文章编号: 1001-0920 (2014) 03-0499-07　　DOI: 10.13195/j.kzyjc.2012.1802

基于随机基准的动态均值-方差投资组合选择

王秀国, 王义东

(中央财经大学 统计与数学学院，北京 100081)

摘　要: 在不完全市场下, 研究基于随机基准的动态均值-方差投资组合选择问题. 该问题也可以理解为一个跟踪误差动态投资组合问题, 并将之转化为一个等价的考虑风险调整的期望相对收益最大化问题. 利用随机动态规划方法, 给出了最优投资策略和有效前沿的显式表达式. 最后通过实证分析表明了不完全市场和完全市场下最优投资策略和有效前沿的变化, 并对相关结论进行了经济解释.

关键词: 动态投资组合；随机基准；最优投资策略；有效前沿

中图分类号: F224　　**文献标志码:** A

Dynamic mean-variance portfolio selection based on stochastic benchmark

WANG Xiu-guo, *WANG Yi-dong*

(School of Statistics and Mathematics，Central University of Finance and Economics，Beijing 100081，China. Correspondent：WANG Xiu-guo，E-mail：wxg74@126.com)

Abstract: In an incomplete market, the problem of dynamic mean-variance portfolio selection is investigated based on a benchmark defined by a stochastic process. The problem is also interpreted as a dynamic tracking-error portfolio selection, and is transformed as a problem of maximizing the expected relative return considering risk adjusted. Stochastic dynamic programming method is used to obtain explicit solutions of the optimal strategies and efficient frontier. Finally, an empirical analysis is conducted to illustrate the results obtained.

Key words: dynamic portfolio selection；stochastic benchmark；optimal strategies；efficient frontier

0 引　言

目前, 西方金融界已普遍使用基准来评价积极管理者的业绩, 即相对业绩评价方法. 该方法已被投资管理界和商业银行界所接受和使用, 通常投资者预先给定一个基准投资组合, 定期对投资管理者的业绩进行评价. 因此, 积极的投资管理者往往在满足投资者要求的前提下, 尽可能地使自己的投资组合获得更高的超额收益. 基准的选择依赖于投资者的偏好, 保守的投资者趋向于选择固定收入投资方案作为基准, 而积极的投资者趋向于选择随机基准.

为了帮助管理者进行科学的投资决策, 许多学者研究了具有基准的投资组合优化问题. Roll[1]研究了在给定的期望回报下, 极小化跟踪误差 TE (组合和基准回报差异的方差) 的投资组合优化问题. Jorion[2]在此基础上引入了附加方差约束以有效提高积极投资管理的业绩. 方毅等[3]进一步基于成本、效率、基准组合的作用、风险偏好等方面进行了深入分析, 并设计了一种更为有效的风险约束机制. Wang[4]和 Muralidhar[5]分别考虑了多基准和多管理者的投资组合优化问题. Rudolf 等[6]研究了极小化跟踪误差的 4 种不同的线性模型. 马永开等[7]将证券收益的多因素模型引入基于市场基准的投资决策模型, 建立了基于市场基准的多因素证券组合投资决策模型, 研究了模型的解和模型控制参数值的选取问题. 高莹等[8]在跟踪误差投资组合优化模型基础上, 考虑投资组合的风险价值 VaR 和收益的不确定性, 建立了具有 VaR 约束的跟踪误差投资组合鲁棒优化模型. Gordon[9]和荣喜民等[10]分别建立了基于 VaR 和 CVaR 风险约束的追踪误差最小化的指数组合优化模型, 有效地控制了组合的整体风险. Alexandre[11]在追踪误差优化问题中引入了背景风险. 上述文献均是在静态 (单期) 环境下

收稿日期: 2012-12-03；**修回日期:** 2013-05-04.

基金项目: 国家自然科学基金项目(70901079)；中央财经大学科研创新团队支持计划项目.

作者简介: 王秀国(1974−), 男, 副教授, 博士, 从事投资组合理论与最优化理论的研究；王义东(1966−), 女, 副教授, 硕士, 从事随机过程及其应用的研究.

讨论的.

正如大多数经纪公司和金融管理者所建议的那样, 积极的组合投资管理者经常实施动态投资策略, 因此合理定义相关的动态优化规则是组合管理的中心问题. Tepla[12]研究了具有最小业绩约束的动态投资组合问题, 业绩约束是投资者的终端财富不小于随机基准, 目标是极大化投资者的效用, 并给出了 HARA 类效用函数的最优投资策略. Basak 等[13]研究了含有类似于 VaR 约束和期望不足约束两种情形的投资组合问题, 使用的基准是某个确定的值. Gabin 等[14]研究了期望损失效用约束, 选用的基准水平与股票价格成比例. Browne[15-16]考虑了具有随机基准的多种优化问题, 包括极大化投资组合回报击中基准组合回报的概率和极小化投资者击中基准的期望时间, 并考虑了期望相对财富的效用最大化问题. Zhao[17]在不完全市场中, 将 Roll[1]的均值-跟踪误差分析推广到动态情形, 并进行了风险敏感性分析. 王亦奇等[18]研究了灵活收益保证设定下的最优投资策略问题, 并在 HJM 利率期限结构下, 利用鞅方法得到了最优投资策略的解析解. 另外, Li 等[19]在独立同分布的假定下, 利用植入技术将多阶段均值-方差模型的投资组合问题转化为一个能用动态规划处理的问题. 许云辉等[20]进一步研究了基于收益序列相关的多阶段均值-方差模型. Zhou 等[21]利用随机 LQ 方法研究了连续时间均值-方差投资组合问题, Li 等[22]进一步研究了卖空限制的情形, 对研究连续时间投资组合具有一定的指导意义. Chui 等[23]在均值-方差框架下研究了资产负债投资组合问题, Xie 等[24]将之推广到不完全市场. 刘海飞等[25]在均值-方差框架下, 考虑了时间序列的时变性、聚集性与波动性, 基于多期滞后随机波动模型, 构建了金融时间序列协同持续条件下的最优资产组合模型及其参数估计模型.

