文章编号: 1001-0920 (2014) 03-0517-06 **DOI:** 10.13195/j.kzyjc.2012.1638

具有时延和丢包的NCS鲁棒 H_∞ 控制

刘于之[a,b]，李木国[b]，杜 海[b]

(大连理工大学 a. 电子信息与电气工程学部，b. 海岸与近海工程国家重点实验室，辽宁 大连 116023)

摘 要: 针对一类含有不确定参数的网络控制系统 (NCS), 研究网络中存在时延与丢包情况下的鲁棒 H_∞ 控制问题. 构造一个新的Lyapunov-Krasovskii 泛函, 并基于改进的 Wirtinger 不等式推导出闭环 NCS 渐近稳定且满足 H_∞ 性能的充分条件, 该条件能得到比已有文献保守性更小的结果. 给出线性锥补算法以实现次优鲁棒 H_∞ 控制器增益的求解. 最后通过多个数值实例验证了所提出方法的有效性.

关键词: 网络控制系统；鲁棒 H_∞ 控制；Lyapunov-Krasovskii 泛函；时延；数据包丢失

中图分类号: TP273 **文献标志码:** A

Robust H_∞ control of NCS with delay and packet dropout

LIU Yu-zhi[a,b]，*LI Mu-guo*[b]，*DU Hai*[b]

(a. Faculty of Electronic Information and Electrical Engineering，b. State Key Laboratory of Coastal and Offshore Engineering，Dalian University of Technology，Dalian 116023，China．Correspondent：LIU Yu-zhi，E-mail: liuyuzhi_1@163.com)

Abstract: The robust H_∞ control of a class of uncertain networked control systems with network-induced delay and data packet dropout is studied. A new Lyapunov-Krasovskii functional is proposed, and sufficient conditions for guaranteeing the robust stability and H_∞ performance of the considered system are derived based on an improved version of Wirtinger inequality. The derived conditions can lead to less conservative results than existing corresponding ones. A cone complementary linearisation(CCL) algorithm is given to solve the suboptimal robust H_∞ controller gain. Numerical examples are given to illustrate the effectiveness of the proposed methods.

Key words: networked control system；robust H_∞ control；Lyapunov-Krasovskii functional；time delay；data packet dropout

0 引 言

目前, 网络控制系统 (NCS) 已成为国内外自动控制领域的一个热点研究课题, 一般针对 NCS 的研究可从离散时间模型和连续时间模型两个方向展开. 文献 [1-5] 将 NCS 建模成离散系统, 通过引入伯努利随机过程或马尔可夫链描述网络诱导时延和丢包. 该方法由于考虑了网络时延和丢包的统计规律, 可以获得较为精确的结果, 但实际中需要通过大量实验来获取网络特性统计规律, 实现起来较为困难. 文献 [6-13] 将 NCS 建模为具有输入时滞的连续系统, 利用 Lyapunov 相关理论对系统进行稳定性分析和控制器设计. 该方法将网络诱导时延和丢包的影响建模成控制输入的延时, 通过 Lyapunov 相关理论, 可以获得系统稳定的充分条件, 这些条件进一步可以转化为线性矩阵不等式 (LMI) 的求解. 该方法简便易行, 但增加了控制器设计的保守性, 目前针对此类方法的研究主要集中在如何降低其保守性上. Lyapunov-Krasovskii 泛函的选取和对泛函求导过程中交叉项的处理方法是产生保守性的两个主要来源. 文献 [7] 对形如 $\int_{t-\eta}^{t}\int_{s}^{t}\dot{x}^{\mathrm T}(\theta)R\dot{x}(\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}s$ 的 Lyapunov-Krasovskii 泛函求导, 求导项扩大为 $\eta\dot{x}^{\mathrm T}(t)R\dot{x}(t)-\int_{t-\tau(t)}^{t}\dot{x}^{\mathrm T}(s)R\dot{x}(s)\mathrm{d}s$, 有用项 $-\int_{t-\eta}^{t-\tau(t)}\dot{x}^{\mathrm T}(s)R\dot{x}(s)\mathrm{d}s$ 被忽略, 从而增加了保守性. 文献 [10] 充分利用文献 [7] 中被忽略的求导项, 构造了新的 Lyapunov-Krasovskii 泛函, 在求导过程中对交叉项进行了更紧的界定, 并利用 Jensen 不等式获得了保守性更小的结果. 虽然 Jensen 不等式为研究此类问题提供了一个有效工具, 但其本身带来的保

收稿日期: 2012-11-01；**修回日期:** 2013-03-27.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61202253).

作者简介: 刘于之(1986−), 男, 博士生, 从事网络控制、鲁棒控制的研究；李木国(1953−), 男, 教授, 博士生导师, 从事网络运动控制、图像测量等研究.

守性却难以克服.

本文考虑了一类含有不确定参数被控对象的NCS在同时存在时延和丢包情况下的鲁棒 H_∞ 控制问题. 通过构造新的Lyapunov-Krasovskii泛函, 并利用文献[14]提出的改进Wirtinger积分不等式, 获得了保守性更小的系统稳定且满足 H_∞ 性能控制器存在的充分条件. 在此基础上, 利用线性锥补算法(CCL)实现了次优鲁棒 H_∞ 控制器增益的求解.

1 问题描述

文中使用如下定义和符号: I 为适维单位矩阵, 上标T为矩阵的转置, $*$ 为对称矩阵相应的对称项, diag$\{\cdot\}$ 为对角矩阵, $\upsilon(b,a)=\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b x(s)\mathrm{d}s$.

