

两种基于个体偏好集结的多属性群决策共识方法

吴志彬¹, 徐雷²

(1. 四川大学 商学院, 成都 610065; 2. 西华大学 经济与贸易学院, 成都 610039)

摘要: 针对多属性群决策中的共识问题, 提出两种使群体达成共识的方法. 假设群体决策的结果以从个体偏好通过集结得到的群体偏好为基础, 在使用算术加权集结算子和几何加权集结算子的条件下, 分别设计相应的共识达成算法, 并对算法的收敛性进行分析. 与已有方法相比, 所提出算法能够体现决策个体的差异和决策个体对群体的影响. 通过某市政图书馆空调系统安装方案的选择表明了所提出方法的合理性和可行性.

关键词: 多属性决策; 共识过程; 集结算子; 群体偏好

中图分类号: C934

文献标志码: A

Two consensus approaches for multiple attribute group decision making based on aggregating individual preferences

WU Zhi-bin¹, XU Lei²

(1. School of Business, Sichuan University, Chengdu 610065, China; 2. School of Economics and Trade, Xihua University, Chengdu 610039, China. Correspondent: WU Zhi-bin, E-mail: zhibinwu@scu.edu.cn)

Abstract: Reaching consensus is a desired goal for any group decision making problem. With respect to the consensus problem in multiple attribute group decision making(MAGDM), two methods are proposed to assist the group in achieving a predefined consensus level. It is assumed that the final solution is made based on the group decision matrix obtained by aggregating individual decision matrix. For the aggregations using weighted arithmetic averaging(WAA) operator and weighted geometric average(WGA) operator, two algorithms are presented to control the consensus process of MAGDM, respectively. The convergence property of the proposed methods is also discussed. The proposed methods show that the difference of the individuals and modification of individual preferences impacts on the group preference. Finally, an example is given to show the application and effectiveness of the proposed methods.

Key words: multiple attribute decision making; consensus process; aggregation operator; group preference

0 引言

日益复杂的社会经济环境使得单个决策者要全面考虑所要解决的问题变得越来越不可行, 运用群体决策方法解决现实中的决策问题势在必行. 多属性群体决策旨在处理这样的决策环境, 该环境中, 有一个由多个专家或决策者(下文统称决策个体)组成的群体, 个体自由表达他们对属性和方案的偏好, 每个决策个体都期望并试图找到一个共同的使群体接受的解决方案. 然而, 决策个体往往来自不同的专业领域, 拥有不尽相同的知识背景和水平, 这使得群中个体拥有不同的决策信息, 同时个体只能部分知晓其他决策个体的目标, 自己的目标偏好等也有可能不被其他决

策个体完全理解. 因为不同的偏好意见常常存在, 所以群体中所有个体的意见都一致的情况相当少见^[1-4]. 群体决策的最终目的是参与决策的个体对方案达成共识, 在这种情况下, 探寻度量群体成员意见共识水平和共识达成过程的理论与方法便成为群决策的研究重点, 共识策略便寄希望于参与群体决策的个体积极参与讨论并推动群体的认知朝共识方向前进.

在多属性群体决策环境下, Xu^[5]探讨了以数值标度表示的多属性群体决策共识问题, 并提出一个能够快速达成群体共识的直接算法. Xu等^[6]提出了多属性群决策问题的离散共识方法, 每次只修改一个或少数几个位置上的元素. Fu等^[7-8]利用证据理论方法

收稿日期: 2012-11-21; 修回日期: 2013-01-28.

基金项目: 国家自然科学基金青年基金项目(71301110); 教育部人文社会科学研究青年基金项目(13XJC630015); 中央高校业务专项四川大学青年教师科研启动基金项目(2012SCU11086).

作者简介: 吴志彬(1982—), 男, 讲师, 博士, 从事群体决策、软词计算的研究; 徐雷(1982—), 男, 讲师, 博士, 从事信息融合、健康管理的研究.

研究了多属性群体决策共识,指出基于所给专家评估意见的一致性度量,通过群体分析和谈判建立共识. Parreiras 等^[9-10]为了实现最大化软共识度指标,提出通过寻找专家权重的优化过程来形成共识. 徐迎军等^[11]定义了新的个体决策矩阵与群体决策矩阵的相似度,并在此基础上建立共识过程. 注意到,文献[7-10]讨论的决策信息并不是以通常的决策矩阵形式给出的.

如果群体决策是以个体决策矩阵集结得到的群体决策矩阵为基础,则文献[5, 11]提出的方法虽然能快速达成共识,但是执行该群体决策过程不会对决策结果产生影响. 本文在已有文献的基础上,进一步研究基于个体偏好集结的群体共识达成方法.

