

一种景物平面法向已知条件下的单应矩阵快速分解算法

李国栋^{a,b}, 田国会^b, 王洪君^a, 周风余^b

(山东大学 a. 信息科学与工程学院, b. 控制科学与工程学院, 济南 250100)

摘要: 针对机器人混合视觉伺服控制中的摄像机位姿估计问题, 分析欧氏单应矩阵的基本性质, 提出一种景物平面法向已知情况下的欧氏单应矩阵快速分解算法. 仿真实验结果表明, 所提出的算法实现简单, 避免了矩阵奇异值分解运算和从多组分解结果中确定惟一解的过程, 能够较好地满足视觉伺服控制系统的实时性要求.

关键词: 位姿估计; 单应分解; 混合视觉伺服

中图分类号: TP24.2

文献标志码: A

A fast homography decomposition algorithm in the case of known normal to the scene plane

LI Guo-dong^{a,b}, TIAN Guo-hui^b, WANG Hong-jun^a, ZHOU Feng-yu^b

(a. School of Information Science and Engineering, b. School of Control Science and Engineering, Shandong University, Ji'nan 250100, China. Correspondent: TIAN Guo-hui, E-mail: g.h.tian@sdu.edu.cn)

Abstract: For the purpose of solving pose estimation problem in robot hybrid visual servo applications, the fundamental properties of Euclidean homography matrix are analyzed, and a fast homography decomposition algorithm in the case of known normal to the scene plane is proposed. Experimental results show that the proposed algorithm can be simply implemented, and because of the avoidance of time-consuming singular value decomposition and the process of distinguishing the unique one from multiple solutions, the algorithm can well meet the real-time requirement of the visual servo system.

Key words: pose estimation; homography decomposition; hybrid visual servoing

0 引言

单应矩阵的计算和分解在视频图像分析、视觉测量和视觉伺服, 尤其是混合视觉伺服领域得到了广泛的应用. 混合视觉伺服(2-1/2D视觉伺服)最早由Malis等^[1-3]提出, 其初衷是为了克服传统基于图像和基于位置的视觉伺服方法存在的缺点. 混合视觉伺服需要在线实时计算当前图像特征与期望图像特征间的单应矩阵 H , 并对其进行分解, 以恢复摄像机的相对位姿, 利用计算和分解结果构造任务函数, 并设计伺服控制律. 因此, 单应矩阵的计算和分解已成为影响机器人混合视觉伺服控制效果的关键环节.

为了求解单应分解问题, Faugeras等^[4]和Zhang等^[5]分别提出了两种不同的高度依赖矩阵奇异值分解(SVD)的方法, 两种方法均需分解出八组数学解, 然后通过施加两个物理约束得到最终的两组物理可

实现解. Malis等^[6]提出了一种完全避免SVD的解析法, 该方法能够得到两组物理可实现解之间以及它们与单应矩阵各元素之间的解析关系, 但在确定归一化单应阵的尺度因子时需要求解复杂的一元三次方程. 此外, Fang等^[7]研究了固联于移动机器人上的摄像机采集到的图像间退化单应阵分解问题, 成功地避开了SVD, 得到了惟一解, 并将其应用到移动机器人的视觉导航和定位中. Zhang等^[8]在此基础上, 提出了一种退化单应的快速分解法, 进一步降低了运算负担. 可以看出, 文献[4-6]计算复杂耗时, 分解结果存在惟二性, 在实际的视觉伺服应用中需要施加额外的先验信息才能将错误剔除. 文献[7-8]仅适用于退化单应, 应用场合严重受限.

本文考虑到机器人对平面物体进行视觉伺服定位和平动跟踪的过程中, 3D景物平面在期望摄像机

收稿日期: 2012-12-14; 修回日期: 2013-05-07.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61075092); 国家863计划项目(2006AA040206, 2009AA04Z220).

作者简介: 李国栋(1981-), 男, 博士后, 从事视觉伺服、机器视觉的研究; 田国会(1969-), 男, 教授, 博士生导师, 从事服务机器人、智能空间、现代物流系统的优化与调度等研究.

坐标系中的法向 ${}^d\mathbf{n}$ 保持不变,且只要机器人在视觉伺服的初始阶段作两组随机运动,并采集两幅视图,即可结合期望视图计算出这一重要特征,通过分析单应矩阵的性质,对 ${}^d\mathbf{n}$ 已知的情况提出一种单应矩阵快速分解算法.通过各类算法耗时比较和混合视觉伺服仿真实验表明,所提出算法计算简单快捷,能够较好地满足视觉伺服系统的实时性要求.

