

# 一种参数优化的非线性离散系统鲁棒迭代学习控制方法

逢勃, 邵诚

(大连理工大学 先进控制技术研究所, 辽宁 大连 116024)

**摘要:** 针对带有扰动的一类离散非线性系统的鲁棒迭代学习控制问题, 设计一种基于参数优化的迭代学习控制算法. 该算法能够保证在有初始状态误差和状态、输出扰动的情况下使闭环系统具有鲁棒 BIBO 稳定性, 系统输出能够单调收敛于给定输出轨迹的邻域内; 在没有初始状态误差和扰动的情况下能够以零稳态误差跟踪给定输出轨迹. 最后通过仿真分析验证了所提出算法的有效性.

**关键词:** 迭代学习控制; 参数优化; 鲁棒性

中图分类号: TP15

文献标志码: A

## A robust iterative learning control with parameter-optimization for discrete nonlinear systems

PANG Bo, SHAO Cheng

(Research Centre of Advance Control Technology, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China.

Correspondent: PANG Bo, E-mail: pangbo@mail.dlut.edu.cn)

**Abstract:** A robust parameter-optimal iterative learning control algorithm is presented for a class of discrete time nonlinear dynamic system with disturbances. The proposed algorithm has the property of robust BIBO stability of closed loop system, and the system output can monotonously converge to the neighbor domain of desired trajectories in the presence of state, output disturbances and initial uncertainties. In the absence of these disturbances, the system output can converge to desired trajectories with zero steady-state error. Finally, simulation analysis illustrates the effectiveness of the proposed algorithm.

**Key words:** iterative learning control; parameter-optimization; robustness

### 0 引言

与其他典型的智能控制算法相比, 迭代学习控制具有自动获取知识并不断完善操作水平的能力, 能够大幅度改善一些具有重复性操作特性的工业生产过程的跟踪控制性能. 在目前的迭代学习控制研究中, 基于最优化原则的迭代控制律设计已经引起了控制界的关注. 将最优化方法应用到迭代学习控制器的设计中不仅可以提高迭代学习的收敛速度, 还能增强迭代控制算法的跟踪精度. 利用最优化方法得到迭代学习控制律已经在线性系统的目标跟踪问题上取得了一些应用<sup>[1-5]</sup>. 实际工业过程往往是非线性的, 并不可避免地存在各种干扰. 目前, 针对带有扰动的非线性系统最优化迭代学习控制设计的报道还较少. 文献[6]将范数优化迭代学习算法应用到非线性系统的跟踪问题, 并通过遗传算法求解目标函数得到下一次的更新控制信号, 该算法能够以几何速度收敛于零.

文献[7]提出一种自动学习的 PID 非线性控制器, 通过建立群粒子优化算法寻找最优的 PID 参数. 但是, 上述算法并没有考虑系统扰动的情况. 文献[8]讨论了线性不确定性系统的范数优化迭代学习控制问题, 并对算法的鲁棒性和单调收敛性问题进行了分析, 但没有考虑非线性情况.

由于优化算法具有精确跟踪、快速收敛的特点, 将基于最优化原则的迭代学习控制方案应用到带有不确定性的非线性离散系统的跟踪问题是一个新的研究方向. 本文针对带有初始误差、状态和输入扰动的非线性离散系统, 给出带有学习增益 P 型学习律收敛性和鲁棒性的充分条件. 利用最优化原则, 以参数优化为目标对学习增益进行优化, 并与鲁棒性判别式相结合, 设计具有鲁棒性的参数优化迭代控制律, 以保证闭环系统的鲁棒稳定, 且在初始误差和扰动等不确定性存在并有界时, 能够使系统输出收敛到期望输

收稿日期: 2012-11-20; 修回日期: 2013-01-25.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61074020).

作者简介: 逢勃(1981-), 男, 博士生, 从事迭代学习控制的研究; 邵诚(1958-), 男, 教授, 博士生导师, 从事复杂系统建模与优化控制等研究.

出的邻域内,并兼具快速和单调递减的收敛性能.

## 1 离散非线性系统鲁棒迭代学习控制算法

考虑如下具有重复特性并带有扰动不确定性的非线性离散系统:

$$\begin{aligned} x_k(t+1) &= f[x_k(t), u_k(t)] + \omega_k(t), \\ y_k(t) &= h[x_k(t)] + \nu_k(t). \end{aligned} \quad (1)$$

其中:  $k$  为对象的实验(或迭代)次数;  $t(t=0, 1, \dots, N)$  为离散系统的采样时间; 系统在  $k$  次迭代的状态  $x_k(t) \in \mathbf{R}^p$ , 输出  $y_k(t) \in \mathbf{R}^m$ , 输入  $u_k(t) \in \mathbf{R}^r$ ; 状态扰动和输出扰动  $\omega_k(t) \in \mathbf{R}^p$ ,  $\nu_k(t) \in \mathbf{R}^m$ .