1 问题分析

1.1 问题描述

令 $M = \{1, 2, \dots, m\}$, $N = \{1, 2, \dots, n\}$, $T = \{1, 2, \dots, t\}$. 假定方案集和属性集已知, $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ($n \geq 2$) 为由 n 个潜在方案构成的有限方案集; $C = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$ ($m \geq 2$) 为由 m 个属性或准则构成的有限属性集; $w = (w_1, w_2, \dots, w_m)$ 为属性的权重向量, 满足 $\sum_{j=1}^m w_j = 1$, $w_j \geq 0$, $j \in M$; 一组专家构成决策个体的集合为 $E = \{e_1, e_2, \dots, e_t\}$, $t \geq 2$; 专家的权重向量为 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t)$, 满足 $\lambda_k \in (0, 1)$, $k \in T$, $\sum_{k=1}^t \lambda_k = 1$; $A_k = [a_{ijk}]_{n \times m}$ 为专家 $e_k \in E$ 给出的数值形式的多属性决策矩阵, a_{ijk} 为方案 x_i 在属性 $c_j \in C$ 上的表现值, 即第 k 个专家给出的针对方案 x_i 的偏好信息. 多属性群体决策共识问题即是在已给各专家个体决策矩阵的情况下, 解得符合一定共识水平的群体满意解.

在多属性决策过程中, 不同的属性常常不可公度. 假设 $R_k = [r_{ijk}]_{n \times m}$ 是相应的归一化决策矩阵, 则选取归一化方法为

$$r_{ijk} = \begin{cases} \frac{a_{ijk}}{\max_i(a_{ijk})}, & \text{效益属性;} \\ \frac{\min_i(a_{ijk})}{a_{ijk}}, & \text{成本属性.} \end{cases} \quad (1)$$

其中: $i \in N$, $j \in M$, $k \in T$. 以上归一化方法使得个体偏好 $r_{ijk} \in [0, 1]$.

熟知的群体决策规则有直接方法和间接方法两类. 直接方法表示为 $\{R_1, R_2, \dots, R_t\} \rightarrow \text{解}$, 直接由个体偏好得到群体解(如方案的排序); 间接方法有两种, 分别为

$$\begin{aligned} \{R_1, R_2, \dots, R_t\} &\rightarrow \{P_1, P_2, \dots, P_t\} \rightarrow \text{解}, \\ \{R_1, R_2, \dots, R_t\} &\rightarrow R \rightarrow \text{解}. \end{aligned} \quad (2)$$

第 1 种间接方法由个体偏好 R_i 得到个体对方案的排序 P_i , 然后得到群体解; 第 2 种间接方法先集结个体偏好到群体偏好 R , 然后根据群体偏好作出决策. 现有多属性群决策问题偏爱第 2 种间接方法, 本文采用此决策规则探讨群体共识过程.

在归一化方法后, 利用各种集结算子集结个体偏好为群体偏好. 利用算术加权平均(WAA)算子(也称加型集结)集结个体决策矩阵为群体决策矩阵 $R = [r_{ij}]_{n \times m}$, 有^[5]

$$r_{ij} = \sum_{k=1}^t \lambda_k r_{ijk}, \quad i \in N, j \in M. \quad (3)$$

利用几何加权平均(WGA)算子(也称乘型集结)集结个体决策矩阵为群体决策矩阵 $R = [r_{ij}]_{n \times m}$, 有^[11]

$$r_{ij} = \prod_{k=1}^t r_{ijk}^{\lambda_k}, \quad i \in N, j \in M. \quad (4)$$

在共识决策中, 初始时个体偏好之间可能分歧较大, 因此需要通过共识过程为专家修改其偏好提供参考. 在给定的共识度量下, 如果群体达到了预定的共识水平, 则共识过程结束. 对群体决策矩阵实施选择过程, 得到各方案的最终综合评价. 共识后的群体决策矩阵仍记为 $R = [r_{ij}]_{n \times m}$, 再一次利用加权平均算子计算各方案的综合评价

$$Z_i = \sum_{j=1}^m w_j r_{ij}, \quad i \in N. \quad (5)$$

根据综合评价的大小可对方案进行排序和择优.

1.2 已有方法

文献[5]提出了在加型集结意义下的共识方法. 记第 $h+1$ 步中的个体决策矩阵和群体决策矩阵分别为

$$R_k^{(h+1)} = (r_{ijk}^{(h+1)})_{n \times m}, \quad R^{(h+1)} = (r_{ij}^{(h+1)})_{n \times m}.$$

该方法提出在第 $h+1$ 步采用以下方法同时修正每个专家的决策矩阵:

$$\begin{aligned} r_{ijk}^{(h+1)} &= \eta r_{ijk}^{(h)} + (1 - \eta) r_{ij}^{(h)}, \quad i \in N, j \in M, k \in T; \\ r_{ij}^{(h+1)} &= \sum_{k=1}^t \lambda_k r_{ijk}^{(h+1)}, \quad i \in N, j \in M. \end{aligned}$$

在所给群决策规则(第 2 种间接方法)中, 采用最终的群体决策矩阵作出选择. 如果所给算法运行 h 次后终止, 则最后的解方案完全依赖于群体决策矩阵 $R^{(h)} = [r_{ij}^{(h)}]_{n \times m}$. 注意到, 在执行所给算法后, 最终的群体决策矩阵与初始的群体决策矩阵完全相同^[6], 即可以证明 $r_{ij}^{(h+1)} = r_{ij}^{(h)}$.