考虑以下被控对象:

$$\begin{aligned}&\dot{x}(t)=\\&[A+\triangle A(t)]x(t)+[B+\triangle B(t)]u(t)+B_w w(t),\\&x(t_0)=x_0,\ z(t)=Cx(t)+Du(t).\end{aligned}\tag{1}$$

其中: $x(t)\in\boldsymbol{R}^n$ 为系统的状态向量; $u(t)\in\boldsymbol{R}^m$ 为控制输入; $w(k)\in L_2[0,+\infty)$ 为外部扰动输入; $z(t)\in\boldsymbol{R}^q$ 为控制输出; $x(t_0)\in\boldsymbol{R}^n$ 为系统初始状态; A, B, C, D 为适维常数矩阵; $\triangle A(t)$ 和 $\triangle B(t)$ 为反映系统模型中参数不确定性的未知矩阵, 具有以下形式:

$$[\triangle A(t)\ \ \triangle B(t)]=MF(t)[E_a\ \ E_b],\tag{2}$$

$F(t)$ 为满足

$$F(t)^{\mathrm{T}}F(t)\leqslant I\tag{3}$$

的不确定矩阵, M、E_a 和 E_b 为已知的常数矩阵, 它们反映了不确定参数的结构信息。

假设网络存在于传感器与控制器以及控制器与执行器之间, 传感器为时间驱动, 控制器和执行器为事件驱动, 被控对象所有状态可测且数据采用单包传输. 当考虑网络延时与丢包时, 系统可建模为

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=(A+\triangle A)x(t)+(B+\triangle B)u(t)+B_w w(t);\\ z(t)=Cx(t)+Du(t),\ t\in[i_kh+\tau_{i_k}, i_{k+1}h+\tau_{i_{k+1}});\\ u(t^+)=Kx(t-\tau_{i_k}),\ t\in\{i_kh+\tau_{i_k}, k=1,2,\cdots\}.\end{cases}\tag{4}$$

其中: K 为状态反馈增益; h 为采样周期; i_k 为整数且 $\{i_1,i_2,\cdots\}\subset\{1,2,\cdots\}$; τ_{i_k} 为网络诱导时延, 表示数据从传感器采样时刻 i_kh 经由网络传递到执行器端时所消耗的时间. 显然有

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}[i_kh+\tau_{i_k}, i_{k+1}h+\tau_{i_{k+1}})=[t_0,\infty),\ t_0\geqslant 0.$$

假设

$$\begin{aligned}&(i_{k+1}-i_k)h+\tau_{i_{k+1}}\leqslant\eta,\\&0\leqslant\tau_m\leqslant\tau_{i_k},\ k=1,2,\cdots.\end{aligned}\tag{5}$$

定义 $\tau(t)=t-i_kh, t\in[i_kh+\tau_{i_k}, i_{k+1}h+\tau_{i_{k+1}}), k=1,2,\cdots$, 则系统(4)可以描述为

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=\bar{A}x(t)+\bar{B}Kx(t-\tau(t))+B_w w(t);\\ x(t)=\phi(t),\ t\in[t_0-\eta,t_0];\\ z(t)=Cx(t)+DKx(t-\tau(t)).\end{cases}\tag{6}$$

其中

$$\begin{aligned}&\bar{A}=A+DF(t)E_a,\ \bar{B}=DF(t)E_b,\\&\dot{\tau}(t)=1,\ t\neq i_kh+\tau_{i_k}.\end{aligned}$$

注1 在式(4)中, $\{i_1,i_2,\cdots\}$ 为 $\{1,2,\cdots\}$ 的一个子集. 若 $i_{k+1}-i_k=1$, 则表明网络传输过程中没有数据包丢失; 若 $i_{k+1}-i_k>1$, 则表明网络传输中出现数据包丢失现象, 且连续丢包个数为 $i_{k+1}-i_k-1$; 若 $i_{k+1}<i_k$, 则表明网络传输中出现数据包错序现象. 在NCS中对数据包错序常用的处理方法是丢弃过时的数据包, 仅考虑当前最新数据, 因此可以假设 $i_{k+1}>i_k$.

本文将针对系统(6)设计满足如下定义的状态反馈控制律.

定义1 给定常数 $\gamma>0$, 若闭环系统(6)对于所有满足式(3)的不确定性, 有以下指标: 1) 当干扰输入 $w(t)\equiv 0$ 时, 闭环系统渐近稳定; 2) 在零初始条件下, 干扰输入 $w(t)$ 和控制输出 $z(t)$ 满足 H_∞ 范数约束条件 $\|z(t)\|_2\leqslant\gamma\|w(t)\|_2$. 则称系统(6)在 H_∞ 扰动抑制水平 γ 下鲁棒渐近稳定.

为了定理证明需要, 给出如下引理.

引理1[14] 给定正定矩阵 R 和在 $[a,b]$ 上可微向量函数 x, 有以下不等式成立:

$$-\int_a^b\dot{x}^{\mathrm{T}}(s)R\dot{x}(s)\mathrm{d}s\leqslant\frac{1}{b-a}\begin{bmatrix}x(b)\\x(a)\\\upsilon(b,a)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\Omega(R)\begin{bmatrix}x(b)\\x(a)\\\upsilon(b,a)\end{bmatrix}.$$

其中

$$\Omega(R)=\begin{bmatrix}\alpha_1R&\alpha_2R&\alpha_3R\\ *&\alpha_1R&\alpha_3R\\ *&*&\alpha_4R\end{bmatrix},$$

$$\alpha_1=-1-\frac{\pi^2}{4},\ \alpha_2=1-\frac{\pi^2}{4},\ \alpha_3=\frac{\pi^2}{2},\ \alpha_4=-\pi^2.$$