非线性离散系统(1)的状态变量  $x_k$ 、输入变量  $u_k$  和输出变量  $y_k$  可以表示为由  $x_k(t)$ ,  $u_k(t)$ ,  $y_k(t)$  组成的  $N$  维“超向量”, 即

$$\begin{aligned} x_k &= [x_k(1), x_k(2), \dots, x_k(N)]^T, \\ u_k &= [u_k(0), u_k(1), \dots, u_k(N-1)]^T, \\ y_k &= [y_k(1), y_k(2), \dots, y_k(N)]^T. \end{aligned}$$

同理, 扰动  $\omega_k$  和  $\nu_k$  可以表示为

$$\begin{aligned} \omega_k &= [\omega_k(1), \omega_k(2), \dots, \omega_k(N)]^T, \\ \nu_k &= [\nu_k(1), \nu_k(2), \dots, \nu_k(N)]^T. \end{aligned}$$

对于系统(1), 其状态方程的非线性函数  $f$  和  $h$  满足如下假设.

**假设 1** 对于任意有界期望输出轨迹  $y_d(t)$  和初始状态  $x_d(0)$ , 存在惟一的有界输入向量  $u_d(t)$  与状态向量  $x_d(t)$  生成  $y_d(t)$ , 即系统(1)在扰动  $\omega_k(t) = 0$  和  $\nu_k(t) = 0$  时有

$$x_d(t+1) = f[x_d(t), u_d(t)], \quad y_d(t) = h[x_d(t)]. \quad (2)$$

其中  $u_d(t)$  在采样区间  $t \in [0, N]$  的任意采样点均有界. 令  $b_{ud} = \sup_{t \in [0, N]} \|u_d(t)\|$ ,  $x_d$ ,  $u_d$  和  $y_d$  有如下“超向量”形式

$$\begin{aligned} x_d &= [x_d(1), x_d(2), \dots, x_d(N)]^T, \\ u_d &= [u_d(0), u_d(1), \dots, u_d(N-1)]^T, \\ y_d &= [y_d(1), y_d(2), \dots, y_d(N)]^T. \end{aligned}$$

**注 1** 假设 1 表明对于被控对象(1)期望输出轨迹是容许的.

**假设 2** 对于所有  $x(t) \in \mathbf{R}^p$ ,  $u(t) \in \mathbf{R}^r$  和  $t \in [0, N]$ , 函数  $f(x)$ ,  $h(x)$  及其偏导数

$$\begin{aligned} f'_x(t) &= \frac{\partial f(x(t), u(t))}{\partial x(t)}, \\ f'_u(t) &= \frac{\partial f(x(t), u(t))}{\partial u(t)}, \quad h'_x(t) = \frac{dh(x(t))}{dx(t)} \end{aligned}$$

一致有界. 设

$$b_{fx} = \sup_{t \in [0, N]} \|f'_x(t)\|, \quad b_{fu} = \sup_{t \in [0, N]} \|f'_u(t)\|,$$

$$b_{hx} = \sup_{t \in [0, N]} \|h'_x(t)\|.$$

**注 2** 假设 2 表明, 本文不要求在迭代控制时初始条件完全准确地重复, 允许有初始的不确定性.

**假设 3** 对于任意  $k > 0$  和  $t \in [0, N]$ , 存在非负实数  $\varepsilon_1$  和  $\varepsilon_2$  使得  $\|\omega_k(t)\| \leq \varepsilon_1$  和  $\|\nu_k(t)\| \leq \varepsilon_2$ , 存在正实数  $\varepsilon_3$  使得  $x_k(0)$  满足  $\|x_d(0) - x_k(0)\| \leq \varepsilon_3$ .

**假设 4** 函数  $h(\cdot)$  对于任意  $x_1(t), x_2(t) \in \mathbf{R}^p$  满足 Lipschitz 条件  $\|h[x_1(t)] - h[x_2(t)]\| \leq l_f \|x_1(t) - x_2(t)\|$ , 其中  $l_f$  为 Lipschitz 常数.

**注 3** 假设 3 和假设 4 表明, 本文考虑的被控对象(1)的非线性影响具有相对有界的性质.

针对式(1)的轨迹跟踪问题, 考虑以下形式的 P 型迭代学习控制算法:

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \Gamma_{k+1}(t)e_k(t+1). \quad (3)$$

其中:  $e_k(t) = y_d(t) - y_k(t)$  为第  $k$  次迭代输出在  $t$  时刻的跟踪误差;  $\Gamma_{k+1}(t) \in \mathbf{R}^{r \times m}$  为时变的学习参数矩阵, 且  $\Gamma_{k+1}(t)$  对于所有的  $t \in [0, N]$  和  $k = 0$  有界, 即存在正实数  $b_L$  使得  $b_L = \sup_{t \in [0, N], k=1, 2, \dots} \|\Gamma_{k+1}(t)\|$ .

本文利用系统反馈信息对  $\Gamma_{k+1}(t)$  进行优化设计, 使得将式(3)应用到非线性离散系统(1)时能够保证闭环系统的收敛性和鲁棒性. 首先给出  $\Gamma_{k+1}(t)$  具有鲁棒性的充分条件.