文献[11]同样提出了一种全局修改方法, 采用乘型加权集结算子集结个体决策矩阵为群体决策矩阵. 在其所给共识度量下, 当个体决策矩阵不满足预定的共识一致性水平时, 采用如下方法对个体偏好进行修

正:

$$r_{ijk}^{(h+1)} = (r_{ijk}^{(h)})^\eta (r_{ij}^{(h)})^{1-\eta}, i \in M, j \in N, k \in T;$$

$$r_{ij}^{(h+1)} = \prod_{k=1}^t (r_{ijk}^{(h+1)})^{\lambda_k}, i \in N, j \in M.$$

此修改与文献[5]一样, 共识过程虽然对个体偏好进行了修改, 但对最终的群体决策矩阵不产生任何影响. 事实上, 有

$$\begin{aligned} r_{ij}^{(h+1)} &= \prod_{k=1}^t (r_{ijk}^{(h+1)})^{\lambda_k} = \\ &= \prod_{k=1}^t [(r_{ijk}^{(h)})^\eta (r_{ij}^{(h)})^{1-\eta}]^{\lambda_k} = \\ &= \prod_{k=1}^t [(r_{ijk}^{(h)})^\eta]^{\lambda_k} \prod_{k=1}^t [(r_{ij}^{(h)})^{1-\eta}]^{\lambda_k} = \\ &= (r_{ij}^{(h)})^\eta (r_{ij}^{(h)})^{1-\eta} = r_{ij}^{(h)}. \end{aligned}$$

即文献[5]与文献[11]中的方法虽然能够快速达到共识一致性, 但是在以群体决策矩阵为依据作决策的决策规则下, 是否进行共识过程对决策结果无影响.

上述方法能够使群体快速达成共识. 但是, 群体决策中存在这样的情形, 决策个体期望他们的偏好能够对群体偏好产生一定的影响, 同时也期望在给定的决策机制下, 集结得到的群体偏好能反映出这种影响. 从这种观点和意义上看, 发掘新的适合此类决策情形的方法具有重要的理论意义和现实需求. 以上两种方法不能对群体决策矩阵施加影响的原因在于一次修改所有专家的偏好, 并且采用了完全相同的修改策略, 所以采用更加灵活的策略将能达到预期的群体决策效果. 如采用如下策略: 每一轮不是修改所有个体的偏好信息(决策矩阵), 或者针对不同的个体采用不同的修改策略, 或者每一轮只修正决策矩阵中个别位置上的元素, 则能反映出决策个体的差异和决策个体对群体的影响. 不同的共识度量、不同的修正策略构成了不同的共识决策过程.

2 基于加型集结的共识方法

共识一致性度量是评价个体偏好意见与群体偏好意见之间一致程度的有用工具. 为了定义多属性群决策中的共识程度, 引入个体决策矩阵与群体决策矩阵之间的相似度概念.

定义1 令 $R_k = [r_{ijk}]_{n \times m}$, $k \in T$ 为第 k 个专家所给偏好构成的个体决策矩阵, $R = [r_{ij}]_{n \times m}$ 为由 WAA 算子(式(3))集结得到的群体决策矩阵, 则个体偏好 R_k 与群体偏好 R 之间的相似度定义为^[5]

$$S_1(R_k, R) = \frac{1}{nm} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |r_{ijk} - r_{ij}|. \quad (6)$$

定义2 令 $R_k = [r_{ijk}]_{n \times m}$, $k \in T$ 和 $R = [r_{ij}]_{n \times m}$

分别为第 k 个个体决策矩阵和群体决策矩阵, 定义个体 R_k 的共识一致性指标为

$$GCI(R_k) = 1 - S_1(R_k, R). \quad (7)$$

如果 $GCI(R_k) \geq \overline{GCI}$, 则称 R_k 具有可接受的共识一致性水平, 其中 $\overline{GCI} = \alpha$ 为预先设定的可接受的共识度阈值.

如果每个决策个体给出的决策矩阵均满足式(7), 则称群体达到了满意的共识水平. 为了达到预定的共识水平, 设计如下算法.

算法1 基于 WAA 的共识达成过程.

输入: 由初始偏好形成的个体决策矩阵 $R_k = [r_{ijk}]_{n \times m}$ ($k \in T$)、最大的交互迭代次数 h_{\max} 和共识水平阈值 α ;

输出: 修正后的个体决策矩阵 $R_k^{\text{new}} = [r_{ijk}^{\text{new}}]_{n \times m}$ ($k \in T$) 和迭代次数 h .

Step 1: 利用式(3)计算初始群体决策矩阵 $R = [r_{ij}]_{n \times m}$. 令 $h = 0$, $R^{(0)} = R$, $R_k^{(0)} = R_k$, $k \in T$.

Step 2: 利用

$$GCI(R_k^{(h)}) = 1 - \frac{1}{nm} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |r_{ijk}^{(h)} - r_{ij}^{(h)}|, k \in T$$

计算个体决策矩阵 $R_k^{(h)}$ 的共识一致性指标.

Step 3: 对于任意 $k \in T$, 若 $GCI(R_k^{(h)}) \geq \alpha$ ($k \in T$), 或 $h > h_{\max}$, 则转至 Step 5, 否则转至 Step 4.

Step 4: 假设

$$GCI(R_\tau^{(h)}) = \min_k \{GCI(R_k^{(h)})\}.$$

令 $R_k^{(h+1)} = (r_{ijk}^{(h+1)})_{n \times m}$, 其中

$$r_{ijk}^{(h+1)} = \begin{cases} \gamma r_{ijk}^{(h)} + (1 - \gamma) r_{ij}^{(h)}, & k = \tau; \\ r_{ijk}^{(h)}, & k \neq \tau. \end{cases} \quad (8)$$

设置 $h = h + 1$, 转至 Step 2.