引理2 设 Y, D, F, E 为适当维数的实矩阵, $F(t)$ 满足 $F(t)^{\mathrm{T}}F(t)\leqslant I$, Y 为对称矩阵, 则有

$$Y+DF(t)E+E^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}(t)D^{\mathrm{T}}<0,$$

当且仅当存在一个标量 $\varepsilon>0$, 使得

$$Y+\varepsilon^{-1}E^{\mathrm{T}}E+\varepsilon DD^{\mathrm{T}}<0.$$

2　主要结果

定理 1　对于闭环系统 (6), 给定标量 τ_m, η $(0 \leqslant \tau_m < \eta)$, 若存在对称正定矩阵 $\hat{P}$, $\hat{W}$, $\hat{R}_1$, $\hat{R}_2$, 对称矩阵 $\hat{Z}$, 矩阵 Y, 使得

$$\hat{\Psi} = \begin{bmatrix} \hat{P} & 0 \\ * & \hat{Z} + \hat{W}/\eta \end{bmatrix} > 0, \tag{7}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\Pi}^i & \hat{\Sigma}_{12} \\ * & \hat{\Sigma}_{22} \end{bmatrix} < 0,\ i = 1, 2. \tag{8}$$

其中

$$\hat{\Pi}^i = \begin{bmatrix} \hat{\Phi}^i & \hat{\Gamma}_0^{\mathrm{T}} \\ * & -\gamma^2 I \end{bmatrix},$$

$$\hat{\Sigma}_{12} = [\hat{\Gamma}_1^{\mathrm{T}}\ \ \tau_m \hat{\Gamma}_2^{\mathrm{T}}\ \ \delta \hat{\Gamma}_2^{\mathrm{T}}\ \ \hat{\Gamma}_3^{\mathrm{T}}\ \ \tau_m \hat{\Gamma}_3^{\mathrm{T}}\ \ \delta \hat{\Gamma}_3^{\mathrm{T}}],$$

$$\hat{\Sigma}_{22} = \mathrm{diag}\{-I\ \ -\hat{P}\hat{R}_1^{-1}\hat{P} + \varepsilon_2 M M^{\mathrm{T}}\ \ -\delta \hat{P}\hat{R}_2^{-1}\hat{P} + \varepsilon_3 M M^{\mathrm{T}}\ \ -\varepsilon_1 I\ \ -\varepsilon_2 I\ \ -\varepsilon_3 I\},$$

$$\hat{\Phi}^i =$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\Phi}_{11} & \alpha_2 \hat{R}_1 & \hat{\Phi}_{13} & 0 & \hat{\Phi}_{15}^i & \hat{\Phi}_{16}^i & \hat{\Phi}_{17} \\ * & \hat{\Phi}_{22} & \dfrac{\alpha_2}{\delta}\hat{R}_2 & 0 & 0 & \dfrac{\alpha_3}{\delta}\hat{R}_2 & \alpha_3 \hat{R}_1 \\ * & * & \hat{\Phi}_{33} & \dfrac{\alpha_2}{\delta}\hat{R}_2 & \dfrac{\alpha_3}{\delta}\hat{R}_2 & \dfrac{\alpha_3}{\delta}\hat{R}_2 & 0 \\ * & * & * & \hat{\Phi}_{44} & \hat{\Phi}_{45}^i & \hat{\Phi}_{46}^i & -\tau_m \hat{Z} \\ * & * & * & * & \dfrac{\alpha_4}{\delta}\hat{R}_2 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & \dfrac{\alpha_4}{\delta}\hat{R}_2 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & \alpha_4 \hat{R}_1 \end{bmatrix},$$

$\delta = \eta - \tau_m$, $\hat{\Phi}_{11} = \hat{P}A^{\mathrm{T}} + A\hat{P} + \hat{W} + \alpha_1 \hat{R}_1 + \varepsilon_1 M M^{\mathrm{T}}$,

$\hat{\Phi}_{13} = BY$, $\hat{\Phi}_{15}^1 = \delta \hat{Z}$, $\hat{\Phi}_{15}^2 = 0$, $\hat{\Phi}_{16}^1 = 0$, $\Phi_{16}^2 = \delta \hat{Z}$,

$\hat{\Pi}_{17} = \alpha_3 \hat{R}_1 + \tau_m \hat{Z}$, $\hat{\Phi}_{22} = \alpha_1 \hat{R}_1 + \dfrac{\alpha_1}{\delta}\hat{R}_2$,

$\hat{\Phi}_{33} = \dfrac{2\alpha_1}{\delta}\hat{R}_2$, $\hat{\Phi}_{44} = \dfrac{\alpha_1}{\delta}\hat{R}_2 - \hat{W}$, $\hat{\Phi}_{45}^1 = \dfrac{\alpha_3}{\delta}\hat{R}_2 - \delta \hat{Z}$,

$\hat{\Phi}_{45}^2 = \dfrac{\alpha_3}{\delta}\hat{R}_2$, $\hat{\Phi}_{46}^1 = 0$, $\hat{\Phi}_{46}^2 = -\delta \hat{Z}$,

$\hat{\Gamma}_0 = [B_w^{\mathrm{T}}\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0]$,

$\hat{\Gamma}_1 = [C\hat{P}\ \ 0\ \ DY\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0]$,

$\hat{\Gamma}_2 = [A\hat{P}\ \ 0\ \ BY\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ B_w]$,

$\hat{\Gamma}_3 = [E_a\hat{P}\ \ 0\ \ E_bY\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0]$.