本文在连续时间不完全金融市场和均值方差框架下, 构建了带有随机基准的动态均值-方差投资组合模型, 其中基准通过一个布朗运动外生生成. 鉴于积极的投资者关注相对于基准的投资组合业绩, 即考虑在给定的期望相对财富下, 极小化相对财富的方差, 该模型可以解释为一种新的跟踪误差投资组合优化模型, 并将之转换为一个等价的考虑风险调整的期望相对收益最大化问题. 利用随机动态规划方法求解最优投资策略, 并进一步分析了投资组合的前沿边界和有效前沿.

1 动态投资组合模型

假设市场上存在 $n+1$ 种资产, 所有资产均可在计划期 $[0,T]$ 内连续交易, 资产 0 为无风险资产, 价格过程服从微分方程

$$\mathrm{d}p_0(t)=p_0(t)r(t)\mathrm{d}t,\ p_0(0)=p_0; \tag{1}$$

其余的为风险资产, 价格过程分别服从微分方程

$$\mathrm{d}p_i(t)=p_i(t)\Big(b_i(t)\mathrm{d}t+\sum_{j=1}^{m}\sigma_{ij}(t)\mathrm{d}B_j(t)\Big),$$
$$p_i(0)=p_i,\ i=1,2,\cdots,n. \tag{2}$$

其中: $r(t)>0$ 为无风险资产的收益率, $b_i(t)>r(t)$ 为资产 i 的瞬时期望收益率 (漂移项), $\sigma_{ij}(t)$ 为资产 i 的扩散项, $B_t=(B_1(t),B_2(t),\cdots,B_m(t))^{\mathrm{T}}$ 为定义在完全概率空间 (Ω,F,P) 上的 m 维标准布朗运动. 记

$$r_t=r(t),\ b_t=(b_1(t),b_2(t),\cdots,b_n(t))^{\mathrm{T}},$$
$$\sigma_t=(\sigma_{ij}(t))_{n\times m},\ e=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}.$$

令 $\{F_t;0\leqslant t\leqslant T\}$ 为由 B 产生的 σ- 代数流, 假定 r_t,b_t,σ_t 在 $[0,T]$ 上是确定 (非随机) 的、Lebesgue 可测的、平方可积的有界函数, σ_t 满足非退化条件 $\sigma_t\sigma_t^{\mathrm{T}}>0$, $\forall t\in[0,T]$. 当股票的数目 n 等于布朗运动的维数 m 时, 市场是完全的; 当 $n<m$ 时, 市场是不完全的.

假定投资者初始财富为 W_0, 设 $x_t=(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t))^{\mathrm{T}}$ 为在时刻 t 投资于风险资产的财富比例, 则投资于无风险资产的财富比例为 $1-x_t^{\mathrm{T}}e$. 如果对于任意的 $t\in[0,T]$, 财富过程 W_t 满足

$$\mathrm{d}W_t=W_t\{(x_t^{\mathrm{T}}(b_t-r_te)+r_t)\mathrm{d}t+x_t^{\mathrm{T}}\sigma_t\mathrm{d}B_t\}, \tag{3}$$

则称该投资策略是自融资的. 令 A 为可行的自融资投资策略集.

假定存在一个随机基准, 满足如下微分方程:

$$\mathrm{d}Z_t=Z_t\{u_t\mathrm{d}t+v_td\bar{B}_t\},\ Z(0)=Z_0. \tag{4}$$

其中: $\bar{B}_t$ 为完全概率空间 (Ω,F,P) 上的一维标准布朗运动; $u_t>0$ 为基准的瞬时收益率, $v_t\in R^n$ 为基准的扩散项, 且 u_t,v_t 为时刻 t 的确定函数. 假定 $\bar{B}_t$ 与 B_t^j 存在相关关系, 其相关系数记为 $\rho_t^j,\ j=1,2,\cdots,m$. 令 $\rho_t=(\rho_t^1,\rho_t^2,\cdots,\rho_t^m)^{\mathrm{T}}$, 又因为 $\rho_t^{\mathrm{T}}\rho_t\leqslant 1$, 所以 Z_t 满足

$$\mathrm{d}Z_t=Z_t\{u_t\mathrm{d}t+v_t(\rho_t^{\mathrm{T}}\mathrm{d}B_t+\sqrt{1-\rho_t^{\mathrm{T}}\rho_t}\mathrm{d}B_t^0)\},$$
$$Z(0)=Z_0, \tag{5}$$

其中 B_t^0 为完全概率空间 (Ω,F,P) 上的一维标准布朗运动. 为了讨论方便, 假设 $Z_0=W_0$.

