

## 基于CD-RSF算法的航天器姿态确定

李海君, 赵国荣

(海军航空工程学院 控制工程系, 山东 烟台 264001)

**摘要:** 针对具有模型不确定及初始误差较大的航天器姿态确定系统的滤波问题, 提出一种基于中心差分风险敏感滤波(CD-RSF)算法的航天器姿态确定方法. 该方法利用风险敏感滤波更具鲁棒性的特点来估计模型不确定的航天器姿态, 并利用中心差分求积分法来解决风险敏感器滤波中难以处理的积分. 该方法能够消除由于模型不确定和初始误差大而引起的滤波收敛速度慢, 甚至发散的现象, 使得姿态确定算法更具鲁棒性. 仿真结果验证了所提出方法的有效性.

**关键词:** 航天器姿态确定; 风险敏感滤波; 中心差分; 鲁棒估计

**中图分类号:** V448.22

**文献标志码:** A

## Spacecraft attitude determination based on CD-RSF algorithms

LI Hai-jun, ZHAO Guo-rong

(Department of Control Engineering, Naval Aeronautical and Astronautical University, Yantai 264001, China.

Correspondent: LI Hai-jun, E-mail: 16529531@qq.com)

**Abstract:** A spacecraft attitude determination method based on the CD-RSF algorithm is proposed to solve the filtering problem of the spacecraft attitude determination system with model uncertainty and large initial error. In this method, CD-RSF which is more robust is available to estimate spacecraft attitude with model uncertainty. And center differential is introduced to solve intractable integration in RSF. This method can eliminate the phenomenon of slow filtering convergence and divergence caused by model uncertainty and large initial error, so that the attitude determination algorithm is more robust. The simulation results show the effectiveness of the proposed method.

**Key words:** spacecraft attitude determination; risk-sensitive filtering; central difference; robust estimation

### 0 引言

航天器的姿态确定是航天器控制的前提和基础, 其精度和抗干扰能力直接影响着航天器的控制性能. 扩展卡尔曼滤波(EKF)<sup>[1]</sup>是姿态估计常用的方法, 但该方法对于非线性较强、模型不确定及初始误差较大的系统滤波效果较差. 无迹卡尔曼滤波(UKF)<sup>[2-3]</sup>用于航天器姿态确定领域, 对于解决非线性强和较大初始误差取得了较好的效果, 但对于模型不确定系统的滤波鲁棒性不强. 粒子滤波(PF)算法<sup>[4-5]</sup>用于航天器姿态确定领域, 解决了非线性非高斯系统的滤波问题, 但该方法计算量大, 很难满足实时性的要求. 近年来, 又有一些新的滤波算法应用于姿态确定领域, 如高斯和滤波算法<sup>[6-7]</sup>、多模自适应估计算法<sup>[8]</sup>等, 这些算法分别针对不同滤波环境解决了相应的问题, 但对于航天器姿态确定系统的不确定性和初始误差较大情况

的滤波方法目前研究得较少, 为此, 本文研究了运用风险敏感滤波(RSF)的航天器姿态确定方法.

对于初始误差较大和具有模型不确定的系统而言, 风险敏感滤波与传统的均方滤波相比更具鲁棒性<sup>[9-10]</sup>. 在RSF中, 设计者选择的风险敏感参数, 提供了一个权衡标准模型滤波性能与对模型不确定性鲁棒性之间的设计工具. 文献[11]将风险敏感滤波算子融入无迹粒子滤波中, 以消除粒子滤波的采样枯竭现象, 提高滤波的鲁棒性, 并将该方法用于跟踪问题, 取得了较好的效果. 文献[12]利用中心差分卡尔曼滤波(CDKF)和高斯混合概率假设密度滤波, 对后验多目标状态一阶统计量进行估计, 并通过递推更新得到目标状态, 以实现对多个目标的跟踪, 取得了较好的跟踪效果, 但该方法没有考虑较大误差和模型不确定系统的情况.

收稿日期: 2012-12-17; 修回日期: 2013-09-10.

基金项目: 总装备部预研基金项目(51309060401).

作者简介: 李海君(1978-), 男, 博士生, 从事导航制导与控制的研究; 赵国荣(1963-), 男, 教授, 博士生导师, 从事导航制导与控制等研究.

尽管用非线性模型建立 RSF 递归式是可以做到的<sup>[13]</sup>,但它却包含难以处理的积分.对此,本文基于中心差分求积分法提出基于中心差分的风险敏感滤波器(CD-RSF),并将其应用于航天器姿态确定上.该算法将中心差分求积分法与风险敏感滤波相结合,以消除大干扰下所导致的误差大及模型不确定所引起的其他滤波方法收敛速度慢,甚至发散现象,从而提高了滤波器的收敛速度和鲁棒性,并通过数值仿真验证了算法的有效性.