则系统是鲁棒渐近稳定的, 且满足 H_∞ 扰动衰减指标 γ, 其对应的 H_∞ 控制律为 $K = Y\hat{P}^{-1}$.

证明　构造 Lyapunov-Krasovskii 泛函如下:

$$V(t) = V_0(t) + V_1(t) + V_2(t) + V_3(t). \tag{9}$$

其中

$$V_0(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \int_{t-\eta}^{t} x(s)\mathrm{d}s \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \int_{t-\eta}^{t} x(s)\mathrm{d}s \end{bmatrix},$$

$$V_1(t) = \int_{t-\eta}^{t} x^{\mathrm{T}}(s) W x(s)\mathrm{d}s,$$

$$V_2(t) = \tau_m \int_{-\tau_m}^{0}\int_{t+s}^{t} \dot{x}^{\mathrm{T}}(\theta) R_1 \dot{x}(t)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}s,$$

$$V_3(t) = \int_{-\eta}^{-\tau_m}\int_{t+s}^{t} \dot{x}^{\mathrm{T}}(\theta) R_2 \dot{x}(t)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}s.$$

利用 Jensen 不等式可以得到

$$V_0(t) + V_1(t) \geqslant \begin{bmatrix} x(t) \\ \int_{t-\eta}^{t} x(s)\mathrm{d}s \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \Psi \begin{bmatrix} x(t) \\ \int_{t-\eta}^{t} x(s)\mathrm{d}s \end{bmatrix}. \tag{10}$$

其中

$$\Psi = \begin{bmatrix} P & 0 \\ * & Z + W/\eta \end{bmatrix} > 0. \tag{11}$$

由此可以给出泛函 $V(t)$ 正定的一个充分条件为: 矩阵 P, W, R_1, R_2 为对称正定矩阵, Z 为对称矩阵且式 (11) 成立. 运用引理 1, 有以下不等式成立:

$$-\tau_m \int_{t-\tau_m}^{t} \dot{x}^{\mathrm{T}}(s) R_1 \dot{x}(s)\mathrm{d}s \leqslant \xi_1^{\mathrm{T}}(t)\Omega(R_1)\xi_1(t), \tag{12}$$

$$-\int_{t-\eta}^{t-\tau(t)} \dot{x}^{\mathrm{T}}(s) R_2 \dot{x}(s)\mathrm{d}s \leqslant \frac{1}{\delta}\xi_2^{\mathrm{T}}(t)\Omega(R_2)\xi_2(t), \tag{13}$$

$$-\int_{t-\tau(t)}^{t-\tau_m} \dot{x}^{\mathrm{T}}(s) R_2 \dot{x}(s)\mathrm{d}s \leqslant \frac{1}{\delta}\xi_3^{\mathrm{T}}(t)\Omega(R_2)\xi_3(t). \tag{14}$$

其中: $\Omega(R_i)(i = 1, 2)$ 的定义见引理 1, 且有

$\xi_1(t) = [x^{\mathrm{T}}(t)\ \ x^{\mathrm{T}}(t-\tau_m)\ \ \upsilon^{\mathrm{T}}(t, t-\tau_m)]^{\mathrm{T}}$,

$\xi_2(t) = [x^{\mathrm{T}}(t-\tau(t))\ \ x^{\mathrm{T}}(t-\eta)\ \ \upsilon^{\mathrm{T}}(t-\tau(t), t-\eta)]^{\mathrm{T}}$,

$\xi_3(t) = [x^{\mathrm{T}}(t-\tau_m)\ \ x^{\mathrm{T}}(t-\tau(t))\ \ \upsilon^{\mathrm{T}}(t-\tau_m, t-\tau(t))]^{\mathrm{T}}$.

在 $t \in [i_k h + \tau_{i_k}, i_{k+1} h + \tau_{i_{k+1}})$ 上, 对 $V(t)$ 沿系统 (6) 的轨线求导, 结合式 (12) ∼ (14) 并注意到

$$\int_{t-\eta}^{t} x(s)\mathrm{d}s = \int_{t-\eta}^{t-\tau(t)} x(s)\mathrm{d}s + \int_{t-\tau(t)}^{t-\tau_m} x(s)\mathrm{d}s + \int_{t-\tau_m}^{t} x(s)\mathrm{d}s,$$

可得

$$\dot{V}(t) \leqslant \xi^{\mathrm{T}}(t)\Theta\xi(t) - z^{\mathrm{T}}(t)z(t) + \gamma^2 w^{\mathrm{T}}(t)w(t). \tag{15}$$

其中

$$\xi(t) =$$

$$[x^{\mathrm{T}}(t)\ \ x^{\mathrm{T}}(t-\tau_m)\ \ x^{\mathrm{T}}(t-\tau(t))\ \ x^{\mathrm{T}}(t-\eta) \rightarrow$$

$$\leftarrow \upsilon^{\mathrm{T}}(t-\tau(t), t-\eta)\ \ \upsilon^{\mathrm{T}}(t-\tau_m, t-\tau(t)) \rightarrow$$

$$\leftarrow \upsilon^{\mathrm{T}}(t, t-\tau_m)\ \ w^{\mathrm{T}}(t)]^{\mathrm{T}},$$

$$\Theta = \Pi + \tau(t)(\Upsilon_1^{\mathrm{T}} Z \Upsilon_2 + \Upsilon_2^{\mathrm{T}} Z \Upsilon_1) + \tau_m^2 \Gamma^{\mathrm{T}} R_1 \Gamma + \delta \Gamma^{\mathrm{T}} R_2 \Gamma,$$

$$\Pi = \begin{bmatrix} \Phi & \Gamma_0^{\mathrm{T}} \\ * & -\gamma^2 I \end{bmatrix},$$