注 1 式 (5) 包含以下 3 种特殊情形: 1) 当 $\rho_t^j=0$ $(j=1,2,\cdots,n)$ 时, $\bar{B}_t$ 与 B_t^j 不相关, $\bar{B}_t$ 等价于 B_t^0; 2) 当 $\rho_t^{\mathrm{T}}\rho_t=1$ 时, $\bar{B}_t$ 可以表示成 $B_1(t),B_2(t),\cdots,B_m(t)$ 的线性组合, 意味着基准与风险资产具有相同的风险驱动因子; 3) 当 $m=n,\rho_t^{\mathrm{T}}\rho_t=1$ 时, 意味着基准所产生的风险可完全由交易风险资产所对冲.

令 $V_t=W_t/Z_t$, 则相对财富 V_t 也是一个随机过程. 记

$$\alpha_t=b_t-r_te-v_t\sigma_t\rho_t,\ \beta_t=r_t-u_t+v_t^2,$$

$$\gamma_t = v_t\rho_t,\ \xi_t = x_t^{\mathrm{T}}\alpha_t + \beta_t,$$

$$\delta_t = x_t^{\mathrm{T}}\sigma_t - \gamma_t^{\mathrm{T}},\ \delta_t^0 = v_t\sqrt{1-\rho_t^{\mathrm{T}}\rho_t},$$

则由 Ito 公式可得

$$\mathrm{d}V_t = V_t\{\xi_t\mathrm{d}t + \delta_t\mathrm{d}B_t + \delta_t^0\mathrm{d}B_t^0\},$$
$$V_0 = W_0/Z_0 = 1. \tag{6}$$

积极的投资管理者要对相对于基准的回报和风险进行综合权衡, 本文在均值方差框架下, 构建动态投资组合优化问题, 即在给定的期望相对终期财富下, 极小化相对终期财富的方差

$$\text{(P1)}\ \min_{x\in A}\ \mathrm{Var}(V_T);$$
$$\text{s.t. } E(V_T) = d. \tag{7}$$

其中 d 为给定的期望相对财富. 问题 (P1) 可以等价地表示为

$$\text{(P1}')\ \min_{x\in A}\ \mathrm{Var}(V_T-1);$$
$$\text{s.t. } E(V_T-1) = d-1. \tag{8}$$

问题 (P1′) 也具有较强的经济含义, 可以理解为一种新的跟踪误差投资组合优化问题, 即在给定的超额收益 $d-1$ 下, 极小化跟踪误差, 其中跟踪误差定义为 $\mathrm{Var}(W_T/Z_T-1)$, 而不是传统的 $\mathrm{Var}(W_T-Z_T)$.

问题 (P1) 等价于求解一个极大化风险调整的期望相对收益问题, 即

$$\text{(P2)}\ \max_{x\in A}\ E(V_T) - \frac{1}{2\lambda}E(V_T^2);$$
$$\text{s.t. } \mathrm{d}V_t = V_t\{\xi_t\mathrm{d}t + \delta_t\mathrm{d}B_t + \delta_t^0\mathrm{d}B_t^0\}. \tag{9}$$

其中 $\lambda>0$ 为投资者的风险容忍度, 可以根据给定的期望相对财富 d 确定.

2　最优投资策略的求解

问题 (P2) 是一个随机动态规划问题, 首先通过值函数表示出投资于风险资产的最优比例, 然后代入 HJB 方程, 通过求解偏微分方程得到最优投资策略. 记值函数为

$$J(V,t) = \max_{x\in A}\ E\Big[V_T - \frac{1}{2\lambda}V_T^2|F_t\Big], \tag{10}$$

$J(V,t)$ 表示在给定当前信息 F_t 下风险调整的条件期望相对收益. 假定 J 关于 t 可微, 关于 V 二次连续可微, 则相应的 HJB 方程为

$$J_t + \max_{x\in A}\{x_t^{\mathrm{T}}\alpha_t VJ_V + \|x_t^{\mathrm{T}}\sigma_t - \gamma_t^{\mathrm{T}}\|^2V^2J_{VV}/2\} +$$
$$\beta_t VJ_V + (\delta_t^0)^2V^2J_{VV}/2 = 0, \tag{11}$$

边界条件为 $J(V,T) = V_T - \frac{1}{2\lambda}V_T^2$.

考虑 HJB 中的最优化问题

$$\text{(P3)}\ \max_{x\in A}\ x_t^{\mathrm{T}}\alpha_t VJ_V + \|x_t^{\mathrm{T}}\sigma_t - \gamma_t^{\mathrm{T}}\|^2V^2J_{VV}/2. \tag{12}$$

定理 1　假定 J 关于 t 可微, 关于 V 二次连续可微, 且 J 关于 V 是严格凹的 (该假定可以通过最终得到的值函数验证), 则问题 (P3) 的最优解为

$$x_t^* = -\frac{J_V}{VJ_{VV}}(\sigma_t\sigma_t^{\mathrm{T}})^{-1}\alpha_t + (\sigma_t\sigma_t^{\mathrm{T}})^{-1}\sigma_t\gamma_t =$$
$$a_t\eta_t + (1-a_t)\pi_t. \tag{13}$$

其中: $\eta_t = (\sigma_t\sigma_t^{\mathrm{T}})^{-1}(b_t - r_te)$ 和 $\pi_t = (\sigma_t\sigma_t^{\mathrm{T}})^{-1}\sigma_t\gamma_t$ 分别表示最优增长组合和基准组合, $a_t = -\frac{J_V}{VJ_{VV}}$.