## 1 航天器姿态确定模型

### 1.1 状态方程

采用姿态的动力学和运动学方程来描述航天器的姿态变化,其动力学方程为

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{J}^{-1}\{\mathbf{T}_c - \dot{\mathbf{h}}_w - [\boldsymbol{\omega} \times] \mathbf{h}_w - [\boldsymbol{\omega} \times] \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} + \Delta \mathbf{T}\}. \quad (1)$$

其中:  $\boldsymbol{\omega} = [\omega_x, \omega_y, \omega_z]^T$  为角速度,  $\mathbf{J}$  为航天器的转动惯量,  $\mathbf{T}_c$  为控制力矩,  $\Delta \mathbf{T}$  为干扰力矩,  $\mathbf{h}_w$  为角动量.

采用罗德里格参数(MRPs)来描述航天的姿态,其运动学方程为

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{1}{4}[(1 - \|\mathbf{p}\|^2)\boldsymbol{\omega} - 2[\boldsymbol{\omega} \times] \mathbf{p} + 2\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{p} \mathbf{p}^T]. \quad (2)$$

定义状态  $\mathbf{x} = [\mathbf{p}^T \ \boldsymbol{\omega}^T \ \Delta \mathbf{T}_c^T]^T$ , 由式(1)和(2),得状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{G} \mathbf{w}_T. \quad (3)$$

其中

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}} = \frac{1}{4}[(1 - \|\mathbf{p}\|^2)\boldsymbol{\omega} - 2[\boldsymbol{\omega} \times] \mathbf{p} + 2\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{p} \mathbf{p}^T] \\ \mathbf{J}^{-1}\{\mathbf{T}_c - \dot{\mathbf{h}}_w - [\boldsymbol{\omega} \times] \mathbf{h}_w - [\boldsymbol{\omega} \times] \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} + \Delta \mathbf{T}_c\} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{4 \times 3} \\ \mathbf{J}^{-1} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix}.$$

### 1.2 观测方程

采用磁强计作为测量敏感器,其观测方程为

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k) = \mathbf{A}(\mathbf{p}_k) \mathbf{r}_k + \mathbf{v}_k. \quad (4)$$

其中:  $\mathbf{r}_k$  为参考矢量;  $\mathbf{y}_k$  为测量矢量;  $\mathbf{A}(\mathbf{p}_k)$  为状态转移矩阵,即

$$\mathbf{A}(\mathbf{p}_k) = \mathbf{I}_{3 \times 3} - \frac{4(1 - \|\mathbf{p}_k\|^2)}{(1 + \|\mathbf{p}_k\|^2)} [\mathbf{p}_k \times] + \frac{8[\mathbf{p}_k \times]^2}{(1 + \|\mathbf{p}_k\|^2)^2}. \quad (5)$$

当有多个矢量时,利用 QUEST 法来实现数据压缩,即定义

$$\mathbf{y}_k = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_{1:N,k}) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(\mathbf{p}) \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{A}(\mathbf{p}) \mathbf{r}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{A}(\mathbf{p}) \mathbf{r}_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_N \end{bmatrix}, \quad (6)$$

由此得到

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{p}_k^* = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \boldsymbol{\varepsilon}_k. \quad (7)$$

其中:  $\mathbf{p}_k^*$  是由四元数估计算法的姿态四元数  $\mathbf{q}_k^*$  转换得到的,  $\mathbf{H}_k = [\mathbf{I}_{3 \times 3} \ \mathbf{0}_{3 \times 6}]$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_k$  为零均值的高斯白噪声.

## 2 RSF 滤波算法

考虑如下非线性系统的状态方程和测量方程:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{w}_k, \quad (8)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k. \quad (9)$$

其中:  $\mathbf{x}_k \in R^n$  为系统状态;  $\mathbf{y}_k \in R^p$  为  $k$  时刻的测量,  $k = \{0, 1, \dots, N\}$ ;  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_k)$  和  $\mathbf{h}(\mathbf{x}_k)$  为已知的非线性函数;  $\mathbf{w}_k \in R^n$  为过程噪声,  $\mathbf{v}_k \in R^p$  为测量噪声,假定二者是不相关的,并有已知协方差.

令  $\hat{\mathbf{x}}_k$  为状态变量的估计值,  $\mathbf{x}_k^*$  为最优值,则风险敏感的代价函数为

$$f_{rs,k}(\mathbf{x}_k) = E \left[ \exp \left( \mu_1 \sum_{i=0}^{k-1} \rho_1(x_i - \hat{x}_i) \right) + (\mu_2 \rho_2(x_k - \mathbf{x}_k^*)) \right]. \quad (10)$$

其中:  $\mu_1 \geq 0, \mu_2 \geq 0$  是两个风险敏感参数;函数  $\rho_1(\cdot)$  和  $\rho_2(\cdot)$  是严格凸的连续函数.