**定理 1 (BIBO 鲁棒稳定性)** 如果对于任意变量  $x(t) \in \mathbf{R}^p$ ,  $u(t) \in \mathbf{R}^r$ , 学习参数矩阵  $\Gamma_{k+1}(t)$  满足下列不等式:

$$\|I - \Gamma_{k+1}(t)h'_x(t+1)f'_u(t)\| \leq \rho < 1, \quad (4)$$

则对于满足上述假设条件的非线性离散系统(1), 由式(3)给出的迭代学习算法具有 BIBO 鲁棒稳定性. 特别是当状态扰动、初始状态误差和外部噪声为零, 即  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$  时, 系统跟踪误差收敛于零.

为了更方便地证明定理 1, 先定义如下  $\lambda$  范数.

**定义 1 ( $\lambda$  范数)** 定义函数  $q(\cdot)$  的  $\lambda$  范数为

$$\|q(\cdot)\|_\lambda = \sup_{t=0, 1, \dots, N} \{\lambda^T \|q(t)\|\}, \quad 0 < \lambda < 1, \quad (5)$$

其中  $\|\cdot\|$  为定义在  $\mathbf{R}^N$  上的一种范数.

**证明** 将式(3)两边分别减去  $u_d(t)$  可得

$$u_d(t) - u_{k+1}(t) = u_d(t) - u_k(t) - \Gamma_{k+1}(t)e_k(t+1). \quad (6)$$

根据微分中值定理和假设 1, 有

$$\begin{aligned} e_k(t+1) &= h[x_d(t+1)] - h[x_k(t+1)] - \nu_k(t+1) = \\ &= h'_{\tilde{x}_k}(t+1)[x_d(t+1) - x_k(t+1)] - \nu_k(t+1), \end{aligned} \quad (7)$$

其中  $\tilde{x}_k$  为  $x_k$  和  $x_d$  之间的某个取值. 对于所有  $k > 0$ , 令  $\delta u_k(t) = u_d(t) - u_k(t)$ ,  $\delta x_k(t) = x_d(t) - x_k(t)$ . 将式(7)代入(6)可得

$$\delta u_{k+1}(t) = \delta u_k(t) - \Gamma_{k+1}(t)e_k(t+1) =$$

$$\begin{aligned} & \delta u_k(t) - \Gamma_{k+1}(t)h'_{\bar{x}_k}(t+1)[\delta x_k(t+1)] + \\ & \Gamma_{k+1}(t)\nu_k(t+1). \end{aligned} \quad (8)$$

对于  $\delta x_k(t+1)$ , 同样地有

$$\begin{aligned} \delta x_k(t+1) = & f(x_d(t), u_d(t)) - f(x_k(t), u_k(t)) - \omega_k(t) = \\ & f(x_d(t), u_d(t)) - f(x_k(t), u_d(t)) + \\ & f(x_k(t), u_d(t)) - f(x_k(t), u_k(t)) - \omega_k(t) = \\ & f'_{\bar{x}_k}(t)[x_d(t) - x_k(t)] + f'_{\bar{u}_k}(t)[u_d(t) - u_k(t)] - \omega_k(t). \end{aligned} \quad (9)$$

其中:  $\bar{x}_k$  为  $x_k$  和  $x_d$  之间的某个取值,  $\bar{u}_k$  为  $u_k$  和  $u_d$  之间的某个取值. 将式(9)代入(8)可得

$$\begin{aligned} \delta u_{k+1}(t) = & [I - \Gamma_{k+1}(t)h'_{\bar{x}_k}(t+1)f'_{\bar{u}_k}(t)]\delta u_k(t) - \\ & \Gamma_{k+1}(t)h'_{\bar{x}_k}(t+1)f'_{\bar{x}_k}(t)\delta x_k(t) + \\ & \Gamma_{k+1}(t)h'_{\bar{x}_k}(t+1)\omega_k(t) + \Gamma_{k+1}(t)\nu_k(t+1). \end{aligned} \quad (10)$$

对式(10)两边取范数, 并利用假设2、假设3和定义1得到

$$\|\delta u_{k+1}(t)\| \leq \rho \|\delta u_k(t)\| + l \|\delta x_k(t)\| + b. \quad (11)$$

其中:  $b_L b_{hx} \varepsilon_1 + b_L \varepsilon_2 = b$ ,  $b_L b_{hx} b_{fx} = l$ .

对于  $\delta x_k(t)$ , 由式(9)可得

$$\|\delta x_k(t+1)\| \leq b_{fx} \|\delta x_k(t)\| + b_{fu} \|\delta u_k(t)\| + \varepsilon_1. \quad (12)$$

对式(12)进行递推再根据假设3可得

$$\begin{aligned} \|\delta x_k(t)\| \leq & \sum_{j=0}^{t-1} (b_{fx})^{t-1-j} [b_{fu} \|\delta u_k(j)\| + \varepsilon_1] + (b_{fx})^t \varepsilon_3. \end{aligned} \quad (13)$$

将式(13)代入(11)有

$$\begin{aligned} \|\delta u_{k+1}(t)\| \leq & \rho \|\delta u_k(t)\| + b + l (b_{fx})^t \varepsilon_3 + \\ & l \sum_{j=0}^{t-1} (b_{fx})^{t-1-j} [b_{fu} \|\delta u_k(j)\| + \varepsilon_1]. \end{aligned} \quad (14)$$