1 单应矩阵基本性质

图1所示为单应矩阵的射影模型.

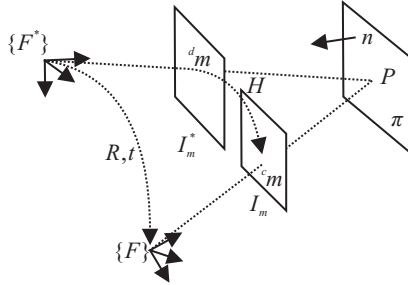


图1 单应矩阵的射影模型

当前摄像机坐标系和期望摄像机坐标系分别为 $\{F\}$ 和 $\{F^*\}$, I_m 和 I_m^* 分别为对应两摄像机的像平面.两坐标系间的位姿关系描述为

$${}^F T_{F^*} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

记 $\{F\}$, $\{F^*\}$ 的原点 o , o^* 到目标平面的距离为 d 和 d^* , $\{F\}$ 和 $\{F^*\}$ 中3D景物平面 π 的法向量为 ${}^c\mathbf{n}$ 和 ${}^d\mathbf{n}$,则 π 在 $\{F\}$ 和 $\{F^*\}$ 中可分别记为 ${}^c\pi = [{}^c\mathbf{n}^T, d]^T$ 和 ${}^d\pi = [{}^d\mathbf{n}^T, d^*]^T$.记 π 上的3D点 P 在像平面 I_m , I_m^* 上的归一化射影坐标为 ${}^c\mathbf{m}$, ${}^d\mathbf{m}$,则满足 ${}^c\mathbf{m} = \mathbf{H}^d\mathbf{m}$ 的欧氏单应为

$$\mathbf{H} = \mathbf{R} - \frac{\mathbf{t}^d\mathbf{n}^T}{d^*}. \quad (2)$$

根据射影重构定理可求得 \mathbf{H} 的逆为

$$\mathbf{H}^{-1} = \mathbf{R}^T \left(\mathbf{I} + \frac{\mathbf{t}^d\mathbf{n}^T\mathbf{R}^T}{d^* - \mathbf{d}^T\mathbf{n}^T\mathbf{R}^T\mathbf{t}} \right), \quad (3)$$

进而得到性质1.

性质1 已知景物平面 π 在 $\{F^*\}$ 上为 ${}^d\pi = [{}^d\mathbf{n}^T, d^*]^T$,则它在 $\{F\}$ 中为

$${}^c\mathbf{n} = \mathbf{R}^d\mathbf{n}, \quad d = d^* - \mathbf{c}\mathbf{n}^T\mathbf{t}. \quad (4)$$

对形如式(2)的单应 \mathbf{H} 求行列式,得到

$$\det \left(\left(\mathbf{I}_{3 \times 3} - \frac{\mathbf{t}^c\mathbf{n}^T}{d^*} \right) \mathbf{R} \right) = 1 - \frac{\mathbf{c}\mathbf{n}^T\mathbf{t}}{d^*} = \frac{d}{d^*},$$

由此得到性质2.

性质2 $\{F^*\}$ 和 $\{F\}$ 的原点到景物平面 π 的距离 d 和 d^* 的比率为

$$r = d/d^* = \det(\mathbf{H}) > 0. \quad (5)$$

记3D景物平面 π 上点 P 在 $\{F\}$ 和 $\{F^*\}$ 上的深度分别为 cZ , dZ ,则 ${}^dZ^d\mathbf{m}$, ${}^cZ^c\mathbf{m}$ 分别为 P 在 $\{F^*\}$ 和

$\{F\}$ 中的3D点的世界坐标 ${}^d\tilde{P}$, ${}^c\tilde{P}$,因其位于 π 上,必满足 ${}^d\mathbf{n}^T{}^d\tilde{P} + d^* = 0$ 和 ${}^c\mathbf{n}^T{}^c\tilde{P} + d = 0$.令 \mathbf{H} 左乘 ${}^d\tilde{P}$,得

$$\mathbf{H}^d\tilde{P} = \mathbf{R}^d\tilde{P} - \mathbf{t} \frac{{}^d\mathbf{n}^T{}^d\tilde{P}}{d^*} = \mathbf{R}^d\tilde{P} + \mathbf{t} = {}^c\tilde{P},$$

由此得到性质3.

