; $f_i: R^{n_i} \rightarrow R^{n_i}$ 和 $\varphi_i: R^{n_i} \rightarrow R^{n_1}$ 为函数向量; $u_i \in R^m$ 为控制输入; $h_i: R^{n_i} \rightarrow R^{n_1 \times n_1}$ 和 $g_i: R^{n_i} \rightarrow R^{n_1 \times m}$ 为函数矩阵; $h_i(x_i) \varphi_j(x_j): R^{n_j} \rightarrow R^{n_i}$ 为内部耦合函数向量; 正实数 δ 为耦合强度; $C = (c_{ij})_{N \times N}$ 为外部耦合结构矩阵, 其中如果节点 i 和节点 $j (i \neq j)$ 有连接, 则 $c_{ij} = c_{ji} > 0$, 否则 $c_{ij} = 0$, 且满足耗散条件, 即 $c_{ii} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N c_{ij}$.

假设 1 设式(1)中 $u_i = \alpha_i(x_i) + \beta_i(x_i) v_i$, φ_i 为光滑映射, 且满足

$$\frac{\partial \varphi_i(x_i)}{\partial x_i} (f_i(x_i) + g_i(x_i) \alpha_i(x_i)) = f_1(\varphi_i(x_i)) + g_1(\varphi_i(x_i)) \alpha_1(\varphi_i(x_i)), \quad (2)$$

$$\frac{\partial \varphi_i(x_i)}{\partial x_i} g_i(x_i) \beta_i(x_i) = g_1(\varphi_i(x_i)) \beta_1(\varphi_i(x_i)). \quad (3)$$

其中: $\alpha_i(x_i) \in R^m$ 和 $\beta_i(x_i) \in R^{m \times m}$ 分别为光滑映射和可逆光滑函数阵, $\partial \varphi_i(x_i) / \partial x_i = (\partial \varphi_{ik}(x_i) / \partial x_{ij})_{n_1 \times n_i} (k = 1, 2, \dots, n_1, j = 1, 2, \dots, n_i)$ 为 φ_i 的 $n_1 \times n_i$ 阶的 Jacobian 矩阵.

注 1 式(2)和(3)表明网络(1)中的 N 个节点具有某些相似的内部动态行为^[1,17](这些节点可以称为相似节点, 它们的状态维数不需要相同), 因此满足假设 1 的复杂网络(1)是由 N 个相似节点通过非线性耦合构成的, $\varphi_i, \alpha_i, \beta_i$ 称为一组相似参数. 一般地, 同一个网络存在许多组相似参数, 相似参数的求解可参考文献[17].

注 2 动态网络(1)中的节点允许是不同维数

的, 这与文献[6-11,13-16](所有节点都相同)和文献[2-5,12](节点不同但其状态维数相同)中的网络是不同的; 动态网络(1)的耦合函数允许是非线性的, 这与文献[1]中的网络(节点维数不同但耦合为线性的)是不同的.

为了实现复杂动态网络(1)的渐近同步, 需给出另一假设和引理.

假设 2 对于任意的 $x, y \in R^{n_1}$, 存在非负常数 $\mu \in R$, 满足

$$(x - y)^T (f_1(x) - f_1(y)) \leq \mu (x - y)^T (x - y). \quad (4)$$

注 3 复杂网络(1)中仅要求 f_1 满足式(4). 事实上, 很多的系统(如 Lorenz 和 Rössler 系统、Chua 电路等)都满足假设 2.

引理 1 记

$$\tilde{c} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_{ij}^2, \quad \tilde{H}_i(x_i) = \frac{\partial \varphi_i(x_i)}{\partial x_i} h_i(x_i),$$

如果 $g_1(\varphi_i(x_i)) g_1^T(\varphi_i(x_i)) > 0$ (正定), 则一定存在实数 $d > 0$, 使得对任意的 $i = 1, 2, \dots, N$, 满足

$$\left(\mu + \frac{\delta \tilde{c}}{2} \right) I_{n_1} - d g_1(\varphi_i(x_i)) g_1^T(\varphi_i(x_i)) + \frac{\delta N}{2} \tilde{H}_i(x_i) \tilde{H}_i^T(x_i) < 0, \quad (5)$$

其中 I_{n_1} 是 n_1 阶的单位阵.

