

基于傅立叶级数的小样本振荡序列灰色预测方法

王正新

(浙江财经大学 经济与国际贸易学院, 杭州 310018)

摘要: 针对现有灰色模型不能适用于小样本振荡序列预测的问题, 提出了基于傅立叶级数的小样本振荡序列灰色预测方法. 首先对原始序列建立 GM(1,1) 幂模型以描述系统行为的总体趋势; 然后利用傅立叶级数提取模型的残差序列所包含的周期性振荡规律, 并以二者之和构成新的时间响应函数; 最后以平均误差最小化为目标, 建立非线性优化模型求解最优参数. 应用实例表明, 该方法能够有效地提高灰色模型对小样本振荡序列的预测精度.

关键词: 灰色系统; 小样本振荡序列; 傅立叶级数; 预测

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Grey forecasting method for small sample oscillating sequences based on Fourier series

WANG Zheng-xin

(School of Economics & International Trade, Zhejiang University of Finance & Economics, Hangzhou 310018, China.
E-mail: jenkin226@163.com)

Abstract: For the problem that the existing grey models are not applicable to forecast small sample oscillating sequences, a grey forecasting method for these sequences based on Fourier series is proposed. Firstly, a GM(1,1) power model of the original sequence is built to describe the behavior of the system overall trend. Then, Fourier series is used to extract of the periodic oscillation law contained in the residual sequence, thus a new time response function is formed by adding the two parts. Finally, the average error is minimized as the goal to establish the nonlinear optimization model for solving the optimal parameters. Numerical simulation and application examples show that simulation and forecasting accuracy are effectively enhanced.

Key words: grey system; small sample oscillating sequence; Fourier series; forecasting

0 引言

小样本振荡序列预测问题是预测科学的难点之一. 基于概率统计理论的时间序列分析是学术界公认的经典方法, 但由于这一类方法以概率分布为出发点研究数据的统计规律, 必然导致建模过程依赖于大样本的原始数据; 而灰色预测^[1]作为预测理论体系一个新的分支, 以其独特的数据处理方式为小样本序列预测提供了一种有效途径, 近年来取得了很多有价值的研究成果^[2-8]. 然而, 灰建模的原理是通过序列生成弱化原始数据的随机不确定性, 并采用微分方程近似地描述序列的变化规律, 这些微分方程的解往往是单调的, 因此, 现有的灰色预测模型一般只能描述和预测系统行为序列变化的大概趋势, 而不能识别原始序列中的振荡特征并进行有效预测.

为了解决灰色模型对振荡序列的预测问题, 邓聚龙教授曾经提出摆动型灰色预测模型 GM(1, 1) $\tan(k - \pi)p, \sin(k - \pi)p$ ^[9], 由于模型中参数取值具有较强的随意性, 极少对该模型进行后续研究和应用. 文献[10]试图通过优化 GM(1,1) 幂模型的幂指数提高模型对小样本振荡序列的预测精度, 但 GM(1,1) 幂模型较为固定的时间响应函数不能适应实际数据的剧烈变化, 因而不具有普适性. 第2种途径是通过数据变换技术将振荡序列转化为单调序列, 然后建立 GM(1,1) 模型, 再将建模结果还原为振荡序列. 在这方面具有代表性的研究有: 沈继红^[11]提出的反三角函数变换, 钱吴永等^[12]提出的加速平移变换等. 第3种途径是对 GM(1,1) 模型的残差进行修正, 这种方法较数据变换技术更为直接, 避免了数

收稿日期: 2012-10-31; 修回日期: 2013-03-20.

基金项目: 国家自然科学基金项目(71101132, 71271086); 中国博士后科学基金项目(2013M540448).

作者简介: 王正新(1981-), 男, 副教授, 博士, 从事小样本时间序列预测、数量经济学的研究.

据变换所附带的还原误差问题. 残差修正的具体方法有 GM(1,1) 法^[2]、正弦函数法^[13]和傅立叶级数法^[14-16]. GM(1,1) 法适用于单调性残差, 正弦函数法适用于周期性残差, 傅立叶级数法则具有较强的降噪功能, 对周期性残差的修正效果好于正弦函数法.