$\Upsilon_1 = [I\ \ 0\ \ 0\ \ -I\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0]$,

$\Upsilon_2 = [0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ -I\ \ I\ \ 0\ \ 0]$,

$\Gamma = [\bar{A}\ \ 0\ \ \bar{B}K\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ B_w]$,

$\Gamma_0 = [B_w^{\mathrm{T}}P\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0]$,

$$\Phi =$$

$$\begin{bmatrix} \Phi_{11} & \alpha_2 R_1 & \Phi_{13} & 0 & \Phi_{15} & \Phi_{16} & \Phi_{17} \\ * & \Phi_{22} & \frac{\alpha_2}{\delta}R_2 & 0 & 0 & \frac{\alpha_3}{\delta}R_2 & \alpha_3 R_1 \\ * & * & \Phi_{33} & \frac{\alpha_2}{\delta}R_2 & \frac{\alpha_3}{\delta}R_2 & \frac{\alpha_3}{\delta}R_2 & 0 \\ * & * & * & \Phi_{44} & \Phi_{45} & \Phi_{46} & -\tau_m Z \\ * & * & * & * & \frac{\alpha_4}{\delta}R_2 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & \frac{\alpha_4}{\delta}R_2 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & \alpha_4 R_1 \end{bmatrix},$$

$$\Phi_{11} = \bar{A}^{\mathrm{T}}P + P\bar{A} + W + \alpha_1 R_1 + C^{\mathrm{T}}C,$$

$$\Phi_{13} = P\bar{B}K + C^{\mathrm{T}}DK,\ \Phi_{15} = \eta Z,\ \Phi_{16} = -\tau_m Z,$$

$$\Phi_{17} = \alpha_3 R_1 + \tau_m Z,\ \Phi_{22} = \alpha_1 R_1 + \frac{\alpha_1}{\delta}R_2,$$

$$\Phi_{33} = \frac{2\alpha_1}{\delta}R_2 + (DK)^{\mathrm{T}}DK,\ \Phi_{44} = \frac{\alpha_1}{\delta}R_2 - W,$$

$$\Phi_{45} = \frac{\alpha_3}{\delta}R_2 - \eta Z,\ \Phi_{46} = \tau_m Z.$$

由式 (15) 可知, 若 $\Theta < 0$, 则

$$\dot{V}(t) \leqslant -z^{\mathrm{T}}(t)z(t) + \gamma^2 w^{\mathrm{T}}(t)w(t). \tag{16}$$

注意到 Θ 在 $[\tau_m, \eta]$ 上关于 $\tau(t)$ 仿射, 所以若

$$\begin{cases} \Theta_1 = \Pi + \tau_m(\Upsilon_1^{\mathrm{T}}Z\Upsilon_2 + \Upsilon_2^{\mathrm{T}}Z\Upsilon_1) + \\ \qquad \tau_m^2\Gamma^{\mathrm{T}}R_1\Gamma + \delta\Gamma^{\mathrm{T}}R_2\Gamma < 0, \\ \Theta_2 = \Pi + \eta(\Upsilon_1^{\mathrm{T}}Z\Upsilon_2 + \Upsilon_2^{\mathrm{T}}Z\Upsilon_1) + \\ \qquad \tau_m^2\Gamma^{\mathrm{T}}R_1\Gamma + \delta\Gamma^{\mathrm{T}}R_2\Gamma < 0 \end{cases} \tag{17}$$

成立, 则 $\Theta < 0$ 成立. 根据 Schur 补定理和引理 2, 式 (17) 成立当且仅当存在 $\varepsilon_j > 0 (j = 1, 2, 3)$, 使得

$$\begin{bmatrix} \tilde{\Pi}^i & \Sigma_{12} \\ * & \Sigma_{22} \end{bmatrix} < 0,\ i = 1, 2. \tag{18}$$

其中

$$\tilde{\Pi}^i = \begin{bmatrix} \tilde{\Phi}^i & \Gamma_0^{\mathrm{T}} \\ * & -\gamma^2 I \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\Phi}^i =$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{\Phi}_{11} & \alpha_2 R_1 & \tilde{\Phi}_{13} & 0 & \tilde{\Phi}_{15}^i & \tilde{\Phi}_{16}^i & \Phi_{17} \\ * & \Phi_{22} & \frac{\alpha_2}{\delta}R_2 & 0 & 0 & \frac{\alpha_3}{\delta}R_2 & \alpha_3 R_1 \\ * & * & \Phi_{33} & \frac{\alpha_2}{\delta}R_2 & \frac{\alpha_3}{\delta}R_2 & \frac{\alpha_3}{\delta}R_2 & 0 \\ * & * & * & \Phi_{44} & \tilde{\Phi}_{45}^i & \tilde{\Phi}_{46}^i & -\tau_m Z \\ * & * & * & * & \frac{\alpha_4}{\delta}R_2 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & \frac{\alpha_4}{\delta}R_2 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & \alpha_4 R_1 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\Phi}_{11} = A^{\mathrm{T}}P + PA + W + \alpha_1 R_1 + \varepsilon_1 PMM^{\mathrm{T}}P,$$

$$\tilde{\Phi}_{13} = PBK,\ \tilde{\Phi}_{15}^1 = \delta Z,\ \tilde{\Phi}_{15}^2 = 0,\ \tilde{\Phi}_{16}^1 = 0,$$

$$\tilde{\Phi}_{16}^2 = \delta Z,\ \tilde{\Phi}_{45}^1 = \frac{\alpha_3}{\delta}R_2 - \delta Z,\ \tilde{\Phi}_{45}^2 = \frac{\alpha_3}{\delta}R_2,$$