证明 设 λ_k^g 和 λ_{ik}^H 分别为 $g_1(\varphi_i(x_i)) g_1^T(\varphi_i(x_i))$ 和 $\tilde{H}_i(x_i) \tilde{H}_i^T(x_i)$ 的特征值, $i = 1, 2, \dots, N, k = 1, 2, \dots, n_1$, 则 $\lambda_k^g > 0, \lambda_{ik}^H \geq 0$. 记 $\lambda^g = \min_{1 \leq k \leq n_1} \{\lambda_k^g\}, \lambda^H = \max_{1 \leq i \leq N} \max_{1 \leq k \leq n_1} \{\lambda_{ik}^H\}$, 则有

$$\left(\mu + \frac{\delta \tilde{c}}{2} \right) I_{n_1} - d g_1(\varphi_i(x_i)) g_1^T(\varphi_i(x_i)) + \frac{\delta N}{2} \tilde{H}_i(x_i) \tilde{H}_i^T(x_i) \leq \left(\mu + \frac{\delta \tilde{c}}{2} - d \lambda^g + \frac{\delta N}{2} \lambda^H \right) I_{n_1}. \quad (6)$$

只要取 $d > \frac{\mu}{\lambda^g} + \frac{\delta \tilde{c}}{2 \lambda^g} + \frac{\delta N \lambda^H}{2 \lambda^g}$, 则由式(6)可知式(5)成立. \square

2 分散动态补偿同步控制器的设计

考虑复杂动态网络(1). 本文的控制目标是: 在假设 1 和假设 2 成立的条件下, 设计分散动态补偿控制器, 使复杂动态网络(1)实现渐近同步. 首先基于不变流形给出复杂网络(1)同步的定义.

定义 1 考虑复杂动态网络(1), 令 x_i 为式(1)的解. 如果假设 1 成立, 则 $S = \{x = (x_1^T, \dots, x_N^T)^T \in R^{n_1 + \dots + n_N} | \varphi_i(x_i) = \varphi_j(x_j), i, j = 1, 2, \dots, N\}$ 称为复杂网络(1)的同步流形.

若假设 1 和假设 2 成立, 设计复杂网络(1)的分散动态补偿控制器如下:

$$u_i = \alpha_i(x_i) + \beta_i(x_i)v_i, \tag{7a}$$

$$v_i = \beta_1^{-1}(\varphi_i(x_i))(g_1^T(\varphi_i(x_i))d_i e_i - \alpha_1(\varphi_i(x_i))); \tag{7b}$$

$$\dot{d}_i = -k_i e_i^T g_1(\varphi_i(x_i)) g_1^T(\varphi_i(x_i)) e_i. \tag{8}$$

其中: $s \in R^{n_1}$ 为一孤立节点的状态向量, 且满足 $\dot{s} = f_1(s)$, $e_i = \varphi_i(x_i) - s$ 为同步误差, $0 < k_i \in R, i = 1, 2, \dots, N$.

定理 1 考虑复杂动态网络 (1), 如果假设 1 和假设 2 成立且 $g_1(\varphi_i(x_i))g_1^T(\varphi_i(x_i)) > 0$, 则动态补偿系统 (8) 和分散控制器 (7) 能够保证

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\varphi_i(x_i) - s\| = 0, i = 1, 2, \dots, N, \tag{9}$$

即复杂动态网络 (1) 实现了渐近同步.

证明 由于 C 满足耗散条件, 由假设 1 和控制器 (7) 得复杂动态网络 (1) 的同步误差方程为

$$\begin{aligned} \dot{e}_i &= \frac{\partial \varphi_i(x_i)}{\partial x_i} \dot{x}_i - \dot{s} = \\ & \frac{\partial \varphi_i(x_i)}{\partial x_i} \left[f_i(x_i) + g_i(x_i)\alpha_i(x_i) + g_i(x_i)\beta_i(x_i)v_i + \right. \\ & \left. \delta \sum_{j=1}^N c_{ij} h_i(x_i) \varphi_j(x_j) \right] - \left(f_1(s) + \delta \sum_{j=1}^N c_{ij} \tilde{H}_i(x_i) s \right) = \\ & f_1(\varphi_i(x_i)) + g_1(\varphi_i(x_i))(\alpha_1(\varphi_i(x_i)) + \beta_1(\varphi_i(x_i))v_i) - \\ & f_1(s) + \delta \sum_{j=1}^N c_{ij} \tilde{H}_i(x_i) (\varphi_j(x_j) - s) = \\ & f_1(\varphi_i(x_i)) - f_1(s) + d_i g_1(\varphi_i(x_i)) g_1^T(\varphi_i(x_i)) e_i + \\ & \delta \sum_{j=1}^N c_{ij} \tilde{H}_i(x_i) e_j. \end{aligned} \tag{10}$$