性质3 平面 π 上3D点 P 在 $\{F\}$ 和 $\{F^*\}$ 中的深度 cZ 和 dZ 的比率为

$$\rho = \frac{{}^cZ}{{}^dZ} = \frac{\|\mathbf{H}^d\mathbf{m}\|_2}{\|{}^c\mathbf{m}\|_2}. \quad (6)$$

记 $[\mathbf{a}]_{\times}$ 为列矢量 \mathbf{a} 张成的反对称矩阵,则有如下性质成立.

性质4 对于单应矩阵 \mathbf{H} ,有

$$[{}^d\mathbf{n}]_{\times}\mathbf{H}^T = [{}^d\mathbf{n}]_{\times}\mathbf{R}^T. \quad (7)$$

2 单应矩阵计算与分解

2.1 单应矩阵计算

由性质3可知,第 i 个图像点的当前和归一化射影坐标满足

$${}^c\mathbf{m}_i = \sigma_i \mathbf{H}^d\mathbf{m}_i, \quad (8)$$

其中 $\sigma_i = {}^dZ_i/{}^cZ_i$.令 \mathbf{H} 被缩放因子 α 单位化为 \mathbf{H}' ,使 \mathbf{H}' 的 F -范数为1,有

$$\mathbf{H}' = \alpha\mathbf{H}, \quad \|\mathbf{H}'\|_F = 1. \quad (9)$$

将式(9)代入(8),得

$${}^c\mathbf{m}_i = \frac{\sigma_i}{\alpha} \mathbf{H}'^d\mathbf{m}_i. \quad (10)$$

记 \mathbf{H}' 的第 j 行为 $\mathbf{h}'^j{}^T$, ${}^c\mathbf{m}_i = ({}^c x_i, {}^c y_i, 1)$,等式(10)左右两端作矢量叉乘,可以消去未知尺度因子,有

$$\begin{bmatrix} 0^T & -{}^d\mathbf{m}_i^T & {}^c y_i {}^d\mathbf{m}_i^T \\ {}^d\mathbf{m}_i^T & 0^T & -{}^c x_i {}^d\mathbf{m}_i^T \\ -{}^c y_i {}^d\mathbf{m}_i^T & {}^c x_i {}^d\mathbf{m}_i^T & 0^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{h}'^1 \\ \mathbf{h}'^2 \\ \mathbf{h}'^3 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_i \mathbf{h}' = 0, \quad (11)$$

其中系数矩阵 $\mathbf{A}_i \in R^{3 \times 9}$.可知,最少在已知4组共面匹配点的归一化射影坐标 $\{{}^c\mathbf{m}_i \leftrightarrow {}^d\mathbf{m}_i\} (i = 1, 2, 3, 4)$ 时可构造矩阵 $\mathbf{A} = [\mathbf{A}_1^T \ \mathbf{A}_2^T \ \mathbf{A}_3^T \ \mathbf{A}_4^T]^T$,满足 $\|\mathbf{h}'\|_2 = 1$ 条件的 \mathbf{h}' 即为方阵 $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ 最小特征值对应的单位特征矢量.至此,求得了满足 F -范数为1约束的单应矩阵 \mathbf{H}' ,结合性质2,可进一步约束至 $\det(\mathbf{H}') > 0$,则 \mathbf{H} 与 \mathbf{H}' 间仅相差一个大于零的尺度因子 α .

2.2 单应矩阵分解

由式(7)和(9)可得

$$\frac{1}{\alpha} [{}^d\mathbf{n}]_{\times}\mathbf{H}'^T = [{}^d\mathbf{n}]_{\times}\mathbf{R}^T. \quad (12)$$

记 $\mathbf{R}_{k,\theta}$ 是以单位矢量 \mathbf{k} 为转轴旋转 θ 形成的旋转矩阵,根据旋转变换通式,有

$$\mathbf{R}_{k,\theta} = \cos\theta \mathbf{I}_{3 \times 3} + \sin\theta [\mathbf{k}]_{\times} + (1 - \cos\theta) \mathbf{k}\mathbf{k}^T. \quad (13)$$