注 2　Merton 称 η_t 为最优增长组合[26], Long 则称为本位组合[27]. 最优增长组合在利用鞅理论研究连续时间投资组合问题时起重要作用[26,28]. 当基准能被市场完全复制时, π_t 便是复制该基准的组合, 文中称为基准组合.

由定理 1 可以看出, 最优解 x_t^* 是最优增长组合和基准组合的组合, 其中投资于最优增长组合的比例 a_t 类似于 Merton 标准效用最大化问题的相对风险厌恶水平的倒数. 因此, 积极的投资管理者的最优投资策略是投资于无风险资产、最优增长组合 η_t 和基准组合 π_t, 可以解释为三基金分离定理.

定理 1 的前提是 HJB 方程可求解, 下面讨论 HJB 方程解的存在性. 记

$$\theta_t = \sqrt{\alpha_t^{\mathrm{T}}(\sigma_t\sigma_t^{\mathrm{T}})^{-1}\alpha_t},\ k_t = \beta_t + \alpha_t^{\mathrm{T}}\pi_t,$$
$$m_t = (\delta_t^0)^2 + \|\pi_t^{\mathrm{T}}\sigma_t - \gamma_t^{\mathrm{T}}\|^2.$$

特别地, 当 $m=n$, $\rho_t^{\mathrm{T}}\rho_t = 1$ 时, $m_t = 0$. 将最优解 (13) 代入 HJB 方程得

$$J_t - \frac{J_V^2}{2J_{VV}}\theta_t^2 + k_tVJ_V + \frac{1}{2}m_tV^2J_{VV} = 0, \tag{14}$$

边界条件为 $J(V,T) = V_T - \frac{1}{2\lambda}V_T^2$.

定理 2　微分方程 (14) 的最优解为

$$J(V,t) = f(t)V^2 + g(t)V + h(t). \tag{15}$$

其中

$$f(t) = -\frac{1}{2\lambda}\mathrm{e}^{\int_t^T(\theta_s^2 - 2k_s - m_s)\mathrm{d}s}, \tag{16}$$

$$g(t) = \mathrm{e}^{\int_t^T(\theta_s^2 - k_s)\mathrm{d}s}, \tag{17}$$

$$h(t) = -\frac{\lambda}{2}\int_t^T\theta_u^2\mathrm{e}^{\int_u^T\theta_s^2 + m_s\mathrm{d}s}\mathrm{d}u. \tag{18}$$

证明　为了解方程, 试探解的形式为

$$J(V,t) = f(t)V^2 + g(t)V + h(t), \tag{19}$$

则

$$J_t = f_t'V^2 + g_t'V + h_t',\ J_V = 2f(t)V + g(t),$$
$$J_{VV} = 2f(t).$$

代入式 (14) 得到

$$f_t'V^2 + g_t'V + h_t' - \frac{(2f(t)V+g(t))^2}{4f(t)}\theta_t^2 +$$
$$k_tV(2f(t)V+g(t)) + f(t)m_tV^2 = 0, \tag{20}$$

即

$$V^2(f_t^{'}+(2k_t-\theta_t^2+m_t)f(t))+$$
$$V(g_t^{'}+(k_t-\theta_t^2)g(t))+h_t^{'}-\frac{g^2(t)}{4f(t)}\theta_t^2=0, \quad (21)$$

从而得到 3 个常微分方程

$$f_t^{'}+(2k_t-\theta_t^2+m_t)f(t)=0,\ f(T)=-\frac{1}{2\lambda}, \quad (22)$$

$$g_t^{'}+(k_t-\theta_t^2)g(t)=0,\ g(T)=1, \quad (23)$$

$$h_t^{'}-\frac{g^2(t)}{4f(t)}\theta_t^2=0, h(T)=0. \quad (24)$$

易求这 3 个常微分方程的解为式 (16) ∼ (18). □

由定理 2 可知 $J_{VV}=2f(t)<0$, 则定理 1 中值函数关于 V 严格凹的假定自然成立. 由定理 1 和定理 2 易得投资于风险资产的最优比例.

定理 3 投资于风险资产的最优比例为

$$x_t^*=\Big(\frac{\lambda}{V_t}\mathrm{e}^{-\int_t^T k_s+m_s\mathrm{d}s}-1\Big)(\sigma_t\sigma_t^{\mathrm{T}})^{-1}\alpha_t+\pi_t=$$
$$\Big(\frac{\lambda}{V_t}\mathrm{e}^{-\int_t^T k_s+m_s\mathrm{d}s}-1\Big)\eta_t+\Big(2-\frac{\lambda}{V_t}\mathrm{e}^{-\int_t^T k_s+m_s\mathrm{d}s}\Big)\pi_t. \quad (25)$$

注 3 在 Merton 标准的效用函数最大化问题中, 当市场参数均为常数 (即风险资产的价格变动服从几何布朗运动) 时, 展现出定常数比例最优投资策略[26]. 由定理 3 可知, 即使市场参数都为常数, 投资于风险资产的最优比例也是关于时间和相对财富的函数.