Step 5: 输出 h , $R_k^{(h)}$ ($k \in T$).

算法1是一种迭代过程, 能改进群体决策中决策个体的共识水平, 当个体 k 实施改进策略后, 将获得更好的共识一致性指标.

定理1 令 $R_k = [r_{ijk}]_{n \times m}$ ($k \in T$) 为 t 个个体决策矩阵, $\{R_k^{(h)}\}$ 和 $\{R^{(h)}\}$ 分别为算法1生成的矩阵序列. 在第 $h + 1$ 轮算法执行中, 假设第 k 个决策个体具有最小的共识一致性指标, 则有

$$GCI(R_k^{(h+1)}) > GCI(R_k^{(h)}). \quad (9)$$

证明 根据算法1的修正策略, 有

$$R_k^{(h+1)} = (r_{ijk}^{(h+1)})_{n \times m},$$

其中

$$r_{ijk}^{(h+1)} = \gamma r_{ijk}^{(h)} + (1 - \gamma) r_{ij}^{(h)}. \quad (10)$$

进一步有

$$\begin{aligned} r_{ij}^{(h)} - r_{ij}^{(h+1)} &= \\ \sum_{l=1}^t \lambda_l r_{ijl}^{(h)} - \sum_{l=1}^t \lambda_l r_{ijl}^{(h+1)} &= \lambda_k (r_{ijk}^{(h)} - r_{ijk}^{(h+1)}) = \\ \lambda_k (r_{ijk}^{(h)} - (\gamma r_{ijk}^{(h)} + (1-\gamma)r_{ij}^{(h)})) &= \\ \lambda_k (1-\gamma)(r_{ijk}^{(h)} - r_{ij}^{(h)}) &. \end{aligned} \quad (11)$$

从而有

$$\begin{aligned} |r_{ijk}^{(h+1)} - r_{ij}^{(h+1)}| &= \\ |\gamma r_{ijk}^{(h)} + (1-\gamma)r_{ij}^{(h)} - r_{ij}^{(h+1)}| &= \\ |\gamma(r_{ijk}^{(h)} - r_{ij}^{(h)}) + (r_{ij}^{(h)} - r_{ij}^{(h+1)})| &= \\ |\gamma(r_{ijk}^{(h)} - r_{ij}^{(h)}) + \lambda_k(1-\gamma)(r_{ijk}^{(h)} - r_{ij}^{(h)})| &= \\ |(\gamma + \lambda_k(1-\gamma))(r_{ijk}^{(h)} - r_{ij}^{(h)})| &< |r_{ijk}^{(h)} - r_{ij}^{(h)}|, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{nm} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |r_{ijk}^{(h+1)} - r_{ij}^{(h+1)}| &< \\ \frac{1}{nm} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |r_{ijk}^{(h)} - r_{ij}^{(h)}|. \end{aligned} \quad (13)$$

即

$$S_1(R_k^{(h+1)}, R^{(h+1)}) < S_1(R_k^{(h)}, R^{(h)}). \quad (14)$$

进而有

$$\text{GCI}(R_k^{(h+1)}) > \text{GCI}(R_k^{(h)}). \quad (15)$$

由此定理 1 得证. \square

由于偏离群体偏好最大的专家修改了其个体偏好, 其他未修改偏好的专家的共识一致性水平会改变, 但是由于个体的共识一致性指标与个体偏好的连续性改变关系, 每一轮修正过后群体的共识一致性水平有所改善, 算法 1 的执行将使决策群体朝共识达成的方向发展.

3 基于乘型集结的共识方法

定义 3 令 $R_k = [r_{ijk}]_{n \times m} (k \in T)$ 为第 k 个专家所给偏好构成的个体决策矩阵, $R = [r_{ij}]_{n \times m}$ 为由 WGA 算子(式(4))集结得到的群体决策矩阵, 则个体偏好 R_k 与群体偏好 R 的相似度定义^[11]为

$$S_2(R_k, R) = \left(\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m \frac{\max(r_{ijk}, r_{ij})}{\min(r_{ijk}, r_{ij})} \right)^{\frac{1}{nm}}. \quad (16)$$

定义 4 令 $R_k = [r_{ijk}]_{n \times m} (k \in T)$, $R = [r_{ij}]_{n \times m}$ 分别为第 k 个个体决策矩阵和群体决策矩阵, 定义个体 R_k 的共识一致性指标为

$$\text{GCI}(R_k) = \frac{1}{S_2(R_k, R)}. \quad (17)$$

如果 $\text{GCI}(R_k) \geq \overline{\text{GCI}}$, 则称个体 R_k 具有可接受的共识一致性水平, 其中 $\overline{\text{GCI}} = \alpha$ 为预先设定的可接受的共识度阈值.

如果每个决策个体给出的决策矩阵均满足表达

式(17), 则称群体达到了满意的共识水平. 为了达到预定的共识水平, 设计如下算法.

算法 2 基于 WGA 的共识达成过程.

输入输出同算法 1.

Step 1: 利用式(4)计算初始群体决策矩阵 $R = [r_{ij}]_{n \times m}$. 令 $h = 0$, $R^{(0)} = R$, $R_k^{(0)} = R_k$, $k \in T$.