取正定函数 $V = \sum_{i=1}^N \left(\frac{e_i^T e_i}{2} + \frac{(d_i + d)^2}{2k_i} \right)$, 则由假设 2、式 (8) 和 (10) 得

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \sum_{i=1}^N e_i^T \dot{e}_i + \sum_{i=1}^N \frac{(d_i + d)}{k_i} \dot{d}_i \leq \\ & \mu \sum_{i=1}^N e_i^T e_i - d \sum_{i=1}^N e_i^T g_1(\varphi_i(x_i)) g_1^T(\varphi_i(x_i)) e_i + \\ & \delta \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{e_i^T \tilde{H}_i(x_i) \tilde{H}_i^T(x_i) e_i + c_{ij}^2 e_j^T e_j}{2} \leq \\ & \sum_{i=1}^N e_i^T \left[\left(\mu + \frac{\delta \tilde{c}}{2} \right) I_{n_1} - d g_1(\varphi_i(x_i)) g_1^T(\varphi_i(x_i)) + \right. \\ & \left. \frac{\delta N}{2} \tilde{H}_i(x_i) \tilde{H}_i^T(x_i) \right] e_i. \end{aligned} \tag{11}$$

由引理 1 及式 (11) 知 $\dot{V} < 0$. \square

3 数值仿真

考虑下面由混沌 Lü 系统等 10 个节点组成的非线性耦合小世界网络, 网络中各孤立节点动态方程为

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1) = \begin{bmatrix} a(x_{12} - x_{11}) \\ -x_{11}x_{13} + c_1x_{12} \\ x_{11}x_{12} - bx_{13} \end{bmatrix},$$

$$\dot{x}_i = f_i(x_i) = \begin{bmatrix} a(x_{i2} - x_{i1}) + x_{i4} \\ -x_{i1}x_{i3} + c_2x_{i2} \\ x_{i1}x_{i2} - bx_{i3} \\ x_{i1}x_{i3} + dx_{i4} \\ \arctan x_{i5} \\ \vdots \\ \arctan x_{i,i+2} \end{bmatrix}. \tag{12}$$

其中: $a = 36, b = 3, c_1 = 28, c_2 = 20, d = 1, i = 2, 3, \dots, 10$, 孤立节点 s 的状态方程为 $\dot{s} = f_1(s)$. 式 (12) 表明网络中每个孤立节点都是非线性的且彼此维数不同. 容易通过仿真验证上列各孤立节点 (12) 都是不规则振荡的振子.

不失一般性, 网络中其他参量如下:

$$\begin{aligned} g_1(\varphi_i(x_i)) &= I_3 \\ g_i(x_i) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{3 \times n_i}^T, \\ \varphi_i(x_i) &= (x_{i1}, x_{i2}, x_{i3})^T, \\ \alpha_k(x_k) &= (-x_{k4} + a(x_{k1} - x_{k2}), -c_2x_{k2}, bx_{k3})^T, \\ \alpha_1(\varphi_i(x_i)) &= (a(x_{i1} - x_{i2}), -c_1x_{i2}, bx_{i3})^T, \\ \beta_i(x_i) &= \beta_1(\varphi_i(x_i)) = I_3, \\ h_i(x_i) &= \begin{bmatrix} \sin x_{i1} & 0 & 0 \\ 0 & \sin x_{i2} & 0 \\ 0 & 0 & \sin x_{i3} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \sin x_{i,n_i} \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{13}$$

容易验证假设 1 和假设 2 成立, 且 $g_1(\varphi_i(x_i))g_1^T(\varphi_i(x_i)) > 0$. 设由方程 (12) 中的节点按图 1 的方式耦合成小世界网络, 其外部耦合矩阵 $C = (c_{ij})_{N \times N}$, 如果节点 i 与节点 $j (i \neq j)$ 有连接, 则 $c_{ij} = c_{ji} = 1$, 否则 $c_{ij} = 0$. 定义复杂动态网络 (1) 的总同步误差为

$$\|e\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^3 e_{ij}^2}, \tag{14}$$

总同步误差曲线如图 2 所示.