文献 [14-16] 提及的傅立叶级数修正 GM(1,1) 方法将整个建模过程分为 GM(1,1) 和傅立叶级数两个相对独立的部分, 模型的参数估计不是能够使得最终预测误差最小化的最优结果, 从而在很大程度上影响了建模精度. 此外, 笔者前期研究结果表明: GM(1,1) 幂模型对原始数据的适应性强于 GM(1,1) 模型, 它对振荡序列的预测精度高于 GM(1,1) 模型^[10]. 因此, 本文在此基础上, 利用傅立叶级数提取残差序列中的周期性振荡规律, 在预测误差最小化的目标下, 求解模型的最优参数, 以期进一步提高灰色模型对小样本振荡序列的预测精度.

1 振荡序列的定义及灰色预测模型的适用性

定义 1 设 $X = (x(1), x(2), \dots, x(n))$ 为非负系统行为序, 若:

- 1) $\forall k = 2, 3, \dots, n, x(k) - x(k-1) > 0$, 称 X 为单调增长序列;
- 2) $\forall k = 2, 3, \dots, n, x(k) - x(k-1) < 0$, 称 X 为单调递减序列;
- 3) 若存在 $k_1, k_2 \in \{2, 3, \dots, n\}$, 使得不等式 $x(k_1) - x(k_1 - 1) > 0$ 和 $x(k_2) - x(k_2 - 1) > 0$ 同时成立, 则称 X 为振荡序列.

传统的灰色预测模型对单调增长或单调递减序列进行预测具有较高的精度, 而对于振荡序列的建模往往难以取得令人满意的结果.

GM(1,1) 模型的时间响应函数为

$$x^{(1)}(t) = \frac{b}{a} + ce^{at}; \tag{1}$$

灰色 Verhulst 模型的时间响应函数为

$$x^{(1)}(t) = \frac{1}{b/a + ce^{at}}. \tag{2}$$

这两种经典的灰色预测模型分别对应于两类比较特殊的单调曲线, 而 GM(1,1) 幂模型则更加一般化. GM(1,1) 幂模型的时间响应函数为

$$x^{(1)}(t) = \left(\frac{b}{a} + ce^{-(1-\gamma)at} \right)^{\frac{1}{1-\gamma}}. \tag{3}$$

GM(1,1) 幂模型的时间响应函数随着幂指数 γ 取值的变化而变化, 因此, 相对于 GM(1,1) 模型和灰色 Verhulst 模型, 对小样本振荡序列的预测宜采用 GM(1,1) 幂模型. 但是, 由于模型本身的参数结构和时间响应函数的局限, GM(1,1) 幂模型也不能适用于所有振荡序列, 尤其是在原始数据曲线偏离幂指数函数

曲线较大的情况下, 也会出现误差较大的情形, 可见其适用范围是有限的.

2 基于傅立叶级数的小样本振荡序列灰色预测方法

2.1 建立 GM(1,1) 幂模型

设非负振荡序列为 $X^{(0)} = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n))$, 对原始序列 $X^{(0)}$ 作一阶累加, 生成 $X^{(1)} = (x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), \dots, x^{(1)}(n))$, $x^{(1)}(k) = \sum_{i=1}^k x^{(0)}(i)$. $Z^{(1)} = (z^{(1)}(2), z^{(1)}(3), \dots, z^{(1)}(n))$ 为序列 $X^{(1)}$ 邻均值生成序列, 其中 $z^{(1)}(k) = px^{(1)}(k-1) + (1-p)x^{(1)}(k)$, $0 \leq p \leq 1, k = 2, 3, \dots, n$.

定义 2^[10] 设 $x^{(0)}(k), x^{(1)}(k), z^{(1)}(k)$ 如上所述, 称灰色微分方程

$$x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) = b(z^{(1)}(k))^\gamma, \gamma \neq 1 \tag{4}$$

为 GM(1,1) 幂模型.

根据式 (4) 对参数列 $(a, b)^T$ 作最小二乘估计, 展开得参数之间的关系式

$$a = \left(\frac{\sum_{k=2}^n (z^{(1)}(k))^{\gamma+1} \sum_{k=2}^n x^{(0)}(k) (z^{(1)}(k))^{\gamma-1} - \sum_{k=2}^n (z^{(1)}(k))^{2\gamma} \sum_{k=2}^n x^{(0)}(k) z^{(1)}(k)}{\left(\sum_{k=2}^n (z^{(1)}(k))^{2\gamma} \sum_{k=2}^n (z^{(1)}(k))^2 - \left(\sum_{k=2}^n (z^{(1)}(k))^{\gamma+1} \right)^2 \right)} \right), \tag{5}$$

$$b = \left(\frac{\sum_{k=2}^n (z^{(1)}(k))^2 \sum_{k=2}^n x^{(0)}(k) (z^{(1)}(k))^\gamma - \sum_{k=2}^n (z^{(1)}(k))^{\gamma+1} \sum_{k=2}^n x^{(0)}(k) z^{(1)}(k)}{\left(\sum_{k=2}^n (z^{(1)}(k))^{2\gamma} \sum_{k=2}^n (z^{(1)}(k))^2 - \left(\sum_{k=2}^n (z^{(1)}(k))^{\gamma+1} \right)^2 \right)} \right). \tag{6}$$