$$\tilde{\Phi}_{46}^1 = 0,\ \tilde{\Phi}_{46}^2 = -\delta Z,$$

$$\Sigma_{12} = [\Gamma_1^{\mathrm{T}}\ \ \tau_m\Gamma_2^{\mathrm{T}}\ \ \delta\Gamma_2^{\mathrm{T}}\ \ \Gamma_3^{\mathrm{T}}\ \ \tau_m\Gamma_3^{\mathrm{T}}\ \ \delta\Gamma_3^{\mathrm{T}}],$$

$$\Sigma_{22} = \mathrm{diag}\{-I\ \ -R_1^{-1} + \varepsilon_2 MM^{\mathrm{T}}\ \ \rightarrow$$

$$\leftarrow -\delta R_2^{-1} + \varepsilon_3 MM^{\mathrm{T}}\ \ -\varepsilon_1 I\ \ -\varepsilon_2 I\ \ -\varepsilon_3 I\},$$

$$\Gamma_1 = [C\ \ 0\ \ DK\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0],$$

$$\Gamma_2 = [A\ \ 0\ \ BK\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ B_w],$$

$$\Gamma_3 = [E_a\ \ 0\ \ E_b K\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0].$$

对不等式 (18) 两边分别左乘和右乘

$$\mathrm{diag}\{\underbrace{P^{-1}\cdots P^{-1}}_{7}\ \ \underbrace{I\cdots I}_{7}\}$$

及其转置, 并定义 $\hat{P} = P^{-1}$, $\hat{W} = \hat{P}W\hat{P}$, $\hat{R}_i = \hat{P}R_i\hat{P}$ $(i = 1, 2)$, $\hat{Z} = \hat{P}Z\hat{P}$, 可得式 (8). 对式 (11) 两边分别左乘和右乘 $\mathrm{diag}\{P^{-1}\ \ P^{-1}\}$ 及其转置, 根据定义可得式 (7).

首先考虑闭环系统 (6) 在 $w(t) \equiv 0$ 时的鲁棒稳定性. 由式 (18) 可以推出

$$\begin{bmatrix} \tilde{\Phi}^i & \tilde{\Sigma}_{12} \\ * & \tilde{\Sigma}_{22} \end{bmatrix} < 0,\ i = 1, 2. \tag{19}$$

其中

$$\tilde{\Sigma}_{12} = [\tau_m\Gamma_2^{\mathrm{T}}R_1\ \ \delta\Gamma_2^{\mathrm{T}}R_2\ \ \Gamma_3^{\mathrm{T}}\ \ \tau_m\Gamma_3^{\mathrm{T}}\ \ \delta\Gamma_3^{\mathrm{T}}],$$

$$\tilde{\Sigma}_{22} = \mathrm{diag}\{-R_1 + \varepsilon_2 MM^{\mathrm{T}}\ \ -\delta R_2 + \varepsilon_3 MM^{\mathrm{T}} \rightarrow$$

$$\leftarrow -\varepsilon_1 I\ \ -\varepsilon_2 I\ \ -\varepsilon_3 I\}.$$

结合式 (15) 和 (19) 可知, 当 $w(t) \equiv 0$ 时, $\dot{V}(t) < 0$, 所以闭环系统 (6) 是鲁棒渐近稳定的.

对式 (16) 两边从 $i_k h + \tau_{i_k}$ 到 $i_{k+1}h + \tau_{i_{k+1}}$ 积分, 并注意到

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}[i_k h + \tau_{i_k}, i_{k+1}h + \tau_{i_{k+1}}) = [t_0, \infty),$$

可得

$$V(\infty) - V(t_0) \leqslant \int_{t_0}^{\infty}(-z^{\mathrm{T}}(s)z(s) + \gamma^2 w^{\mathrm{T}}(s)w(s))\mathrm{d}s. \tag{20}$$

在零初始条件下, 即 $x(t) \equiv 0$, $\forall t \in [t_0 - \eta, t_0]$, 由式 (20) 可知 $\|z(t)\|_2 \leqslant \gamma\|w(t)\|_2$. □

注 2 引理 1 给出了文献 [14] 中的改进 Wirtinger 不等式, 由于额外考虑了信号在时滞区间上的积分项, 利用该不等式能获得比 Jensen 不等式保守性更小的结果. 为了充分利用引理 1, 在构造 Lyapunov-Krasovskii 泛函时加入了积分项 $\int_{t-\eta}^{t}x(s)\mathrm{d}s$ 的显示表达形式.

推论 1 对于闭环系统 (6), 给定标量 τ_m, $\eta (0 \leqslant \tau_m < \eta)$ 和矩阵 K, 若存在对称正定矩阵 P, W, R_1, R_2 和对称矩阵 Z 满足式 (11) 和 (18), 则称系统 (6) 是鲁棒渐近稳定的.

注 3 当给定控制器增益 K, 且不考虑系统参数不确定性时, 式 (11) 和 (18) 为线性矩阵不等式, 可直接通过 Matlab LMI Toolbox 进行求解.