如前文所述, 最优投资策略符合三基金分离定理, 即由无风险资产、最优增长组合和基准组合构成, 这与文献 [15-17] 具有类似的结论. 式 (25) 中第 2 个等号表示 x_t^* 是最优增长组合和基准组合的组合 (比例分别为 $a_t=\lambda\mathrm{e}^{-\int_t^T k_s+m_s\mathrm{d}s}/V_t-1, 1-a_t$), 投资于最优增长组合是为了获得尽可能大的收益, 投资于基准组合是为了保证获得基准组合收益和较小的跟踪误差. 对于某个给定的时刻 t, 当前的相对财富水平 V_t 越小 (W_t 相对于 Z_t 越小), 或越偏离终期财富目标, 为了追求更高的收益, 风险资产中投资于最优增长组合的比例越大, 以使得相对财富水平能越来越接近终期财富目标; 反之, 当前的相对财富水平 V_t 越大 (W_t 相对于 Z_t 越大), 则更多投资于基准组合以获取较小的跟踪误差 (风险).

下面讨论风险容忍度 λ 的确定. 将式 (25) 代入 (6) 可得

$$\mathrm{d}V_t=\{\lambda\theta_t^2\mathrm{e}^{-\int_t^T k_s+m_s\mathrm{d}s}+(k_t-\theta_t^2)V_t\}\mathrm{d}t+$$
$$\{(\lambda\mathrm{e}^{-\int_t^T k_s+m_s\mathrm{d}s}-V_t)\alpha_t^{\mathrm{T}}\sigma_t+$$
$$V_t(\pi_t^{\mathrm{T}}\sigma_t-\gamma_t^{\mathrm{T}})\}\mathrm{d}B_t+V_t\delta_t^0\mathrm{d}B_t^0,$$
$$V_0=1. \quad (26)$$

两边取期望得

$$\mathrm{d}E(V_t)=\{\lambda\theta_t^2\mathrm{e}^{-\int_t^T k_s+m_s\mathrm{d}s}+(k_t-\theta_t^2)E(V_t)\}\mathrm{d}t,$$
$$V_0=1. \quad (27)$$

解非齐次线性常微分方程 (27) 得

$$E(V_T)=\alpha+\lambda\beta. \quad (28)$$

其中

$$\alpha=\mathrm{e}^{\int_0^T(k_t-\theta_t^2)\mathrm{d}t},$$
$$\beta=\mathrm{e}^{-\int_0^T\theta_t^2\mathrm{d}t}\int_0^T\theta_t^2\mathrm{e}^{\int_0^t\theta_s^2\mathrm{d}s}\mathrm{e}^{-\int_t^T m_s\mathrm{d}s}\mathrm{d}t.$$

因此, 只要事先给定期望相对财富 d, 风险容忍度 λ 便可以通过下式确定:

$$\lambda=\frac{d-\alpha}{\beta}. \quad (29)$$

特别地, 当 $m=n$, $\rho_t^{\mathrm{T}}\rho_t=1$ 时, 有

$$\beta=1-\mathrm{e}^{-\int_0^T\theta_t^2\mathrm{d}t},\ \lambda=\frac{d-\mathrm{e}^{\int_0^T(k_t-\theta_t^2)\mathrm{d}t}}{1-\mathrm{e}^{-\int_0^T\theta_t^2\mathrm{d}t}}.$$

由式 (29) 可见, 如果给定的期望目标相对财富 d 越大, 则相应的风险容忍度 λ 越大, 根据式 (25) 风险资产中投资于最优增长组合的比例也越大, 以便实现目标收益; 反之, 如果给定的期望目标相对财富 d 越小, 则相应的风险容忍度 λ 越小, 将更多投资于基准组合以获取较小的跟踪误差 (风险), 这与投资实践相一致.

3 前沿边界和有效前沿

对 V_t^2 应用 Ito 公式, 结合式 (26) 得到

$$\mathrm{d}V_t^2=\{\lambda^2\theta_t^2\mathrm{e}^{-2\int_t^T k_s+m_s\mathrm{d}s}+$$
$$(2k_t-\theta_t^2+m_t^2)V_t^2\}\mathrm{d}t+$$
$$2V_t\{(\lambda\mathrm{e}^{-\int_t^T k_s+m_s\mathrm{d}s}-V_t)\alpha_t^{\mathrm{T}}\sigma_t+$$
$$V_t(\pi_t^{\mathrm{T}}\sigma_t-\gamma_t^{\mathrm{T}})\}\mathrm{d}B_t+2V_t^2\delta_t^0\mathrm{d}B_t^0,$$
$$V_0^2=1. \quad (30)$$

两边取期望得

$$\mathrm{d}E(V_t^2)=\{\lambda^2\theta_t^2\mathrm{e}^{-2\int_t^T k_s+m_s\mathrm{d}s}+$$
$$(2k_t-\theta_t^2+m_t^2)E(V_t^2)\}\mathrm{d}t. \quad (31)$$

解非齐次线性常微分方程 (31) 得

$$E(V_T^2)=\gamma+\lambda^2\zeta. \quad (32)$$

其中

$$\gamma=\mathrm{e}^{\int_0^T(2k_t-\theta_t^2+m_t^2)\mathrm{d}t},$$
$$\zeta=\mathrm{e}^{\int_0^T(-\theta_t^2+m_t^2)\mathrm{d}t}\int_0^T\theta_t^2\mathrm{e}^{\int_0^t\theta_s^2-m_s^2\mathrm{d}s}\mathrm{e}^{-2\int_t^T m_s\mathrm{d}s}\mathrm{d}t.$$

特别地, 当 $m=n$, $\rho_t^{\mathrm{T}}\rho_t=1$ 时, $\zeta=\beta=1-\mathrm{e}^{-\int_0^T\theta_t^2\mathrm{d}t}$.