取  $\lambda^{-1} > \max[1, b_{fx}]$ , 则有  $0 < b_{fx} \lambda < 1$ . 将式(14)的左右两边同时乘以  $\lambda^t$  可得

$$\begin{aligned} \|\delta u_{k+1}(t)\| \lambda^t \leq & \rho \|\delta u_k(t)\| \lambda^t + b \lambda^t + l (\lambda b_{fx})^t \varepsilon_3 + \\ & \lambda \sum_{j=0}^{t-1} (\lambda b_{fx})^{t-1-j} \times [b_{fu} \|\delta u_k(j)\| \lambda^j + \varepsilon_1 \lambda^j]. \end{aligned}$$

由  $0 < \lambda^t < 1$ ,  $0 < (b_{fx} \lambda)^t < 1$  且  $\lambda^i \|u_k(i)\| \leq \|\delta u_k\|_\lambda$  对于任意  $0 \leq i \leq t$  成立的条件, 再参考定义1可得以下不等式:

$$\|\delta u_{k+1}(t)\| \lambda^t \leq \rho \|\delta u_k\|_\lambda + l \varepsilon_3 + b +$$

$$l (\lambda b_{fu} \|\delta u_k\|_\lambda + \lambda \varepsilon_1) \sum_{j=0}^{N-1} (\lambda b_{fx})^{N-1-j},$$

进而有

$$\begin{aligned} \|\delta u_{k+1}\|_\lambda = & \sup_{t=0,1,\dots,N} \{\lambda^t \|\delta u_{k+1}(t)\|\} \leq \\ & \rho \|\delta u_k\|_\lambda + l \varepsilon_3 + b + \\ & l (\lambda b_{fu} \|\delta u_k\|_\lambda + \lambda \varepsilon_1) \sum_{j=0}^{N-1} (\lambda b_{fx})^{N-1-j}. \end{aligned} \quad (15)$$

根据  $0 < b_{fx} \lambda < 1$ , 对式(15)进行求和可得

$$\|\delta u_{k+1}\|_\lambda \leq \left[ \rho + l \lambda b_{fu} \frac{1 - (\lambda b_{fx})^N}{1 - \lambda b_{fx}} \right] \|\delta u_k\|_\lambda + \varepsilon, \quad (16)$$

其中

$$\varepsilon = b + l \varepsilon_3 + l \lambda \varepsilon_1 \frac{1 - (\lambda b_{fx})^N}{1 - \lambda b_{fx}}. \quad (17)$$

由于  $\rho < 1$ , 可以选择足够小的  $\lambda$  值使

$$\rho' = \rho + l \lambda b_{fu} \frac{1 - (\lambda b_{fx})^N}{1 - \lambda b_{fx}} < 1. \quad (18)$$

当  $k$  增加并趋近于无穷大时, 由式(16)可得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup \|\delta u_k\|_\lambda \leq \frac{\varepsilon}{1 - \rho'}. \quad (19)$$

类似地, 根据式(13)有

$$\begin{aligned} \|\delta x_k\|_\lambda \leq & \frac{[1 - (\lambda b_{fx})^N] \lambda b_{fu}}{1 - \lambda b_{fx}} \|\delta u_k\|_\lambda + \frac{[1 - (\lambda b_{fx})^N] \lambda \varepsilon_1}{1 - \lambda b_{fx}} + \varepsilon_3. \end{aligned}$$

将式(19)代入可得

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \sup \|\delta x_k\|_\lambda \leq & \frac{[1 - (\lambda b_{fx})^N] \lambda b_{fu} \varepsilon}{(1 - \lambda b_{fx})(1 - \rho')} + \frac{[1 - (\lambda b_{fx})^N] \lambda \varepsilon_1}{1 - \lambda b_{fx}} + \varepsilon_3. \end{aligned}$$

根据假设4, 第  $k$  次迭代输出  $y_k$  和给定输出  $y_d$  的偏差  $\delta y_k$  满足如下不等式:

$$\|\delta y_k\|_\lambda \leq l_f \|\delta x_k\|_\lambda + \varepsilon_2.$$

同样有

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \sup \|\delta y_k\|_\lambda \leq & \frac{[1 - (\lambda b_{fx})^N] l_f \lambda b_{fu} \varepsilon}{(1 - \lambda b_{fx})(1 - \rho')} + \frac{[1 - (\lambda b_{fx})^N] l_f \lambda \varepsilon_1}{1 - \lambda b_{fx}} + l_f \varepsilon_3 + \varepsilon_2. \end{aligned}$$

因此, 当  $k \rightarrow \infty$  时, 状态变量, 输入变量和输出变量有界, 即系统BIBO稳定. 特别地, 当忽略扰动和初始偏差, 即  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$  时, 有  $\|\delta u_k\|_\lambda \rightarrow 0$ ,  $\|\delta x_k\|_\lambda \rightarrow 0$ ,  $\|\delta y_k\|_\lambda \rightarrow 0 (k \rightarrow \infty)$ .  $\square$

**注4** 定理1建立了迭代学习控制算法的鲁棒稳定性条件. 然而, 仅通过该判定条件很难选择到适当的学习参数矩阵  $\Gamma_{k+1}(t)$ . 为此, 本文在下一节讨论如何进一步通过参数优化方法对学习参数矩阵  $\Gamma_{k+1}(t)$  进行设计, 以改进算法的收敛性能.