注意到定理 1 中的式 (8) 不是 LMI, 为了求解控制器增益, 需要对其进一步转换. 首先, 假设存在矩阵 L_1, L_2 满足

$$-L_i \geqslant -\hat{P}\hat{R}_i^{-1}\hat{P},\ i=1,2. \tag{21}$$

利用 Schur 补定理, 式 (21) 等价于

$$\begin{bmatrix} -\hat{R}_i^{-1} & -\hat{P}^{-1} \\ * & -L_i^{-1}\end{bmatrix} \leqslant 0,\ i=1,2. \tag{22}$$

引入新的变量 $P_{1N}, R_{1N}, R_{2N}, L_{1N}, L_{2N}$, 式 (22) 可重写为

$$\begin{bmatrix} -R_{1N} & P_N \\ * & -L_{1N}\end{bmatrix} < 0,\ \begin{bmatrix} -R_{2N} & P_N \\ * & -L_{2N}\end{bmatrix} < 0, \tag{23}$$

$$\begin{aligned}&\hat{P}P_N = I,\ \hat{R}_1 R_{1N} = I,\ \hat{R}_2 R_{2N} = I,\\ &L_1 L_{1N} = I,\ L_2 L_{2N} = I.\end{aligned} \tag{24}$$

基于式 (23) 和 (24), 可将定理 1 中的条件转换为如下非线性优化问题:

$$\begin{aligned}&\min\ \mathrm{tr}(\hat{P}P_N + \hat{R}_1 R_{1N} + \hat{R}_2 R_{2N} + \\ &\qquad L_1 L_{1N} + L_2 L_{2N});\end{aligned} \tag{25}$$

s.t. 式 (7), (23);

$$\begin{bmatrix} \hat{\Phi}^i & \hat{\Sigma}_{12} \\ * & \hat{\Sigma}_{22}\end{bmatrix} < 0,\ i=1,2; \tag{26}$$

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix} \hat{P} & I \\ * & P_N\end{bmatrix} \geqslant 0,\ \begin{bmatrix} \hat{R}_1 & I \\ * & R_{1N}\end{bmatrix} \geqslant 0,\\ &\begin{bmatrix} \hat{R}_2 & I \\ * & R_{2N}\end{bmatrix} \geqslant 0,\ \begin{bmatrix} L_1 & I \\ * & L_{1N}\end{bmatrix} \geqslant 0,\\ &\begin{bmatrix} L_2 & I \\ * & L_{2N}\end{bmatrix} \geqslant 0.\end{aligned} \tag{27}$$

其中

$$\begin{aligned}\hat{\Sigma}_{22} = \mathrm{diag}\{&-I\ \ -L_1 + \varepsilon_2 MM^{\mathrm{T}} \rightarrow \\ &\leftarrow -\delta L_2 + \varepsilon_3 MM^{\mathrm{T}}\ \ -\varepsilon_1 I\ \ -\varepsilon_2 I\ \ -\varepsilon_3 I\}.\end{aligned}$$

若上述优化问题的解为 $5n$, 即

$$\begin{aligned}&\min\ \mathrm{tr}(\hat{P}P_N + \hat{R}_1 R_{1N} + \hat{R}_2 R_{2N} + L_1 L_{1N} + \\ &\qquad L_2 L_{2N}) = 5n,\end{aligned}$$

则式 (7), (23), (24) 和 (26) 是可行的. 根据文献 [15] 提出的线性锥补算法, 给出 H_∞ 次优控制器求解算法.

Step 1: 设 $k=0$, 选择一个充分大的初始值 $\gamma_0 > 0$, 使得式 (25) 中的 LMIs 有可行解.

Step 2: 设 $k=1$, $\gamma=\gamma_0$, 寻找满足式 (25) 中 LMIs 的可行解 ($\hat{P}^0$, P_N^0, $\hat{R}_1^0$, R_{1N}^0, $\hat{R}_2^0$, R_{2N}^0, L_1^0, L_{1N}^0, L_2^0, L_{2N}^0).

Step 3: 求解优化问题

$$\begin{aligned}&\min\ \mathrm{tr}(\hat{P}^k P_N + \hat{P}P_N^k + \hat{R}_1^k R_{1N} + \hat{R}_1 R_{1N}^k + \\ &\qquad \hat{R}_2^k R_{2N} + \hat{R}_2 R_{2N}^k + L_1^k L_{1N} + L_1 L_{1N}^k + \\ &\qquad L_2^k L_{2N} + L_2 L_{2N}^k);\end{aligned}$$

s.t. LMIs in 式 (25).

并设

$$\begin{aligned}&\hat{P}^{k+1} = \hat{P},\ P_N^{k+1} = P_N,\ \hat{R}_1^{k+1} = \hat{R}_1,\\ &R_{1N}^{k+1} = R_{1N},\ \hat{R}_2^{k+1} = \hat{R}_2,\ R_{2N}^{k+1} = R_{2N},\\ &L_1^{k+1} = L_1,\ L_{1N}^{k+1} = L_{1N},\\ &L_2^{k+1} = L_2,\ L_{2N}^{k+1} = L_{2N}.\end{aligned}$$

Step 4: 若 Step 3 中所求解满足式 (21), 则减少 γ_0 后返回 Step 2; 若所求解不满足式 (21) 且 $k < k_{\max}$ (最大迭代次数), 则令 $k = k+1$, 转至 Step 3; 否则退出.

Step 5: 输出次优 H_∞ 性能指标 γ 及其对应的控制器增益 $K = Y\hat{P}^{-1}$.

注 4 在数值上获取式 (25) 的最小解 $5n$ 非常困难, 因此选择式 (21) 作为算法终止条件.