Step 2: 利用

$$\text{GCI}(R_k^{(h)}) = \frac{1}{\left(\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m \frac{\max(r_{ijk}^{(h)}, r_{ij}^{(h)})}{\min(r_{ijk}^{(h)}, r_{ij}^{(h)})} \right)^{\frac{1}{nm}}}, \quad k \in T$$

计算个体决策矩阵 $R_k^{(h)}$ 的共识一致性指标.

Step 3: 对于任意 $k \in T$, 若 $\text{GCI}(R_k^{(h)}) \geq \alpha(k \in T)$, 或 $h > h_{\max}$, 则转至 **Step 5**, 否则转至 **Step 4**.

Step 4: 假设 $\text{GCI}(R_\tau^{(h)}) = \min\{\text{GCI}(R_k^{(h)})\}$. 令 $R_k^{(h+1)} = (r_{ijk}^{(h+1)})_{n \times m}$, 其中

$$r_{ijk}^{(h+1)} = \begin{cases} (r_{ijk}^{(h)})^\gamma (r_{ij}^{(h)})^{(1-\gamma)}, & k = \tau; \\ r_{ijk}^{(h)}, & k \neq \tau. \end{cases} \quad (18)$$

设置 $h = h + 1$, 转至 **Step 2**.

Step 5: 输出 h , $R_k^{(h)} (k \in T)$.

同算法 1, 当个体 k 实施改进策略后, 将获得更好的共识一致性指标.

定理 2 令 $R_k = [r_{ijk}]_{n \times m} (k \in T)$ 为 t 个个体决策矩阵, $\{R_k^{(h)}\}$ 和 $\{R^{(h)}\}$ 分别为算法 2 生成的矩阵序列. 在第 $h + 1$ 轮算法执行中, 假设第 k 个决策个体具有最小的共识一致性指标, 则有

$$\text{GCI}(R_k^{(h+1)}) > \text{GCI}(R_k^{(h)}). \quad (19)$$

证明 根据算法 2 的修正策略, 有

$$R_k^{(h+1)} = (r_{ijk}^{(h+1)})_{n \times m},$$

其中

$$r_{ijk}^{(h+1)} = (r_{ijk}^{(h)})^\gamma (r_{ij}^{(h)})^{(1-\gamma)}. \quad (20)$$

进一步有

$$\begin{aligned} r_{ij}^{(h+1)} &= \prod_{l=1, l \neq k}^t (r_{ijl}^{(h)})^{\lambda_l} ((r_{ijk}^{(h)})^\gamma (r_{ij}^{(h)})^{(1-\gamma)})^{\lambda_k} = \\ r_{ij}^{(h)} \left(\frac{(r_{ijk}^{(h)})^\gamma (r_{ij}^{(h)})^{(1-\gamma)}}{r_{ijk}^{(h)}} \right)^{\lambda_k}. \end{aligned} \quad (21)$$

为了计算 $S_2(R_k^{(h+1)}, R^{(h+1)})$, 需要比较 $r_{ijk}^{(h+1)}$ 与 $r_{ij}^{(h+1)}$ 的大小. 下面分两种情况进行讨论:

1) 当 $r_{ij}^{(h)} \geq r_{ijk}^{(h)}$ 时, $r_{ijk}^{(h+1)} < r_{ij}^{(h)} < r_{ij}^{(h+1)}$, 根据式(20)和(21)有

$$\begin{aligned} \frac{\max(r_{ijk}^{(h+1)}, r_{ij}^{(h+1)})}{\min(r_{ijk}^{(h+1)}, r_{ij}^{(h+1)})} &= \frac{r_{ij}^{(h+1)}}{r_{ijk}^{(h+1)}} = \\ \left(\frac{r_{ij}^{(h)}}{r_{ijk}^{(h)}} \right)^{\gamma + (1-\gamma)\lambda_k} &< \frac{r_{ij}^{(h)}}{r_{ijk}^{(h)}} = \frac{\max(r_{ijk}^{(h)}, r_{ij}^{(h)})}{\min(r_{ijk}^{(h)}, r_{ij}^{(h)})}. \end{aligned} \quad (22)$$

2) 当 $r_{ij}^{(h)} < r_{ijk}^{(h)}$ 时, $r_{ij}^{(h+1)} < r_{ijk}^{(h+1)}$, 根据式 (20) 和 (21) 有

$$\frac{\max(r_{ijk}^{(h+1)}, r_{ij}^{(h+1)})}{\min(r_{ijk}^{(h+1)}, r_{ij}^{(h+1)})} = \frac{r_{ijk}^{(h+1)}}{r_{ij}^{(h+1)}} = \left(\frac{r_{ijk}^{(h)}}{r_{ij}^{(h)}}\right)^{\gamma+(1-\gamma)\lambda_k} < \frac{r_{ijk}^{(h)}}{r_{ij}^{(h)}} = \frac{\max(r_{ijk}^{(h)}, r_{ij}^{(h)})}{\min(r_{ijk}^{(h)}, r_{ij}^{(h)})}. \quad (23)$$

从而可以推导出

$$S_2(R_k^{(h+1)}, R^{(h+1)}) < S_2(R_k^{(h)}, R^{(h)}), \quad (24)$$

即

$$GCI(R_k^{(h+1)}) > GCI(R_k^{(h)}). \quad (25)$$

由此定理 2 得证. \square

在每一轮迭代过程中, 其他未修改偏好的专家的共识一致性水平也会改变. 每一轮修正后群体总的共识一致性水平将有所改善, 因此算法 2 的执行将使决策群体朝共识达成的方向发展.