由式 (28) 和 (32) 计算相对财富的方差为

$$\mathrm{Var}(V_T)=E(V_T^2)-(E(V_T))^2=$$
$$(\gamma+\lambda^2\zeta)-(\alpha+\lambda\beta)^2. \quad (33)$$

定理 4 在最优投资策略下, 终期相对财富的期望和方差分别为

$$E(V_T)=\alpha+\lambda\beta, \tag{34}$$

$$\mathrm{Var}(V_T)=(\gamma+\lambda^2\zeta)-(\alpha+\lambda\beta)^2. \tag{35}$$

由于 $\mathrm{Var}(V_T-1)=\mathrm{Var}(V_T)$, 给定期望相对财富 d 下, 由式 (35) 计算出的 $\mathrm{Var}(V_T)$ 便是积极的投资管理者获得超额相对收益 $d-1$ 所要承担的积极风险. 由式 (28) 得到 $\lambda\beta=E(V_T)-\alpha$, 代入式 (33) 可得到前沿边界.

定理 5　问题 (P1) 的前沿边界为

$$\mathrm{Var}(V_T)=\frac{\zeta-\beta^2}{\beta^2}\Big(E(V_T)-\frac{\alpha\zeta}{\zeta-\beta^2}\Big)^2+\gamma-\frac{\zeta\alpha^2}{\zeta-\beta^2}. \tag{36}$$

因此在方差-均值空间里, 投资组合的前沿边界是一条抛物线, 有效前沿是 $E(V_T)>\alpha\zeta/(\zeta-\beta^2)$ 部分. 特别地, 当 $m=n$, $\rho_t^{\mathrm{T}}\rho_t=1$ 时, 问题 (P1) 的前沿边界为

$$\mathrm{Var}(V_T)=\frac{\mathrm{e}^{-\int_0^T\theta_t^2\mathrm{d}t}}{1-\mathrm{e}^{-\int_0^T\theta_t^2\mathrm{d}t}}(E(V_T)-\mathrm{e}^{\int_0^T k_t\mathrm{d}t})^2, \tag{37}$$

或

$$E(V_T)=\pm\sqrt{\frac{1-\mathrm{e}^{-\int_0^T\theta_t^2\mathrm{d}t}}{\mathrm{e}^{-\int_0^T\theta_t^2\mathrm{d}t}}}\sigma(V_T)+\mathrm{e}^{\int_0^T k_t\mathrm{d}t}. \tag{38}$$

此时, 在方差-均值空间里, 投资组合的前沿边界是一条以 $(0,\mathrm{e}^{\int_0^T k_t\mathrm{d}t})$ 为顶点的抛物线, 有效前沿是抛物线的上半支; 在标准差-均值空间里, 前沿边界是以 $(0,\mathrm{e}^{\int_0^T k_t\mathrm{d}t})$ 为起点的两条射线, 有效前沿是上面的射线, 这与单期经典的均值方差模型的前沿边界和有效前沿具有类似的形式.

4　实证分析

选取上海证券交易所上市的 4 支股票: 中国联通 (600050)、羚锐制药 (600285)、信雅达 (600571)、伊利股份 (600887), 并以上证综合指数 (000001) 作为基准. 选取从 2010 年 6 月 1 日～2011 年 5 月 11 日所有交易日的原始数据, 得到 226 个日毛对数收益率样本. 根据数据计算出股票指数的期望收益率和标准差, 并进行年化, 计算出它们之间的相关系数, 进而计算协方差矩阵, 利用 Cholesky 分解得到波动率矩阵. 取当期银行一年期定期存款利率为无风险资产年收益率, 投资计划期 $T=1$, 相关参数的计算结果如下:

$$r_t=0.0275,\ b_t=(0.2711,0.3785,0.5069,0.5336)^{\mathrm{T}},$$

$$\sigma_t=\begin{bmatrix}0.3155&0&0&0\\0.1276&0.4886&0&0\\0.1302&0.1716&0.4468&0\\0.0776&0.2250&0.0534&0.3822\end{bmatrix},$$

$$u_t=0.2175,\ v_t=0.2474,$$

$$\rho_t=(0.6205,0.5037,0.4740,0.2673)^{\mathrm{T}}.$$

此时市场为完全市场. 假定投资者的期望相对收益 $d=1.2$, 则可由式 (29) 得到相应的风险容忍度 $\lambda=1.2267$, 由式 (25) 计算最优投资策略为

$$x_t^*=\Big(\frac{1.2267}{V_t}\mathrm{e}^{0.1281(t-1)}-1\Big)\times(1.2628,-0.389,0.9703,1.8483)^{\mathrm{T}}+(0.3076,0.0905,0.2418,0.1730)^{\mathrm{T}}.$$

特别地, 当 $t=0$ 时, 投资于 4 支股票的最优比例为 $x_t^*=(0.4077,0.0596,0.3187,0.3195)^{\mathrm{T}}$, 投资于无风险资产的最优比例为 -0.1055.