3 算例分析

例 1 考虑 NCS 中如下被控对象:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0.1\end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1\end{bmatrix} u(t). \tag{28}$$

设控制器增益为 $K = [-3.75\ \ -11.5]$. 当 $\tau_m = 0$ 时, 通过求解推论 1 中的矩阵不等式 (11) 和 (18), 可得 η 的最大值, 即最大允许传输延迟 (MADB). 由表 1 可见, 推论 1 能得到比文献 [6, 8, 10, 12] 保守性更小的结果. 当 $\eta - \tau_m = 0.3$ 时, 由推论 1 可得 τ_m 的最大值为 0.757 9, 而文献 [6,12] 获得的 τ_m 最大值分别为 0.691 6 和 0.750 1. 进一步考虑系统中存在外部干扰的情形, 式 (28) 可以表示为

$$\begin{aligned}&\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0.1\end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1\end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1\end{bmatrix} w(t),\\ &z(t) = [0\ \ 1]x(t) + 0.1u(t).\end{aligned} \tag{29}$$

表 1 $\tau_m = 0$ 时的 MADB

文献 [6]	文献 [8]	文献 [10]	文献 [12]	推论 1
0.869 5	0.92	1.008 1	1.008 1	1.023 0

表 2 给出了当 $\tau_m = 0$, $\eta = 0.869\,5$ 时的 H_∞ 优化性能指标.

表 2 H_∞ 优化性能指标 $\gamma_{\min}$

文献 [6]	文献 [10]	文献 [12]	推论 1
6.82	1.000 5	1.00	0.836 3

例 2 考虑 NCS 被控对象

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) = &\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 & -0.5 \\ 1 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5\end{bmatrix} + \triangle A(t)\right) x(t) + \\ &[0\ \ 0\ \ 1]^{\mathrm{T}} u(t) + [1\ \ 1\ \ 1]^{\mathrm{T}} w(t),\end{aligned}$$

$$z(t)=[1\ \ 0\ \ 1]x(t)+0.1u(t), \tag{30}$$

其中 $\|\triangle A(t)\|\leqslant 0.01$. 设 $\tau_m=0.1, \eta=0.5$, 利用算法 1 可得

$$\gamma_{\min}=1.59,$$
$$K=[-0.6343\ \ -0.0091\ \ -1.4823].$$

在相同情况下, 文献 [6,10,12] 获得的 $\gamma_{\min}$ 分别为 1.9, 1.62, 1.7. 由此可见, 本文提出的方法比文献 [6,10,12] 中所用的方法保守性更小.

4 结 论

本文研究了具有网络时延和数据丢包的不确定 NCS 的鲁棒 H_∞ 状态反馈控制. 构造了新的 Lyapunov-Krasovskii 泛函, 基于改进的 Wirtinger 不等式获得了系统渐近稳定且满足 H_∞ 性能控制器存在的充分条件, 并给出了鲁棒 H_∞ 控制器设计的优化方法. 数值实例表明所提出的方法具有较小的保守性和良好的有效性.

参考文献(References)

[1] Shousong H, Qixin Z. Stochastic optimal control and analysis of stability of networked control systems with long delay[J]. Automatica, 2003, 39(11): 1877-1884.

[2] Zhang L, Shi Y, Chen T. A new method for stabilization of networked control systems with random delays[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2005, 50(8): 1177-1181.

[3] Shi Y, Yu B. Output feedback stabilization of networked control systems with random delays modeled by Markov chains[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2009, 54(7): 1668-1674.

[4] 谢德晓, 韩笑冬, 黄鹤, 等. 具有时延和丢包的网络控制系统 H_∞ 状态反馈控制[J]. 控制与决策, 2009, 24(4): 587-592.
(Xie D X, Han X D, Huang H, et al. H_∞ state feedback control for networked control systems with time-delay and packet dropout[J]. Control and Decision, 2009, 24(4): 587-592.)

[5] Xu H, Jagannathan S, Lewis F L. Stochastic optimal control of unknown linear networked control system in the presence of random delays and packet losses[J]. Automatica, 2012, 48(6): 1017-1030.

[6] Yue D, Han Q L, Lam J. Network-based robust H_∞ control of systems with uncertainty[J]. Automatica, 2005, 41(6): 999-1007.

[7] Peng C, Yue D. State feedback controller design of networked control systems with parameter uncertainty and state-delay[J]. Asian J of Control, 2006, 8(4): 385-392.

[8] He Y, Wang Q G, Lin C, et al. Delay-range-dependent stability for systems with time-varying delay[J]. Automatica, 2007, 43(2): 371-376.

[9] Peng C. Networked, guaranteed cost control for a class of industrial processes with state delay[J]. Asia-Pacific J of Chemical Engineering, 2007, 2(6): 650-658.

[10] Jiang X F, Han Q L, Liu S R, et al. A new H_∞ stabilization criterion for networked control systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2008, 53(4): 1025-1032.

[11] 郭亚锋, 李少远. 网络控制系统的 H_∞ 状态反馈控制器设计[J]. 控制理论与应用, 2008, 25(3): 414-420.
(Guo Y F, Li S Y. H_∞ state-feedback controller design for networked control systems[J]. Control Theory & Applications, 2008, 25(3): 414-420.)

[12] Zhu X L, Yang G H. Network-based robust H_∞ control of continuous-time systems with uncertainty[J]. Asian J of Control, 2009, 11(1): 21-30.

[13] Liu Y Y, Yang G H. Sampled-data H_∞ control for networked control systems with digital control inputs[J]. Int J of Systems Science, 2012, 43(9): 1728-1740.

[14] Seuret A, Gouaisbaut F. On the use of the wirtinger inequalities for time-delay systems[C]. Proc of the 10th IFAC Workshop on Time Delay Systems. Boston, 2012: 260-265.

[15] Ghaoui L E, Oustry F, Aitrami M. A cone complementarity linearization algorithm for static output-feedback and related problems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1997, 42(8): 1171-1176.

(责任编辑: 郑晓蕾)