定义 2 和定义 4 所给的共识一致性指标的取值范围为 $0 < GCI(R_k) \leq 1$. 共识度阈值的选取对算法的执行和决策结果有重要影响, 但是并没有统一的方法来选择共识度阈值. 根据 Herrera-Viedma 等^[3]的建议, 当所作决策很重要时, 共识度阈值可以选择一个较高的阈值, 如 0.95; 另一个极端情况是, 如果决策时间很紧, 需要快速选定方案, 则应该选择一个较低的阈值, 如 0.8. 该方法主观性较强. 另一种相对客观的选取原则是以保留专家意见尽可能多和算法总共的迭代次数尽可能少为准则, 提出相应的模拟程序, 阈值的选取是进一步需要研究的方向.

注 1 算法 1 和算法 2 中, 每一轮的群体决策矩阵会随着个体偏好的修改而变化, 在这种情况下, 群体偏好能够体现出个体偏好变化的影响.

注 2 两种共识达成算法都以群体偏好为参照修正个体偏好, 均能自动化地使群体达到预定的共识水平, 只需要专家给出初始偏好即可. 但在现实情况下, 算法只给出专家修改其偏好的建议, 为了提高专家的参与度, 专家可以更加灵活地修改其偏好. 假设在第 $h+1$ 轮第 k 个专家的共识一致性指标最小, 则

建议

$$r_{ijk}^{(h+1)} \in [\min\{r_{ijk}^{(h)}, r_{ij}^{(h)}\}, \max\{r_{ijk}^{(h)}, r_{ij}^{(h)}\}].$$

综合前述分析, 提出如图 1 所示的多属性群决策共识框架.

4 算例分析

考虑如下的多属性群决策问题^[5,12]. 某城市计划修建一座公共图书馆, 城市发展委员会面临的问题是在图书馆中安装何种空调系统. 有 5 种可行方案 X_1 、 X_2 、 X_3 、 X_4 、 X_5 供选择, 对这些方案的评价主要涉及经济性、功能性和可操作性 3 个因素, 2 个经济属性和 6 个非经济属性被纳入考虑范围. 具体考虑的属性有: 应付成本 C_1 (\$/ft²)、运行成本 C_2 (\$/ft²)、性能表现 C_3 (*), 噪音水平 C_4 (dB)、可维护性 C_5 (*), 可靠性 C_6 (%), 适应性 C_7 (*) 和安全性 C_8 . 其中: * 为 0~1 标度, C_1 、 C_2 和 C_4 为成本属性, 其余为效益属性. 参与决策的群体成员由 3 位专家组成, 专家根据每一备选方案在每一属性下的表现给出他们的偏好信息, 专家的权重向量为 $\lambda = (0.3, 0.2, 0.5)$. 每个专家给出的决策矩阵 A_1, A_2, A_3 如表 1~表 3 所示.

表 1 原始决策矩阵 A_1

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8
X_1	4	6	0.9	35	0.5	95	0.4	0.7
X_2	2	5	0.5	70	0.4	75	0.8	0.5
X_3	4	5	0.6	65	0.8	85	0.8	0.6
X_4	6	4	0.8	40	0.9	90	0.7	0.8
X_5	5	6	0.7	55	0.6	95	0.5	0.9

表 2 原始决策矩阵 A_2

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8
X_1	5	6	0.7	37	0.3	98	0.5	0.4
X_2	2	5	0.6	74	0.6	70	0.6	0.6
X_3	5	4	0.5	67	0.9	80	0.6	0.7
X_4	4	5	0.7	42	0.9	85	0.9	0.6
X_5	3	7	0.8	54	0.7	90	0.3	0.8

表 3 原始决策矩阵 A_3

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8
X_1	3	6	0.9	40	0.6	93	0.4	0.5
X_2	4	7	0.5	72	0.4	78	0.8	0.7
X_3	6	5	0.6	75	0.8	89	0.9	0.6
X_4	7	6	1	48	0.8	94	0.6	0.8
X_5	5	4	0.9	60	0.8	95	0.5	0.9

首先对原始决策矩阵进行归一化, 所得结果如表 4~表 6 所示 (仅保留两位小数, 下同). 若使用式 (3) 集结个体偏好, 则得到的初始群体决策矩阵 R 如表 7 所示.

考虑使用算法 1 达成共识, 设置阈值 $\alpha = 0.95$, 则算法 1 执行 6 次终止. 每一轮各决策矩阵的共识一

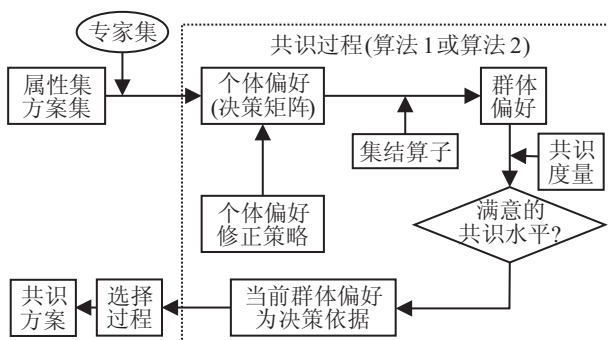


图 1 多属性群决策共识框架

致性指标和需要修改其偏好的专家如表8所示,可见只有第2个专家修改了其偏好.共识一致性指标值验证了定理1的结论,修改后的群体决策矩阵 R_{new} 如表9所示.若使用式(4)集结个体偏好,则得到初始群体决策矩阵 R' 如表10所示.