**注5** 根据时间序列的关系, 上述分析在采样时

间终止时刻  $t = N$  时不需要对  $u_{k+1}(N)$  进行计算.

## 2 无扰动情况下的参数优化迭代学习控制

根据前面的分析, 满足条件 (4) 的 P 型算法 (3) 能够克服不确定性对非线性离散系统轨迹跟踪问题的影响. 本节先考虑无扰动情况参数迭代优化学习算法的收敛性能.

考虑系统 (1) 的无扰动情况, 即

$$\begin{aligned}\hat{x}_k(t+1) &= f[\hat{x}_k(t), u_k(t)], \\ \hat{y}_k(t) &= h[\hat{x}_k(t)].\end{aligned}\quad (20)$$

初始条件  $\hat{x}_k(0) = x_d(0)$ . 上标  $\hat{x}_k, \hat{y}_k$  表示系统在无扰动情况下的标称状态和输出. 根据式 (20) 递推可得

$$\begin{aligned}\hat{y}_k(1) &= h[\hat{x}_k(1)] = \\ h\{f[\hat{x}_k(0), u_k(0)]\} &= g_1[x_d(0), u_k(0)], \\ \hat{y}_k(2) &= g_2[x_d(0), u_k(0), u_k(1)], \\ &\vdots\end{aligned}$$

$$\hat{y}_k(N) = g_N[x_d(0), u_k(0), u_k(1), \dots, u_k(N-1)].$$

因此, 对于输出  $\hat{y}_k$  有

$$\hat{y}_k = g[x_d(0), u_k], \quad g(\cdot) = [g_1(\cdot), g_2(\cdot), \dots, g_N(\cdot)]^T.$$

为了便于优化求解, 定义特殊形式的学习参数矩阵为

$$\Gamma_{k+1} = \beta_{k+1}W. \quad (21)$$

其中:  $\beta_{k+1}$  为标量,  $W$  为定常矩阵. 根据式 (21) 构造如下形式的 P 型迭代学习控制算法:

$$u_{k+1} = u_k + \beta_{k+1}W\hat{e}_k, \quad (22)$$

其中  $\hat{e}_k = y_d - \hat{y}_k$  为忽略扰动情况下的系统标称误差. 引入参数优化迭代学习算法的目标函数<sup>[9]</sup>

$$\begin{aligned}\beta_{k+1}^* &= \arg \min[J(\beta_{k+1})], \\ J(\beta_{k+1}) &= \|\hat{e}_{k+1}\|^2 + \gamma\beta_{k+1}^2, \quad \lambda > 0,\end{aligned}\quad (23)$$

其中  $\gamma > 0$  为调节参数, 当  $\beta_{k+1}$  优化后可用来保证鲁棒稳定性和收敛性条件 (4). 指标函数 (23) 是为了选择学习参数矩阵  $\Gamma_{k+1}$  使得标称跟随误差和迭代学习控制算法的增益递减, 为了求解上述优化问题, 由系统 (20) 的输入输出关系和微分中值定理有

$$\begin{aligned}\hat{e}_k - \hat{e}_{k+1} &= g(u_{k+1}) - g(u_k) = \\ \tilde{G}_k(u_{k+1} - u_k) &= \tilde{G}_k(\beta_{k+1}W\hat{e}_k),\end{aligned}$$

其中  $\tilde{G}_k$  为  $g$  关于  $u_k$  的 Jacobain 矩阵 ( $\partial g/\partial u$ ) 在  $u_{k+1}(t)$  和  $u_k(t)$  之间的某个取值. 进而有

$$\hat{e}_{k+1} = (I - \beta_{k+1}\tilde{G}_kW)\hat{e}_k. \quad (24)$$

为了给出迭代学习控制算法, 取  $\tilde{G}_k = G_k$  为  $g$  关于  $u_k$  的 Jacobain 矩阵, 则利用极值原理对优化问题 (23) 求解有

$$\beta_{k+1}^* = \frac{\hat{e}_k^T [G_kW + (G_kW)^T] \hat{e}_k}{2(\gamma + \|G_kW\hat{e}_k\|^2)}. \quad (25)$$

得到带有参数优化的迭代学习控制方法

$$u_{k+1} = u_k + \frac{\hat{e}_k^T [G_kW + (G_kW)^T] \hat{e}_k}{2(\gamma + \|G_kW\hat{e}_k\|^2)} W\hat{e}_k. \quad (26)$$

**定理 2 (收敛性)** 在满足定理 1 的条件下, 对于系统 (1) 的无扰动情况, 应用由式 (22) 和 (23) 给出的优化迭代学习控制算法使得闭环系统跟随误差单调递减.

**证明** 用  $\tilde{G}_k$  代替式 (25) 中的  $G_k$ , 得到

$$\beta_{k+1} = \frac{\hat{e}_k^T [\tilde{G}_kW + (\tilde{G}_kW)^T] \hat{e}_k}{2(\gamma + \|\tilde{G}_kW\hat{e}_k\|^2)}. \quad (27)$$