记 $\mathbf{e}_3 = [0 \ 0 \ 1]^T$,选择转轴和转角分别为

$$\mathbf{k}_1 = \frac{d\mathbf{n} \times \mathbf{e}_3}{\|d\mathbf{n} \times \mathbf{e}_3\|_2}, \theta_1 = \arccos d\mathbf{n}^T \mathbf{e}_3. \quad (14)$$

按照式(13)构造旋转矩阵 $\mathbf{R}_{k_1, \theta_1}$, 得到

$$\mathbf{R}_{k_1, \theta_1} d\mathbf{n} = \mathbf{e}_3. \quad (15)$$

将 $\mathbf{n} = \mathbf{R}_{k_1, \theta_1}^T \mathbf{e}_3$ 代入式(12), 并根据 Nanson 公式 $[\mathbf{A}t]_{\times} \mathbf{A} = \mathbf{A}^{-T} [t]_{\times}$ 得到

$$\frac{1}{\alpha} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{R}_{k_1, \theta_1} \mathbf{H}'^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{R}_{k_1, \theta_1} \mathbf{R}^T. \quad (16)$$

式(16)表明, $\mathbf{R}_{k_1, \theta_1} \mathbf{H}'^T / \alpha$ 和 $\mathbf{R}_{k_1, \theta_1} \mathbf{R}^T$ 的前两行相等, 且两行为正交单位向量. 记

$$\mathbf{R}_{k_1, \theta_1} \mathbf{H}'^T = [\mathbf{r}_1 \ \mathbf{r}_2 \ \mathbf{c}]^T, \quad (17)$$

尺度因子 α 可以确定为

$$\alpha = \frac{\|\mathbf{r}_1\|_2 + \|\mathbf{r}_2\|_2}{2}, \quad (18)$$

则有

$$\mathbf{R} = \left[\frac{1}{\alpha} \mathbf{r}_1 \ \frac{1}{\alpha} \mathbf{r}_2 \ \frac{1}{\alpha^2} (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) \right] \mathbf{R}_{k_1, \theta_1}, \quad (19)$$

$$\frac{t}{d^*} = \left(\mathbf{R} - \frac{1}{\alpha} \mathbf{H}' \right) d\mathbf{n}. \quad (20)$$

由以上分解过程可知, 本文所提出的算法计算简单, 且始终没有用到 SVD.

3 混合视觉伺服控制策略

由式(8)可知

$$(\mathbf{H} - \mathbf{I}_{3 \times 3}) d\mathbf{m} = \frac{c\mathbf{P} - d\mathbf{P}}{dZ}. \quad (21)$$

记 $\mathbf{e}_v = (\mathbf{H} - \mathbf{I}_{3 \times 3}) d\mathbf{m}$, 根据刚体运动学模型可求得其变化率与摄像机运动速度 $\mathbf{V}_c = [v_c^T \ \omega_c^T]^T$ 间的关系为

$$\dot{\mathbf{e}}_v = \frac{c\dot{\mathbf{P}}}{dZ} = \left[-\frac{1}{dZ} \mathbf{I}_{3 \times 3} [\mathbf{e}_v + d\mathbf{m}]_{\times} \right] \mathbf{V}_c. \quad (22)$$

显然, \mathbf{e}_v 由图像特征构造, 可用于控制摄像机的平移. 另一方面, 利用式(23)可求得 \mathbf{R} 的等效转轴 \mathbf{u} 和等效转角 θ 分别为

$$\cos \theta = \frac{\text{trace}(\mathbf{R}) - 1}{2},$$

$$\sin \theta = \pm \frac{1}{2} \|\mathbf{R} - \mathbf{R}^T\|_2, [\mathbf{u}]_{\times} = \frac{\mathbf{R} - \mathbf{R}^T}{2 \sin \theta}. \quad (23)$$

构造矢量 $\mathbf{e}_\omega = -\mathbf{u}\theta$ 控制摄像机旋转部分, 记

$$\mathbf{J}_\omega = \left(\mathbf{I}_{3 \times 3} - \frac{\theta}{2} [\mathbf{u}]_{\times} + \left(1 - \frac{\text{sinc} \theta}{\text{sinc}^2 \frac{\theta}{2}} \right) [\mathbf{u}]_{\times}^2 \right), \quad (24)$$

其中 $\text{sinc} \theta = \sin \theta / \theta$, 则其微分为

$$\dot{\mathbf{e}}_\omega = [\mathbf{0} \ \mathbf{J}_\omega] \mathbf{V}_c. \quad (25)$$