当市场为不完全市场时, 考虑收益率比较高的后 3 支股票, 此时的波动率矩阵为

$$\sigma_t=\begin{bmatrix}0.1276&0.4886&0&0\\0.1302&0.1716&0.4468&0\\0.0776&0.2250&0.0534&0.3822\end{bmatrix}.$$

假定投资者的期望相对收益 $d=1.2$, 则由式 (29) 得到 $\lambda=1.2540$, 由式 (25) 计算最优投资策略为

$$x_t^*=\Big(\frac{1.2540}{V_t}\mathrm{e}^{0.1016(t-1)}-1\Big)\times(-0.2595,1.122,1.8696)^{\mathrm{T}}+(0.1220,0.2788,0.1782)^{\mathrm{T}}.$$

特别地, 当 $t=0$ 时, 投资于 3 支股票的最优比例为 $x_t^*=(0.0875,0.4278,0.4266)^{\mathrm{T}}$, 投资于无风险资产的最优比例为 0.0581.

图 1 和图 2 分别为在完全市场和不完全市场情况下, 当 $d=1.2$, $t=0.5$ 时, 风险资产中投资于最优增长组合和基准组合的比例 (分别为 $a_t, 1-a_t$) 随相对财富变化的情况. 可以看出, V_t 越小, 为了追求更高的收益, 投资于最优增长组合的比例越大, 甚至卖空基准组合; 反之, V_t 越大, 为了保证获得基准组合收益

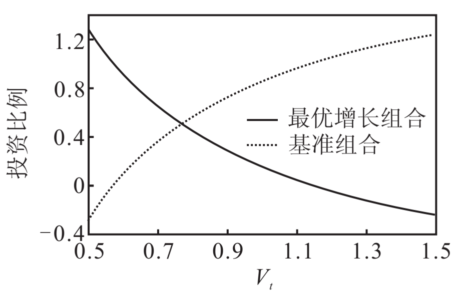

图 1　完全市场下投资于最优增长组合和基准组合比例

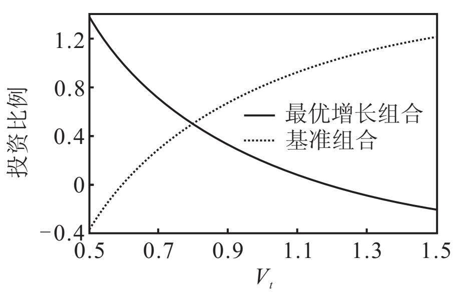

图 2　不完全市场下投资于最优增长组合和基准组合比例

和较小的跟踪误差, 投资于基准组合的比例越大, 甚至卖空最优增长组合.

图 3 为完全市场和不完全市场情况下的前沿边界和有效前沿. 可以看出, 对于相同的期望相对收益, 如果市场是不完全的, 则投资者将承担更大的风险. 图 4 为在不完全市场下当 $t = 0.5$ 时, 期望相对收益 d 对于投资策略的影响, 其中 a_t 为风险资产中投资于最优增长组合的比例. 分别取 $d = 1.2, 1.25, 1.3$, 此时风险容忍度 λ 的值分别为 1.254 0, 1.326 7, 1.399 4. 可以看出, 要求的期望相对收益越大, 相应的风险容忍度越大, 投资于最优增长组合的比例也越大, 以便获取更高的收益来实现期望目标, 同时也要承担更大的风险 (跟踪误差).

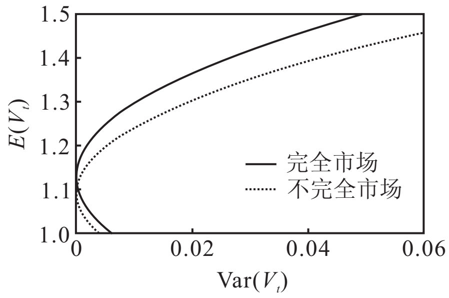

图 3 前沿边界和有效前沿

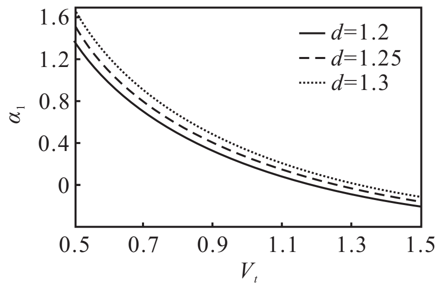

图 4 d 对投资策略的影响

5 结 论

本文研究了具有随机基准的连续时间均值-方差投资组合决策问题, 该模型可以理解为一种新型动态跟踪误差投资组合问题. 利用随机动态规划方法给出了最优投资策略的显式表达式, 结果表明, 最优投资策略符合三基金分离定理, 即由无风险资产、最优增长组合和基准组合构成. 其中: 投资于最优增长组合是为了获得尽可能大的收益, 投资于基准组合是为了保证获得基准组合收益和较小的跟踪误差. 与 Merton 标准的效用函数最大化问题展现出定常数比例最优投资策略不同, 即使市场参数都为常数, 投资于风险资产的最优比例也是关于时间和相对财富的函数, 因此投资策略更符合投资实践. 进一步分析了投资组合的前沿边界和有效前沿, 发现与经典的单期均值-方差模型具有类似的形式. 最后通过实证分析对相关结论进行了说明.

参考文献(References)

[1] Roll Richard. A mean-variance analysis of trackingerror[J]. J of Portfolio Management, 1992, 18(4): 13-22.

[2] Jorion P. Portfolio optimization with tracking error constraints[J]. Financial Analysts J, 2003, 59(5): 70-82.

[3] 方毅, 张屹山. 跟踪误差下积极资产组合投资的风险约束机制[J]. 中国管理科学, 2006, 14(4): 19-24.
(Fang Y, Zhang Y S. Risk control mechanism of active portfolio investment with tracking error constraints[J]. Chinese J of Management Science, 2006, 14(4): 19-24.)