图 2 表明, 通过使用分散动态补偿控制器 (7) 和 (8), 图 1 中具有不同维数非线性节点和非线性耦合的复杂动态网络 (1) 达到了渐近同步, 说明了本文定理 1 的有效性. 值得注意的是, 本例中的网络节点含有对初值极其敏感的混沌节点, 因此, 与文献 [1] 的结

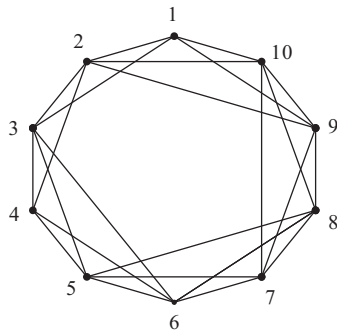


图1 一个小世界复杂网络

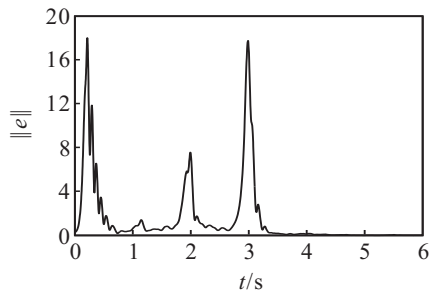


图2 具有方程(12)、(13)的复杂网络(1)的总同步误差曲线
果相比较,这在一定程度上说明了本文给出的同步控制方法具有一般性。

4 结论

本文提出了具有不同维数的非线性相似节点和非线性耦合的复杂动态网络模型,基于不变流形给出了该类网络的同步定义,并在一定假设下,通过设计分散动态补偿控制器实现了该类网络的渐近同步.这对于进一步研究一般形式的复杂动态网络同步具有借鉴意义。

参考文献(References)

- [1] Wang Y H, Fan Y Q, Wang Q Y, et al. Stabilization and synchronization of complex dynamical networks with similar nodes via decentralized controllers[J]. *IEEE Trans on Circuits and Systems-I: Regular Papers*, 2012, 59(8): 1786-1795.
- [2] Hu C, Yu J, Jiang H J, et al. Synchronization of complex community networks with nonidentical nodes and adaptive coupling strength [J]. *Physics Letters A*, 2011, 375(5): 873-879.
- [3] Du H Y. Function projective synchronization in drive-response dynamical networks with non-identical nodes[J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2011, 44(7): 510-514.
- [4] Wu X J, Lu H T. Projective lag synchronization of the general complex dynamical networks with distinct nodes[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2012, 17(11): 4417-4429.
- [5] Song Q, Cao J D, Liu F. Synchronization of complex dynamical networks with nonidentical nodes[J]. *Physics Letters A*, 2010, 374(4): 544-551.
- [6] Lü J H, Chen G R. A time-varying complex dynamical network model and its controlled synchronization criteria[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2005, 50(6): 841-846.
- [7] Liu T, Zhao J, David J H. Synchronization of complex delayed dynamical networks with nonlinearly coupled nodes[J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2009, 40(3): 1506-1519.
- [8] Sun W, Hu T S, Chen Z, et al. Impulsive synchronization of a general nonlinear coupled complex network[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2011, 16(11): 4501-4507.
- [9] Liang Y, Wang X Y. Adaptive synchronization in complex networks through nonlinearly coupling[J]. *Computer Engineering and Applications*, 2012, 48(10): 25-28.
- [10] Wang Z, Huang L H, Wang Y N, et al. Synchronization analysis of networks with both delayed and non-delayed couplings via adaptive pinning control method[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2010, 15(12): 4202-4208.
- [11] Zhou J, Wu Q J, Xiang L, et al. Impulsive synchronization seeking in general complex delayed dynamical networks[J]. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2011, 5(3): 513-524.
- [12] Zhao J, David J H, Liu T. Synchronization of dynamical networks with nonidentical nodes: criteria and control[J]. *IEEE Trans on Circuits and Systems-I: Regular Papers*, 2011, 58(3): 584-594.
- [13] Guo W L, Austin F, Chen S H. Global synchronization of nonlinearly coupled complex networks with non-delayed and delayed coupling[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2010, 15(6): 1631-1639.
- [14] Guo X Y, Li J M. A new synchronization algorithm for delayed complex dynamical networks via adaptive control approach[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2012, 17(11): 4395-4403.
- [15] Duan Z S, Wang J Z, Chen G R, et al. Stability analysis and decentralized control of a class of complex dynamical networks[J]. *Automatica*, 2008, 44(4): 1028-1035.
- [16] Wen S, Chen S, Guo W. Adaptive global synchronization of a general complex dynamical network with non-delayed and delayed coupling[J]. *Physics Letters A*, 2008, 372(42): 6340-6346.
- [17] Wang Y H, Zhang S Y. Robust control for nonlinear similar composite systems with uncertain parameters[J]. *IEE Proc of Control Theory Application*, 2000, 147(1): 80-86.

(责任编辑: 孙艺红)