构造任务函数 $\mathbf{e} = [\mathbf{e}_v^T \ \mathbf{e}_\omega^T]^T$, 并令其指数收敛 $\dot{\mathbf{e}} = -\lambda \mathbf{e}$, 则摄像机的控制输入可取为

$$\mathbf{V}_c = -\lambda \begin{bmatrix} -dZ \mathbf{I}_{3 \times 3} & dZ [\mathbf{e}_v + d\mathbf{m}]_{\times} \mathbf{J}_\omega^{-1} \\ 0 & \mathbf{J}_\omega^{-1} \end{bmatrix} \mathbf{e}, \quad (26)$$

展开得

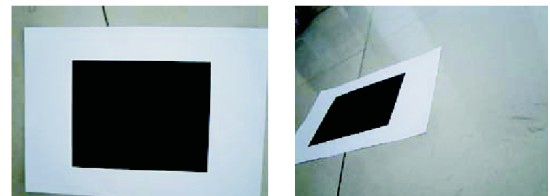
$$\omega_c = -\lambda \mathbf{J}_\omega^{-1} \mathbf{e}_\omega,$$

$$\mathbf{v}_c = -\lambda dZ (-\mathbf{e}_v + [\mathbf{e}_v + d\mathbf{m}]_{\times} \mathbf{J}_\omega^{-1} \mathbf{e}_\omega). \quad (27)$$

式(27)中存在保持不变的未知量 dZ , 其取值对系统稳定性的影响较小, 仅影响摄像机平移分量的收敛速度.

4 实验分析

图2为3D景物平面的两幅视图, 图2(a)为对应期望摄像机坐标系 $\{F^*\}$ 的期望视图, 图2(b)为对应当前摄像机坐标系 $\{F\}$ 的当前视图.



(a) 期望视图 (b) 当前视图

图2 3D景物平面视图

表1为利用本文分解算法和几种经典算法对图2两幅视图的单应进行分解的耗时统计. 参数设置如下: 主频 2.93 GHz 的 Intel Core 2 Duo, 内存 2 G, 计算软件为 Matlab R2007a. 为了减小 CPU 时间片轮转对结果的影响, 在每次测量时均令程序循环执行 10 000 次, 共测量 10 次, 取其平均值作为最终结果.

表1 各种分解方法耗时比较

算法	单应分解/s	惟一解确定/s	合计/s
文献[4]方法	5.385 5	1.653 2	7.038 7
文献[5]方法	5.417 8	1.653 2	7.071 0
文献[6]方法	1.623 9	0.029 1	1.653 0
本文方法	0.865 8	0	0.865 8

由表1可见, 本文方法耗时最少, 且无需利用先验知识对错误的分解结果进行剔除. 在 $\{F^*\}$ 中 $d\mathbf{n} = [-0.053 3 \ -0.123 4 \ -0.990 9]^T$ 的情况下, 由本文提出的算法求得的摄像机位姿为

$${}^F T_{F^*} = \begin{bmatrix} 0.901 6 & 0.016 8 & 0.432 3 & -0.605 5 \\ -0.309 8 & 0.722 5 & 0.618 1 & -0.474 7 \\ -0.301 9 & -0.691 2 & 0.656 6 & 0.638 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

根据上述分解结果设计混合视觉伺服仿真实验, 对第3节提出的控制律进行验证, 建立的 Matlab Simulink 模型如图3所示. 在混合视觉伺服控制律的作用下, 摄像机的运动速度 \mathbf{V}_c 如图4所示. 摄像机在 3D 笛卡尔坐标空间中的运动轨迹如图5所示.

由图3~图5可见, 摄像机在笛卡尔空间中的运动轨迹为一条二次曲线, 且在运动过程中摄像机的光轴始终朝向目标物体, 这保证了视觉伺服过程中目标物不会脱离摄像机视野.