定义 3^[10] 设参数 a, b 如上所述, 称

$$\frac{dx^{(1)}(t)}{dt} + ax^{(1)}(t) = b(x^{(1)}(t))^\gamma \tag{7}$$

为 GM(1,1) 幂模型白化微分方程.

取初始条件 $\hat{x}^{(1)}(0) = x^{(1)}(1)$, 可得时间响应式

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = \left\{ \frac{b}{a} + \left[(x^{(1)}(1))^{1-\gamma} - \frac{b}{a} \right] e^{-(1-\gamma)ak} \right\}^{\frac{1}{1-\gamma}}. \tag{8}$$

最后对 $\hat{x}^{(1)}(k+1)$ 作一阶累减, 还原

$$\hat{x}^{(0)}(k+1) = \hat{x}^{(1)}(k+1) - \hat{x}^{(1)}(k). \tag{9}$$

2.2 应用傅立叶级数修正 GM(1,1) 幂模型的残差

傅立叶级数是一种特殊的三角级数,任一给定的周期函数都可以用正弦函数和余弦函数构成的无穷级数来表示;因此,傅立叶级数可以描述 GM(1,1) 幂模型的残差中所包含的周期性振荡信息.

设 GM(1,1) 幂模型的残差序列为

$$\varepsilon^{(0)} = (\varepsilon^{(0)}(2), \varepsilon^{(0)}(3), \dots, \varepsilon^{(0)}(n))^T, \quad (10)$$

其中 $\varepsilon^{(0)}(k) = x^{(0)}(k) - \hat{x}^{(0)}(k), k = 2, 3, \dots, n$.

$$\varepsilon^{(0)}(k) = 0.5a_0 + \sum_{i=1}^z \left[a_i \cos\left(\frac{2\pi i}{T}k\right) + b_i \sin\left(\frac{2\pi i}{T}k\right) \right], \quad (11)$$

其中 $k = 2, 3, \dots, n, T = n - 1, z$ 取 $[(n - 1)/2] - 1$ 的整数部分.

将式 (11) 写成矩阵形式,有

$$\varepsilon^{(0)} = PC. \quad (12)$$

其中

$$P = \begin{bmatrix} 0.5 & \cos\left(\frac{4\pi}{T}\right) & \sin\left(\frac{4\pi}{T}\right) & \dots \\ 0.5 & \cos\left(\frac{6\pi}{T}\right) & \sin\left(\frac{6\pi}{T}\right) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ 0.5 & \cos\left(\frac{2n\pi}{T}\right) & \sin\left(\frac{2n\pi}{T}\right) & \dots \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{4z\pi}{T}\right) & \sin\left(\frac{4z\pi}{T}\right) \\ \cos\left(\frac{6z\pi}{T}\right) & \sin\left(\frac{6z\pi}{T}\right) \\ \vdots & \vdots \\ \cos\left(\frac{2nz\pi}{T}\right) & \sin\left(\frac{2nz\pi}{T}\right) \end{bmatrix},$$

$$C = (a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_z, b_z)^T.$$

利用普通最小二乘原理可得参数 C 的计算公式

$$\hat{C} = (P^T P)^{-1} P^T \varepsilon^{(0)}. \quad (13)$$

由此得到参数 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_z, b_1, b_2, \dots, b_z$ 的估计值,将其代入式 (10),有傅立叶级数修正的残差

$$\hat{\varepsilon}^{(0)}(k) = 0.5\hat{a}_0 + \sum_{i=1}^z \left[\hat{a}_i \cos\left(\frac{2\pi i}{T}k\right) + \hat{b}_i \sin\left(\frac{2\pi i}{T}k\right) \right], \quad (14)$$

根据式 (14) 对 GM(1,1) 幂模型的预测结果进行修正,得

$$\hat{x}_F^{(0)}(k) = \hat{x}^{(0)}(k) + \hat{\varepsilon}^{(0)}(k). \quad (15)$$

2.3 求解最优参数

对模型中未知参数 γ 和 p 进行优化可以有效提高预测精度.下面考虑以 GM(1,1) 幂模型和傅立叶级数叠加的最终预测误差的最小化为目标,构建优化模

型.