由于  $\beta_{k+1}$  为式 (23) 的非最优解, 由式 (23) 有

$$\begin{aligned}\|\hat{e}_{k+1}\|^2 &\leq \|\hat{e}_{k+1}\|^2 + \gamma\beta_{k+1}^2 = \\ J(\beta_{k+1}^*) &\leq J(\beta_{k+1}).\end{aligned}\quad (28)$$

而由式 (24) 和 (27) 有

$$\begin{aligned}J(\beta_{k+1}) &= \\ \hat{e}_k^T \hat{e}_k - \hat{e}_k^T \beta_{k+1} [\tilde{G}_kW + (\tilde{G}_kW)^T] \hat{e}_k + \\ \beta_{k+1}^2 \|\tilde{G}_kW\hat{e}_k\|^2 + \gamma\beta_{k+1}^2 &= \\ \hat{e}_k^T \hat{e}_k - \frac{[\hat{e}_k^T (\tilde{G}_kW + (\tilde{G}_kW)^T) \hat{e}_k]^2}{4(\gamma + \|\tilde{G}_kW\hat{e}_k\|^2)} &\leq \hat{e}_k^T \hat{e}_k,\end{aligned}$$

$\hat{e}_k$  单调递减有上界, 故收敛.

综合式 (27) 和 (28) 可知, 优化参数学习增益因子

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \beta_{k+1}^* = 0. \quad \square$$

本节在无扰动条件下给出了参数优化学习控制算法, 在扰动可测的情况下也可将算法应用到有扰动的情况. 下一节将对受扰情况下的参数优化迭代学习控制问题进行进一步分析.

## 3 受扰情况下的参数优化迭代学习控制

定理 1 建立了将迭代学习控制算法 (3) 用于非线性系统 (1) 的跟踪问题时, 保证闭环系统鲁棒 BIBO 稳定性的条件. 定理 2 证明了由式 (23) 解出的最优解能够保证闭环系统在初始迭代误差状态和扰动为零的情况下, 跟踪误差单调递减. 本节主要讨论将参数优化方案和鲁棒性判别式应用到带有扰动的非线性系统跟踪问题中, 设计既满足鲁棒性又具有单调递减收敛特性的迭代学习控制算法.

考虑如下的参数优化方案:

$$\begin{aligned}\beta_{k+1}^* &= \arg \min[J(\beta_{k+1})], \\ J(\beta_{k+1}) &= \|e_{k+1}\|^2 + \gamma\beta_{k+1}^2, \quad \lambda > 0.\end{aligned}\quad (29)$$

注意式 (29) 中  $e_{k+1}$  为扰动存在的情况下产生的误差, 重新定义参数优化算法控制更新律

$$u_{k+1} = u_k + \Gamma_{k+1}e_k, \quad \Gamma_{k+1} = \beta_{k+1}^*W. \quad (30)$$

利用与定理2相似的推导过程可知,在扰动可测的情况下,式(29)产生的最优解 $\beta_{k+1}^*$ 可以确保算法(30)单调递减.但由于扰动的存在,其最终收敛结果难以判定,此时可以结合第1节给出的鲁棒性判别式,对式(30)产生的学习参数矩阵分量 $\Gamma_{k+1}(t)$ 提出约束条件(4),使其具有定理1所描述的收敛结果.

具体地,将定理1和定理2相结合,令 $\Gamma_{k+1}$ 由一系列子矩阵 $\Gamma_{k+1}(0), \Gamma_{k+1}(1), \dots, \Gamma_{k+1}(N-1)$ 所组成,根据式(3)和(29)有

$$\begin{bmatrix} u_{k+1}(0) \\ u_{k+1}(1) \\ \vdots \\ u_{k+1}(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_k(0) \\ u_k(1) \\ \vdots \\ u_k(N-1) \end{bmatrix} + \Gamma_{k+1} \begin{bmatrix} e_k(1) \\ e_k(2) \\ \vdots \\ e_k(N) \end{bmatrix}, \quad (31)$$

其中

$$\Gamma_{k+1} = \begin{bmatrix} \Gamma_{k+1}(0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Gamma_{k+1}(1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \Gamma_{k+1}(N-1) \end{bmatrix}. \quad (32)$$

由式(32)可以看出(31)的分量满足

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \Gamma_{k+1}(t)e_k(t+1).$$

由于 $\beta_{k+1}$ 为标量,需要构造与 $\Gamma_{k+1}$ 结构和维数相同的类对角矩阵 $W$ .根据定理1,当且仅当 $\Gamma_{k+1}$ 的子矩阵 $\Gamma_{k+1}(t)(0 \leq t \leq N)$ 全部满足判定式(5)时,算法(30)具有鲁棒性.再根据定理2,当参数优化矩阵 $\Gamma_{k+1} = \beta_{k+1}^* W$ 时,算法(30)具有单调收敛性.另一方面,根据式(27)所示,式(29)中的标量 $\gamma$ 值可以起到调节 $\beta_{k+1}$ 的作用,因此可将 $\gamma$ 和 $\beta_{k+1}$ 同时作为未知参数进行优化.设 $\gamma$ 值随迭代次数而变化,将式(4)和(29)联立建立多目标优化函数得到最优解 $\gamma_{k+1}^*$ 和 $\beta_{k+1}^*$ ,使算法(30)同时满足单调收敛和鲁棒性.具体优化函数如下:

$$\begin{aligned} \beta_{k+1}^* &= \arg \min [J_{k+1}(\beta_{k+1})], \\ \gamma_{k+1}^* &= \arg \min [J_{k+1}(\gamma_{k+1})], \\ J_{k+1}(\beta_{k+1}) &= \|e_{k+1}\|^2 + \gamma_{k+1} \beta_{k+1}^2; \\ \text{s.t. } \Gamma_{k+1} &= \beta_{k+1}^* W, \\ \|I - \Gamma_{k+1}(t)h'_x(t+1)f'_u(t)\| &\leq \rho < 1. \end{aligned} \quad (33)$$

在一些研究中,利用免疫遗传算法解决约束多目标优化问题CMO(constrained multi-objective)已引起了一些关注.如文献[10]基于克隆选择原理提出MISA算法,可以解决非线性的非凸多目标优化问题.

根据式(33),建立受扰非线性系统的参数优化迭代学习算法1,具体步骤如下.

**Step 1:** 设定适当的迭代初值 $u_0$ 和目标跟踪曲线 $y_d$ 、采样周期 $[0, N]$ 、初始状态 $x_0(0)$ 、系统模型函数 $f(\cdot)$ 和 $h(\cdot)$ .

**Step 2:** 重新设置初始状态 $x_k(0)$ ,在扰动 $\omega_k(t)$ 和 $\nu_k(t)$ 存在的情况下运行系统,记录误差和扰动的值.设定适当的 $W$ ,将其代入目标函数(33)中求得 $\beta_{k+1}^*$ ,并进一步得到 $\Gamma_{k+1}$ .根据式(29)计算新的迭代输入向量 $u_{k+1} = u_k + \Gamma_{k+1}e_{k+1}$ .

**Step 3:** 判断 $u_{k+1}$ 产生的跟踪误差,如果小于某一设定的误差容许值,则结束迭代过程,否则转至Step 2继续迭代.

## 4 仿真分析

为了表明所提出参数优化迭代学习算法的性能,本文选取一个带有初始状态误差、内部扰动和输出扰动的非线性离散系统进行分析,即

$$\begin{aligned} x_{1k}(t+1) &= x_{2k}(t) + 0.01\text{rand}_n, \\ x_{2k}(t+1) &= x_{3k}(t) + 0.01\text{rand}_n, \\ x_{3k}(t+1) &= 0.5x_{1k}(t) + [1.5 + \cos x_{1k}(t)]x_{2k}(t) + \\ &\quad (2 + \sin x_{1k}(t))u_k(t), \\ y_k(t) &= x_{3k}(t) + 0.01\text{rand}_n. \end{aligned} \quad (34)$$

其中: $N = 0, 1, \dots, N$ ,  $\text{rand}_n$ 为方差为0,均值为1的随机序列,代表系统的内部扰动和输出扰动.该系统跟踪如下的输出轨迹:

$$y_d(t) = \sin(0.05\pi t).$$

此外,对该系统的初始状态加入随机误差,将其初始状态设置为

$$\begin{aligned} [x_{1k}(0), x_{2k}(0), x_{3k}(0)]^T &= \\ [0.01\text{rand}_n, 0.01\text{rand}_n, 0.01\text{rand}_n]^T. \end{aligned}$$

利用第1节提出的P型迭代学习算法(3)对系统(34)的轨迹跟踪问题进行计算,即

$$u_{k+1}(t) = u_k + \Gamma_{k+1}(t)e_k(t+1).$$

通过对系统(34)的分析可知, $h'_x(t) = [0, 0, 1]$ ,  $f'_u(t) = [0, 0, 2 + \sin x_1(t)]^T$ .根据定理1的鲁棒性判别(4),式(3)的学习因子 $\Gamma_{k+1}(t)$ 应满足

$$\begin{aligned} \|I - \Gamma_{k+1}(t)h'_x(t+1)f'_u(t)\| &= \\ |I - \Gamma_{k+1}(t)(2 + \sin x_1(t))| &< 1. \end{aligned} \quad (35)$$

再由 $\sin x_1(t) \in [-1, 1]$ 可得

$$0 < \|\Gamma_{k+1}(t)\| \leq \frac{2}{3}. \quad (36)$$

为了方便计算,对于任意 $k$ 和 $t$ ,取 $\Gamma_{k+1}(t) = 0.5I$ .初始迭代输入 $u_0 = 0$ ,采样周期 $N = 20$ .首先利用P型迭代学习算法(3)对系统(34)进行仿真,得到如图1所示的迭代跟踪结果.由图1可见,不经优化直接运用鲁棒判别式的P型迭代学习算法(3)能够保证跟踪

误差收敛于大于零的某一区间,并不能保证单调收敛.