表4 决策矩阵 R_1

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8
X_1	0.50	0.67	1.0	1.0	0.56	1.0	0.50	0.78
X_2	1.0	0.80	0.5	0.50	0.44	0.79	1.0	0.56
X_3	0.50	0.80	0.67	0.54	0.89	0.89	1.0	0.67
X_4	0.33	1.0	0.89	0.87	1.0	0.95	0.87	0.89
X_5	0.40	0.67	0.78	0.64	0.67	1.0	0.62	1.0

表5 决策矩阵 R_2

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8
X_1	0.40	0.67	0.87	1.0	0.33	1.0	0.56	0.50
X_2	1.0	0.80	0.75	0.50	0.67	0.71	0.67	0.75
X_3	0.40	1.0	0.62	0.55	1.0	0.82	0.67	0.87
X_4	0.50	0.80	0.87	0.88	1.0	0.87	1.0	0.75
X_5	0.67	0.57	1.0	0.69	0.78	0.92	0.33	1.0

表6 决策矩阵 R_3

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8
X_1	1.00	0.67	0.90	1.0	0.75	0.98	0.44	0.56
X_2	0.75	0.57	0.50	0.56	0.50	0.82	0.89	0.78
X_3	0.50	0.80	0.60	0.53	1.0	0.94	1.0	0.67
X_4	0.43	0.67	1.0	0.83	1.0	0.99	0.67	0.89
X_5	0.60	1.0	0.90	0.67	1.0	1.0	0.56	1.0

表7 群体决策矩阵 R

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8
X_1	0.73	0.67	0.92	1.0	0.61	0.99	0.48	0.61
X_2	0.87	0.69	0.57	0.53	0.52	0.79	0.88	0.71
X_3	0.48	0.84	0.62	0.54	0.97	0.90	0.93	0.71
X_4	0.41	0.79	0.94	0.86	1.0	0.95	0.80	0.86
X_5	0.55	0.81	0.88	0.66	0.86	0.98	0.53	1.0

表8 基于算法1的共识一致性指标值

迭代次数	个体共识一致性指标值	需要修改偏好的专家
1	{0.9572, 0.9253, 0.9627}	2
2	{0.9573, 0.9313, 0.9640}	2
3	{0.9574, 0.9368, 0.9652}	2
4	{0.9574, 0.9418, 0.9662}	2
5	{0.9574, 0.9465, 0.9670}	2
6	{0.9574, 0.9508, 0.9677}	

表9 修改后的群体决策矩阵 R_{new}

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8
X_1	0.76	0.67	0.93	1.0	0.63	0.99	0.48	0.62
X_2	0.86	0.68	0.55	0.53	0.50	0.80	0.90	0.70
X_3	0.49	0.83	0.62	0.54	0.96	0.91	0.96	0.69
X_4	0.41	0.79	0.95	0.85	1.0	0.96	0.78	0.87
X_5	0.54	0.83	0.87	0.66	0.86	0.99	0.55	1.0

表10 群体决策矩阵 R'

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8
X_1	0.68	0.67	0.92	1.0	0.58	0.99	0.48	0.60
X_2	0.87	0.69	0.57	0.53	0.52	0.79	0.88	0.71
X_3	0.48	0.84	0.62	0.54	0.97	0.90	0.92	0.70
X_4	0.41	0.78	0.94	0.86	1.0	0.95	0.78	0.86
X_5	0.55	0.81	0.88	0.66	0.86	0.98	0.53	1.0

考虑使用算法2达成共识,设置阈值 $\alpha = 0.95$,则算法2执行14次终止.每一轮各决策矩阵的共识一致性指标和需要修改其偏好的专家如表11所示,可见,第1个专家和第2个专家均修改了其偏好.共识一致性指标值验证了定理2的结论,修改后的群体决策矩阵 R'_{new} 如表12所示.

表11 基于算法2的共识一致性指标值

迭代次数	个体共识一致性指标值	需要修改偏好的专家
1	{0.9426, 0.8939, 0.9478}	2
2	{0.9427, 0.9020, 0.9496}	2
3	{0.9426, 0.9095, 0.9512}	2
4	{0.9425, 0.9164, 0.9528}	2
5	{0.9424, 0.9228, 0.9542}	2
6	{0.9423, 0.9288, 0.9554}	2
7	{0.9422, 0.9343, 0.9563}	2
8	{0.9421, 0.9394, 0.9571}	2
9	{0.9420, 0.9441, 0.9578}	1
10	{0.9459, 0.9439, 0.9592}	2
11	{0.9458, 0.9482, 0.9599}	1
12	{0.9495, 0.9480, 0.9612}	2
13	{0.9493, 0.9521, 0.9619}	1
14	{0.9528, 0.9518, 0.9632}	