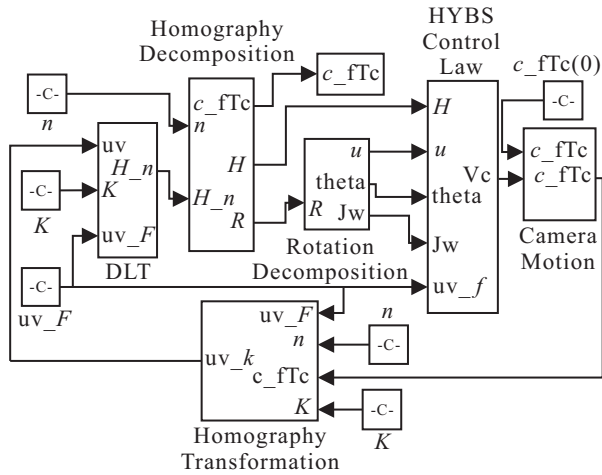
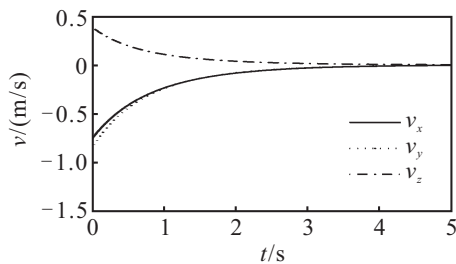
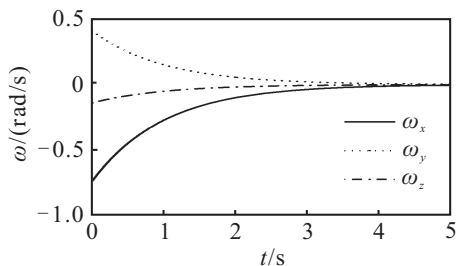


图3 混合视觉伺服控制系统 Simulink 仿真模型



(a) 摄像机线速度



(b) 摄像机角速度

图4 摄像机运动速度

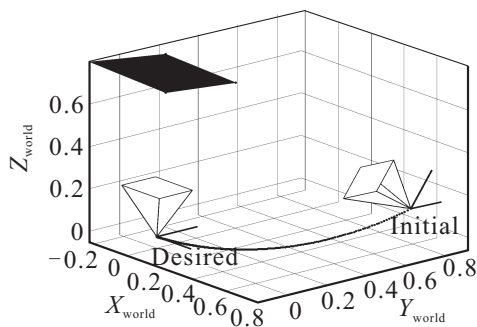


图5 摄像机在笛卡尔空间中的运动轨迹

5 结论

本文对景物平面法向已知情况下的欧氏单应矩阵分解问题进行了研究. 通过分析欧氏单应阵的性质, 提出了一种快速的单应分解算法. 实验结果表明, 所提出算法实现简单, 运行快速, 特别适用于机器人对平面物体进行混合视觉伺服定位或平动跟踪的场合.

本文算法的关键是需要已知景物平面在期望摄像机坐标系中的法向量, 当其估计值与真值之间存在较大误差时, 会对分解结果的精度产生影响. 因此, 如何定量分析平面法向的误差传播规律便成为今后工作中需要解决的问题.

参考文献(References)

- [1] Malis E, Chaumette F, Boudet S. 2-1/2-D visual servoing[J]. IEEE Trans on Robotics and Automation, 1999, 15(2): 238-250.
- [2] Chaumette F, Malis E. 2-1/2-D visual servoing: A possible solution to improve image-based and position-based visual servoing[C]. Proc of IEEE Int Conf on Robotics and Automation. San Francisco, 2000: 630-635.
- [3] Malis E, Chaumette F. 2-1/2-D visual servoing with respect to unknown objects through a new estimation scheme of camera displacement[J]. Int J of Computer Vision, 2000, 37(1): 79-97.
- [4] Faugeras O, Lustman F. Motion and structure from motion in a piecewise planar environment[J]. Int J of Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 1988: 2(3): 485-508.
- [5] Zhang Z, Hanson A R. 3D reconstruction based on homography mapping[C]. ARPA Image Understanding Workshop. Palm Springs, 1996: 1007-1012.
- [6] Malis E, Vargas M. Deeper understanding of the homography decomposition for vision-based control[R]. INRIA: Sophia-Antipolis, 2005.
- [7] Fang Y, Dixon W E, Dawson D M. Homography-based visual servo regulation of mobile robots[J]. IEEE Trans on Systems, Man and Cybernetic, Part B: Cybernetics, 2005, 35(5): 1041-1050.
- [8] Zhang X B, Fang Y C, Ma B J. A fast homography decomposition technique for visual servo of mobile robots[C]. The 27th Chinese Control Conf. Kunming: 2008: 404-409.

(责任编辑: 郑晓蕾)