设原始序列

$$X^{(0)} = (x^{(0)}(2), x^{(0)}(3), \dots, x^{(0)}(n)),$$

相应的预测模型模拟序列为

$$\hat{X}_F^{(0)} = (\hat{x}_F^{(0)}(2), \hat{x}_F^{(0)}(3), \dots, \hat{x}_F^{(0)}(n)),$$

则预测残差序列为

$$\varepsilon_F^{(0)} = (\varepsilon_F^{(0)}(2), \varepsilon_F^{(0)}(3), \dots, \varepsilon_F^{(0)}(n)), \quad (16)$$

其中 $\varepsilon_F^{(0)}(k) = \varepsilon_F^{(0)}(k) - \hat{\varepsilon}_F^{(0)}(k), k = 2, 3, \dots, n$.

相对误差序列

$$\Delta = \left(\left| \frac{\varepsilon_F^{(0)}(2)}{x^{(0)}(2)} \right| \times 100\%, \dots, \left| \frac{\varepsilon_F^{(0)}(n)}{x^{(0)}(n)} \right| \times 100\% \right) = \{\Delta_k\}_2^n, \quad (17)$$

平均相对误差

$$\bar{\Delta} = \frac{1}{n-1} \sum_{k=2}^n \Delta_k. \quad (18)$$

为了求解出最佳的模型参数,本文以平均相对误差最小化为目标,模型中的参数之间的关系为约束条件,构建以下优化模型:

$$\begin{aligned} \min_{\gamma, p} \bar{\Delta} &= \frac{1}{n-1} \sum_{k=2}^n \Delta_k = \\ &= \frac{1}{n-1} \sum_{k=2}^n \left| \frac{x^{(0)}(k) - \hat{x}_F^{(0)}(k)}{x^{(0)}(k)} \right|. \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} y \neq 1, \\ \hat{x}_F^{(0)}(k) = \hat{x}^{(0)} + \hat{\varepsilon}^{(0)}(k), \\ \hat{\varepsilon}^{(0)}(k) = \\ 0.5\hat{a}_0 + \sum_{i=1}^z \left[\hat{a}_i \cos\left(\frac{2\pi i}{T}k\right) + \hat{b}_i \sin\left(\frac{2\pi i}{T}k\right) \right], \\ \hat{x}^{(0)}(k) = \hat{x}^{(1)}(k) - \hat{x}^{(1)}(k-1), \\ \hat{x}^{(1)} = \\ \left\{ \frac{b}{a} + \left[(x^{(0)}(1))^{1-\gamma} - \frac{b}{a} \right] e^{-a(1-\gamma)(k-1)} \right\}^{\frac{1}{1-\gamma}}, \\ (a, b)^T = (B^T B)^{-1} B^T Y, \\ (a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_z, b_z)^T = (P^T P)^{-1} P^T \varepsilon^{(0)}, \\ k = 2, 3, \dots, n. \end{cases} \end{aligned} \quad (19)$$

上述非线性优化模型可以借助相应的运筹学软件或一些智能算法(如遗传算法、粒子群算法等)求解,具体算法不再论述.

由此得到最优参数 p^*, γ^* ,再代入式 (5) 和 (6) 可求得 GM(1,1) 幂模型的参数 a 和 b ,代入式 (13) 可求得傅立叶级数的参数 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_z, b_1, b_2, \dots, b_z$,基于这些参数即可根据式 (8), (9), (14), (15) 计算最终的预测值 $\hat{x}_F^{(0)}(k), k = 2, 3, \dots, n$.

3 应用实例

高技术产业是以技术带动产业发展与经济效益增长的产业, 已经成为推动一个地区乃至国家的经济增长, 提高核心竞争力的关键因素之一. 自 2006 年我国政府把创建创新型国家确立为战略目标以来, 在各种有利政策的促进下, 我国高新技术企业得到了快速的发展. 然而, 受国际金融危机的影响, 在 2006~2011 年间我国高新技术企业的出口创汇额呈现一定程度的非线性波动特征, 如图 1 所示.