表12 修改后的群体决策矩阵 R'_{new}

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8
X_1	0.75	0.67	0.92	1.0	0.64	0.99	0.47	0.61
X_2	0.84	0.65	0.54	0.53	0.50	0.80	0.89	0.70
X_3	0.49	0.82	0.62	0.54	0.97	0.91	0.96	0.68
X_4	0.40	0.76	0.95	0.85	1.0	0.97	0.75	0.87
X_5	0.54	0.83	0.87	0.66	0.86	0.99	0.55	1.0

两种算法均在给定的共识度量下达到了预定的共识一致性水平.对比发现,在取相同的共识阈值时,基于乘型集结的共识一致性指标要比基于加型集结的共识一致性指标更为严格.使用式(5)计算各方案的综合评价值,这里假定各属性权重相等.基于 R_{new} ,有 $Z_1 = 0.7554$, $Z_2 = 0.6815$, $Z_3 = 0.7487$, $Z_4 = 0.8199$, $Z_5 = 0.7906$.基于 R'_{new} ,有 $Z'_1 = 0.7590$, $Z'_2 = 0.6900$, $Z'_3 = 0.7496$, $Z'_4 = 0.8261$, $Z'_5 = 0.7890$.从而对方案的排序均为 $X_4 \succ X_5 \succ X_1 \succ X_3 \succ X_2$.因此,方案 X_4 是当前情况下的最优选择.

本文采用了与文献[5]相同的个体决策矩阵,文献[11]给出了不同的个体决策矩阵.可以发现,文献

[5,11]最终得到的群体决策矩阵相对于初始的群体决策矩阵并未改变, 本文结果与文献[5]相同. 虽然本文最终得到的群体决策矩阵相对最初的群体决策矩阵已经有了较大变化, 但是群体的排序结果并未发生改变, 这是由特定的原始决策信息造成的, 并不表示这种决策方法不起作用. 在某些情形, 共识过程后的决策结果相比于共识前可能会有很大的变化.

5 结 论

多属性群决策的共识过程旨在使参与群体决策的决策个体对方案形成满意的一致性意见. 在假定最终方案的选择依赖于群体决策矩阵的决策规则下, 本文提出了两种辅助群体达成共识的方法. 算例分析表明了所提出方法的合理性和可行性. 在专家直接给出语言偏好或区间值偏好时, 需要定义相应的共识度量后利用本文类似的修正策略, 更多的理论拓展和应用研究有待进一步展开.

参考文献(References)

- [1] Cabrerizo F J, Moreno J M, Pérez I J, et al. Analyzing consensus approaches in fuzzy group decision making: Advantages and drawbacks[J]. *Soft Computing*, 2010, 14(5): 451-463.
- [2] Chen S M, Lee L W. Autocratic decision making using group recommendations based on the ILLOWA operator and likelihood-based comparison relations[J]. *IEEE Trans on Systems, Man and Cybernetics, Part A: Systems and Humans*, 2012, 42(1): 115-129.
- [3] 陈侠, 樊治平, 陈岩. 基于区间数决策矩阵的专家群体判断一致性[J]. *东北大学学报: 自然科学版*, 2007, 28(10): 1509-1513.
(Chen X, Fan Z P, Chen Y. On consistency of expert group's judgments based on decision matrices in gorm of interval numbers[J]. *J of Northeastern University: Natural Science*, 2007, 28(10): 1509-1513.)
- [4] Dong Y C, Xu Y F, Li H Y, et al. The OWA-based consensus operator under linguistic representation models using position indexes[J]. *European J of Operational Research*, 2010, 203(2): 455-463.
- [5] Xu Z S. An automatic approach to reaching consensus in multiple attribute group decision making[J]. *Computers & Industrial Engineering* 2009, 56(4): 1369-1374.
- [6] Xu J P, Wu Z B. A discrete consensus support model for multiple attribute group decision making[J]. *Knowledge-Based Systems*, 2011, 24(8): 1196-1202.
- [7] Fu C, Yang S L. The group consensus based evidential reasoning approach for multiple attributive group decision analysis[J]. *European J of Operational Research*, 2010, 206(3): 601 - 608.
- [8] Fu C, Yang S L. An evidential reasoning based consensus model for multiple attribute group decision analysis problems with interval valued group consensus requirements[J]. *European J of Operational Research*, 2012, 223(1): 167-176.
- [9] Parreiras R O, Ekel P Ya, Martini J S C, et al. A flexible consensus scheme for multicriteria group decision making under linguistic assessments[J]. *Information Sciences*, 2010, 180(7): 1075-1089.
- [10] Parreiras R O, Ekel P Y, Morais D C. Fuzzy set based consensus schemes for multicriteria group decision making applied to strategic planning[J]. *Group Decision and Negotiation*, 2012, 21(2): 153-183.
- [11] 徐迎军, 李东. 多属性群决策达成一致方法研究[J]. *控制与决策*, 2010, 25(12): 1810 - 1814.
(Xu Y J, Li D. Approach to reaching consensus in multiple attribute group decision making[J]. *Control and Decision*, 2010, 25(12): 1810-1814.)
- [12] Yoon K. The propagation of errors in multiple-attribute decision analysis: A practical approach[J]. *J of the Operational Research Society*, 1989, 40(7): 681-686.
(责任编辑: 郑晓蕾)