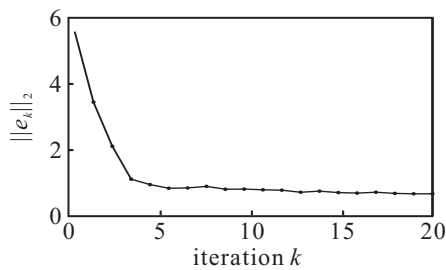


图1 P型鲁棒迭代学习算法收敛结果

利用参数优化迭代算法1对系统(34)进行仿真,此时系统的迭代更新律为  $u_{k+1} = u_k + \Gamma_{k+1}e_k$ . 取  $W = I$ , 根据式(21)有  $\Gamma_{k+1} = \beta_{k+1}^* I$ . 考虑鲁棒约束条件(36), 利用算法1建立参数优化方案, 得到适当的  $\beta_{k+1}^*$ . 迭代跟踪结果和经过优化后的  $\beta_{k+1}^*$  取值如图2和图3所示.

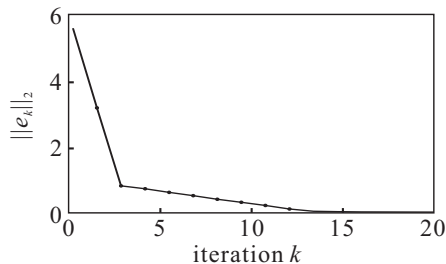


图2 参数优化鲁棒迭代学习算法收敛结果

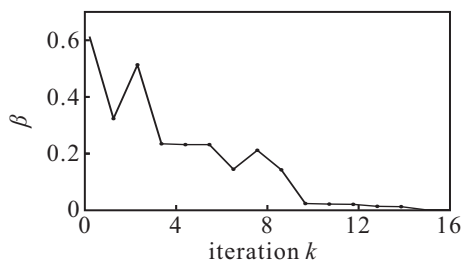


图3 参数优化鲁棒迭代学习算法学习参数

由图2可见, 经过参数优化的P型迭代学习算法在系统具有内部外部扰动和初始状态误差的情况下, 能够单调地收敛于某一大于零的区间. 图3表明, 经过优化的参数  $\beta_{k+1}^*$  能够使学习参数矩阵满足鲁棒性判别式(4), 因此该算法具有单调性和鲁棒性. 与图1所示的未加优化的P型鲁棒算法的收敛结果相比, 该算法具有更好的收敛性能.

将本文提出的参数优化算法应用到受扰情况下的非线性系统时, 需要将每次迭代时状态、输出扰动和初始状态误差的信息作为已知量进行计算. 如果上述信息不可测, 则无法应用参数优化方案得到单调收敛的算法. 此时可直接应用定理1的鲁棒性判别式得到学习增益矩阵的取值范围, 选择恰当的学习增益, 得到不精确的收敛结果.

## 5 结 论

本文针对一类非线性离散系统的跟踪问题, 提出了一种P型迭代学习算法, 并讨论了该算法在初始状态误差和扰动存在的情况下具有鲁棒性的判定条件. 通过建立多目标约束优化目标函数构造控制更新律, 对学习增益矩阵进行参数优化, 使算法兼具鲁棒性和单调收敛性. 算例仿真分析验证了所提出方案的可行性和有效性.

## 参考文献(References)

- [1] Amann N, Owens D H, Rogers E. Iterative learning control for discrete-time systems with exponential rate of convergence[J]. *Control Theory and Application*, 1996, 143(2): 217-224.
- [2] Hladowski L, Galkowski K, Cai Z L, et al. Experimentally supported 2D systems based iterative learning control law design for error convergence and performance[J]. *Control Engineering Practice*, 2010, 18(4): 339-348.
- [3] Xu H W. Optimal iterative learning control for nonlinear discrete-time systems[C]. *Computing, Control and Industrial Engineering(CCIE)*. Wuhan: Conference Publications, 2010: 190-193.
- [4] Chu B, Cai Z, Owens D H, et al. Experimental verification of accelerated norm-optimal iterative learning control[C]. *Int Conf on Control 2010*. Coventry: IEEE Press, 2010: 211-216.
- [5] Togai M, Yamano. Analysis and design of an optimal learning control scheme for industrial robots: A discrete system approach[C]. *Proc of 24th Conf on Decision and Control*. Lauderdale Florida: IEEE Press, 1985: 1399-1404.
- [6] Hatzikos V, Hatonen J, Owens D H. Genetic algorithms in norm-optimal linear and non-linear iterative learning control[J]. *Int J of Control*, 2004, 77(2): 188-197.
- [7] Lin C M, Li M C, Ting A B, et al. A robust self-learning PID control system design for nonlinear systems using a particle swarm optimization algorithm[J]. *Int J of Machine Learning and Cybernetics*, 2011, 2(4): 225-234.
- [8] Jeroen V W, Tijs D, Okko B. Iterative learning control for uncertain systems: Robust monotonic convergence analysis[J]. *Automatica*, 2009, 45(10): 2383-2391.
- [9] Owens D H, Feng K. Parameter optimization in iterative learning control[J]. *Int J of Control*, 2003, 76(11): 1059-1069.
- [10] Shang R H, Ma W P, Zhang W. Immune colony MO algorithm for 0/1 knapsack problems[C]. *Proc of 2nd Int Conf on Natural Computation*. Berlin: Springer-Verlag, 2006: 870-878.