[4] Wang M. Multiple-benchmark and multiple-portfolio optimization[J]. Financial Analysts J, 1999, 55(1): 63-72.

[5] Muralidhar A. Optimal risk-adjusted portfolios with multiple managers[J]. The J of Portfolio Management, 2001, 27(3): 97-104.

[6] Rudolf Markus, Wolter Hans-jurgen, Heinz Zimmermann. A linear model for tracking error minimization[J]. J of Banking and Finance, 2000, 23(1): 85-103.

[7] 马永开, 唐小我. 基于市场基准的多因素证券组合投资决策模型研究[J]. 系统工程理论与实践, 2004, 24(7): 30-37.
(Ma Y K, Tang X W. A study on a multi-factor model of portfolio choice with benchmark[J]. Systems Engineering Theory and Practice, 2004, 24(7): 30-37.)

[8] 高莹, 黄小原. 具有 VaR 约束的跟踪误差投资组合鲁棒优化模型[J]. 中国管理科学, 2007, 15(1): 1-5.
(Gao Y, Huang X Y. Robust optimal tracking error portfolio models based on VaR[J]. Chinese J of Management Science, 2007, 15(1): 1-5.)

[9] Gordon J Alexander. Active portfolio management with benchmarking: Adding a Value-at-Risk constraint[J]. J of Economic Dynamics and Control, 2008, 32(3): 779-820.

[10] 荣喜民, 夏江山. 基于 CVaR 约束的指数组合优化模型及实证分析[J]. 数理统计与管理, 2007, 26(4): 621-628.
(Rong X M, Xia J S. Index portfolio optimization model with CVaR constraints and a practical analysis[J]. Application of Statistics and Management, 2007, 26(4): 621-628.)

[11] Alexandre M Baptista. Optimal delegated portfolio management with background risk[J]. J of Banking and Finance, 2008, 32(6): 977-985.

[12] Tepla L. Optimal investment with minimum performance constraints[J]. J of Economic Dynamic and Control, 2001, 25(10): 1629-1645.

[13] Basak S, Shapiro A. Value-at-Risk based risk management: Optimal policies and asset prices[J]. Review of Financial Studies, 2001, 14(2): 371-405.

[14] Gabih A, Sass J, Wunderlich R. Utility maximization with bounded shortfall risks in an HMM for the stock returns[C]. Proc of the 2nd Brazilian Conf on Statistical Modelling in Insurance and Finance. Sao Paulo: University of Sao Paulo, 2005: 116-121.

[15] Browne S. Beating a moving target: Optimal portfolio strategies for outperforming a stochastic benchmark[J]. Finance and Stochastics, 1999, 3(3): 275-294.

[16] Browne S. Risk-constrained dynamic active portfolio management[J]. Management Science, 2000, 46(9): 1188-1199.

[17] Zhao Yong-gan. A dynamic model of active portfolio management with benchmark orientation[J]. J of Banking and Finance, 2007, 31(11): 3336-3356.

[18] 王亦奇, 刘海龙, 刘富兵. 灵活收益保证设定形式下的最优投资策略[J]. 系统工程理论与实践, 2011, 31(6): 1014-1020.
(Wang Y Q, Liu H L, Liu F B. Optimal investment strategies under flexible return guarantee[J]. Systems Engineering Theory and Practice, 2011, 31(6): 1014-1020.)

[19] Li D, Ng W L. Optimal dynamic portfolio selection: Multi-period mean-variance formulation[J]. Mathematical Finance, 2000, 10(3): 387-406.

[20] 许云辉, 李仲飞. 基于收益序列相关的动态投资组合选择-动态均值方差模型[J]. 系统工程理论与实践, 2008, 28(8): 124-131.
(Xu Y H, Li Z F. Dynamic portfolio selection based on serieally correlated return-dynamic mean-variance formulation[J]. Systems Engineering Theory and Practice, 2008, 28(8): 124-131.)

[21] Zhou X Y, Li D. Continuous-time mean-variance portfolio selection: A stochastic LQ framework[J]. Applied Mathematics and Optimization, 2000, 42(1): 19-33.

[22] Li X, Zhou X Y, Lim A E B. Dynamic mean-variance portfolio selection with no shorting constraints[J]. SIAM J on Control and Optimization, 2002, 40(5): 1540-155.

[23] Chiu M C, Li D. Asset and liability management under a continuous time mean-variance optimization framework[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2006, 39(3): 330-355.

[24] Xie S X, Li Z F, Wang S Y. Continuous-time portfolio selection with liability: Mean-variance model and stochastic LQ approach[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2008, 42(3): 943-953.

[25] 刘海飞, 朱洪亮, 吴承尧. 协同持续下资产组合最优决策理论与实证研究[J]. 管理科学学报, 2010, 13(9): 37-46.
(Liu H F, Zhu H L, Wu C Y. Theoretical and empirical research on optimization of portfolio decision-making with co-persistence[J]. J of Management Sciences in China, 2010, 13(9): 37-46.)

[26] Merton R. Continuous-time finance[M]. Cambridge: Basil Blackwell, 1990: 128-164.

[27] Long J. The numeraire portfolio[J]. J of Financial Economics, 1990, 26(1): 29-69.

[28] Cox J, Huang C. Optimum consumption and portfolio policies when asset prices follow a diffusion process[J]. J of Economic Theory, 1989, 49(1): 33-83.

(责任编辑：郑晓蕾)