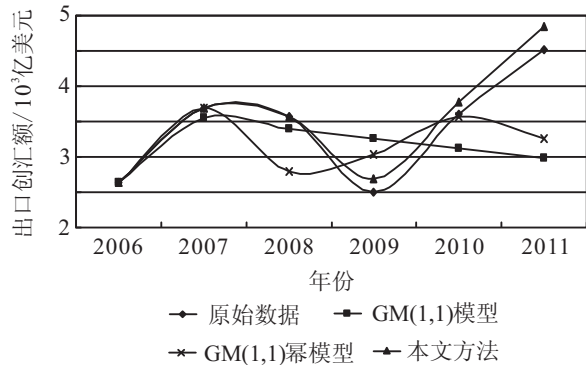


图 1 3 种模型对我国高新技术企业出口创汇额的模拟预测

下面基于 2006~2010 年的数据 (见表 1), 分别建立 GM(1,1) 模型^[2]和 GM(1,1) 幂模型^[10]以及本文提出基于傅立叶级数的灰色预测模型, 对 2006~2010 年我国高新技术企业的出口创汇额进行模拟, 并在此基础上对 2011 年的数据进行预测. 优化结果表明: GM(1,1) 幂模型的幂指数 $\gamma = -0.3275$; 本文方法中的幂指数 $\gamma = 1.946054$, 背景值插值系数 $p = 0.000713$, 傅立叶参数 $a_0 = 853.08$, $a_1 = -1358.68$, $b_1 = -386.05$. GM(1,1) 模型、GM(1,1) 幂模型和本文

方法的时间响应函数分别为: 1) GM(1,1) 模型的时间响应函数

$$\begin{cases} \hat{x}^{(1)}(k+1) = 86732.46 - 84086.46e^{-0.043158k}, \\ \hat{x}^{(0)}(k+1) = \hat{x}^{(1)}(k+1) - \hat{x}^{(1)}(k); \end{cases}$$

2) GM(1,1) 幂模型的时间响应函数

$$\begin{cases} \hat{x}^{(1)}(k+1) = \\ (-839265.57 + 874230.83e^{0.083722k})^{0.753271}, \\ \hat{x}^{(0)}(k+1) = \hat{x}^{(1)}(k+1) - \hat{x}^{(1)}(k); \end{cases}$$

3) 本文方法的时间响应函数

$$\begin{cases} \hat{x}^{(1)}(k+1) = \\ (0.0000744557 + 0.0005037e^{-0.6157468k})^{-1.057022}, \\ \hat{\varepsilon}^{(0)}(k+1) = \\ 426.54 - 1358.677 \cos\left(\frac{\pi}{2}(k+1)\right) - \\ 386.05 \sin\left(\frac{\pi}{2}(k+1)\right), \\ \hat{x}_F^{(0)}(k+1) = \hat{x}^{(1)}(k+1) - \hat{x}^{(1)}(k) + \hat{\varepsilon}^{(0)}(k). \end{cases}$$

根据以上 3 个时间相应函数对我国高新技术企业出口创汇额序列进行模拟和预测结果, 如表 1 所示. 由表 1 可以看出, 应用 GM(1,1) 模型和 GM(1,1) 幂模型进行模拟的平均误差分别为 13.01% 和 11.67%; 而本文方法的平均误差为 0, 精度高达 100%. 在对 2011 年的数据预测方面, GM(1,1) 模型和 GM(1,1) 幂模型的预测误差高达 33.89% 和 27.75%, 本文方法的预测误差仅为 7.29%. 从图 1 也可以看到, 本文方法的模拟和预测效果要显著好于 GM(1,1) 幂模型, 而 GM(1,1) 幂模型的精度高于 GM(1,1) 模型. 可见本文的建模方法在实际应用中仍然可以取得满意的精度.

表 1 3 种模型对中国高新技术企业出口创汇额的模拟预测误差比较

年份	原始数据 / 亿美元	GM(1,1) 模型		GM(1,1) 幂模型		本文的方法	
		预测值	$\Delta_k / \%$	预测值	$\Delta_k / \%$	预测值	$\Delta_k / \%$
2006	2646	2646	0	2646	0	2646	0
2007	3684	3551.80	3.59	3684	0.00	3684	0.00
2008	3564	3401.77	4.55	3301.30	7.37	3564	0.00
2009	2493	3258.08	30.69	3210.20	28.62	2493	0.00
2010	3595	3120.46	13.20	3561.15	10.70	3595	0.00
	$\bar{\Delta} / \%$		13.01		11.67		0.00
2011	4521	2988.65	33.89	3266.28	27.75	4850.55	7.29

4 结 论

小样本振荡序列超越了经典灰色预测模型的应用范围, 其难点在于灰色序列生成难以识别并预测原始序列所包含的振荡特征. 本文结合傅立叶级数和参数优化的思想, 提出了基于傅立叶级数的小样本振荡序列灰色预测方法. 该方法利用傅立叶级数提取残差序列中的周期性振荡规律, 能够有效地提高灰色预测

方法对小样本振荡序列的预测精度.

通过选择恰当的傅立叶级数周期 T , 并将第 1 个时点的建模残差纳入傅立叶级数中, 本文提出的方法或许能够适用于具有季节性增长 (下降) 趋势时间序列的长期预测, 这是需要进一步探讨的问题.

参考文献 (References)

[1] 邓聚龙. 灰预测与灰决策[M]. 武汉: 华中科技大学出版

- 社, 2002.
(Deng J L. Grey prediction and decision[M]. Wuhan: Press of Huazhong University of Science & Technology, 2002.)
- [2] 刘思峰, 党耀国, 方志耕. 灰色系统理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2004.
(Liu S F, Dang Y G, Fang Z G. Grey systems theory and its application[M]. Beijing: Science Press, 2004.)
- [3] 肖新平, 宋中民, 李峰. 灰技术基础及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2005.
(Xiao X P, Song Z M, Li F. Elements and application of grey technology[M]. Beijing: Science Press, 2005.)
- [4] Dang Y G, Liu S F. The GM models that $x(n)$ be taken as initial value[J]. Kybernetes, 2004, 33(2): 247-255.
- [5] Wang Y N, Chen Z J, Gao Z Q, et al. A generalization of the GM(1,1) direct modeling method with a step by step optimizing grey derivative's whiten values and its applications[J]. Kybernetes, 2004, 33(2): 382-389.
- [6] Wei Y, Zhang Y. An essential characteristic of the discrete function transformation to increase the smooth degree of data[J]. The J of Grey System, 2007, 19(3): 293-300.
- [7] Xie N M, Liu S F. Discrete grey forecasting model and its optimization[J]. Applied Mathematical Modelling, 2009, 33(2): 1173-1186.
- [8] 曾波, 刘思峰, 孟伟. 基于核和面积的离散灰数预测模型[J]. 控制与决策, 2011, 26(9): 1421-1424.
(Zeng B, Liu S F, Meng W. Prediction model of discrete grey number based on kernels and areas[J]. Control and Decision, 2011, 26(9): 1421-1424.)
- [9] Deng J L. Undulating grey model(UGM) GM(1, 1| $\tan(k-\pi)p, \sin(k-\pi)p$)[J]. The J of Grey System, 2001, 13(3): 201-205.
- [10] 王正新, 党耀国, 裴玲玲. 基于 GM(1,1) 幂模型的振荡序列建模方法[J]. 系统工程与电子技术, 2011, 33(11): 2440-2444.
(Wang Z X, Dang Y G, Pei L L. Modeling approach for oscillatory sequences based on GM(1,1) power model[J]. Systems Engineering and Electronics, 2011, 33(11): 2440-2444.)
- [11] 沈继红. 灰色系统理论预测方法研究及其在舰艇运动预报中的应用[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学, 2001: 54-59.
(Shen J H. On the grey prediction method and its application in watercraft motion modeling and prediction[D]. Harbin: Harbin Engineering University, 2001: 54-59.)
- [12] 钱吴永, 党耀国. 基于振荡序列的 GM(1, 1) 模型[J]. 系统工程理论与实践, 2009, 29(3): 149-154.
(Qian W Y, Dang Y G. GM(1, 1) model based on oscillation sequences[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2009, 29(3): 149-154.)
- [13] 张双凤, 李雪英, 王成亮. 灰色与周期残差叠加模型在震前兆异常识别中的应用[J]. 华北地震科学, 2004, 22(1): 38-41.
(Zhang S F, Li X Y, Wang C L. The application of grey system and periodical error superposition model in the recognition of seismic anomaly[J]. North China Earthquake Science, 2004, 22(1): 38-41.)
- [14] Hsu L C. Applying the Grey prediction model to the global integrated circuit industry[J]. Technology Forecast Social Change, 2003, 70(3): 563-574.
- [15] Lin Y H, Lee P C. Novel high-precision grey forecasting model[J]. Automation in Construction, 2007, 16(9): 771-777.
- [16] Lin Y H, Chiu C C, Lee P C, et al. Applying fuzzy grey modification model on inflow forecasting[J]. Engineering Applications of Artificial Intelligence, 2012, 25(7): 734-743.

(责任编辑: 孙艺红)