最小风险敏感估计定义如下:

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \arg \min_{\mathbf{x}_k^* \in R^n} f_{rs,k}(\mathbf{x}_k). \quad (11)$$

为了简化计算,令函数  $\rho_1(\cdot)$  和  $\rho_2(\cdot)$  是已知向量的二次函数,即  $\rho_j(\alpha) = \alpha^T \alpha, j = 1, 2$ .  $\sigma_k(x_k)$  表示信息状态,  $\alpha$  是参数.

用  $\hat{\mathbf{x}}_{k+1/k}$  表示最优估计,概率密度函数定义为

$$f(x_{k+1}|x_k) \triangleq p_{X_{k+1}|X_k}(\cdot|x_k), \quad (12)$$

$$g(y_k|x_k) \triangleq p_{Y_k|X_k}(\cdot|x_k). \quad (13)$$

由上述假设,有

$$\sigma_{k+1|k}(x_{k+1}) = \int f(x_{k+1}|x_k) g(y_k|x_k) \times \exp(\mu_1(x_k - \hat{x}_{k|k-1})^T \times (x_k - \hat{x}_{k|k-1})) \sigma_{k|k-1}(x_k) dx_k, \quad (14)$$

$$\hat{x}_{k|k-1} = \arg \min_{\alpha \in R} \int \exp(\mu_2(x_k - \alpha)^T \times (x_k - \alpha)) \sigma_{k|k-1}(x_k) dx_k. \quad (15)$$

### 3 CD-RSF算法

将中心差分积分法用于风险敏感滤波中难以处理的积分, 从而形成中心差分风险敏感滤波(CD-RSF)算法.

被积函数(14)可表示为如下形式:

$$\sigma_{k+1|k}(x_{k+1}) = \int f(x_{k+1}|x_k)\sigma_{k|k}(x_k)dx_k, \quad (16)$$

其中 $\sigma_{k|k}(x_k)$ 是从前一阶段获得的后验估计, 有如下的递推形式:

$$\begin{aligned} \sigma_{k+1|k+1}(x_{k+1}) = & \\ & g(y_{k+1}|x_{k+1}) \exp(\mu_1(x_{k+1} - \hat{x}_{k+1|k})^T \times \\ & (x_{k+1} - \hat{x}_{k+1|k}))\sigma_{k+1|k}(x_{k+1}). \end{aligned} \quad (17)$$

最优估计表达式为

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1|k} = \arg \min_{\alpha \in R} \int \exp(\mu_2(x_{k+1} - \alpha)^T \times \\ (x_{k+1} - \alpha))\sigma_{k+1|k}(x_{k+1})dx_{k+1}. \end{aligned} \quad (18)$$

中心差分风险敏感滤波(CD-RSF)算法如下.

1) 初始化.

给定 $x_{0|0}$ 和 $P_{0|0}$ 恰当值.

2) 预测阶段.

① 使用Cholesky分解计算因数分解 $P_{k|k} = S^T S$ .

② 选择合适的标量 $h$ 并计算一次和二次导数的中心差分近似分别为

$$a_i = (\varphi(x_{k|k} + hS^T e_i) - \varphi(x_{k|k} - hS^T e_i))/2h, \quad (19)$$

$$\begin{aligned} H_{i,i} = & (\varphi(x_{k|k} + hS^T e_i) - 2\varphi(x_{k|k}) + \\ & \varphi(x_{k|k} - hS^T e_i))/h^2, \end{aligned} \quad (20)$$

其中 $e_i$ 为 $i$ 方向上的单位矢量, 并且 $1 \leq i \leq n$ .  $h$ 的选择表示Sigma点的跨度, 大多选择合适的分布状态性质表示, 高斯分布的建议值为 $h = \sqrt{3}$ .

③ 计算均值和协方差分别为

$$\bar{\sigma}_{k+1|k} = \phi(x_{k|k}) + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} H_{i,i}, \quad (21)$$

$$P_{k+1|k} = Q + \sum_{i=1}^n a_i a_i^T + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} H_{i,i} H_{i,i}^T, \quad (22)$$

其中 $Q$ 是过程噪声协方差.

3) 最优化阶段.

采用高斯近似, 最优化估计为 $\hat{x}_{k+1|k} = \bar{\sigma}_{k+1|k}$ .

4) 校正阶段.

如果在 $\sigma_{k+1|k}(x_{k+1})$ 位置上采用高斯近似 $\bar{\sigma}_{k+1|k}(x_{k+1})$ , 则式(17)中后两项可组合得到一个等效高斯分布. 组合项可表示为 $N(\text{mean}, \text{cov})$ , 其中

$$\text{mean} = \hat{x}_{k+1|k},$$

$$\text{cov} = P_{k+1|k}^+ = (P_{k+1}^{-1} - 2\mu_2 I)^{-1}.$$

因此校正过程如下:

① 计算 $P_{k+1|k}^+ = (P_{k+1}^{-1} - 2\mu_2 I)^{-1}$ .

② 用Cholesky分解计算因数分解 $P_{k+1|k}^+ = \tilde{S}^T \tilde{S}$ .

③ 计算中心差分近似

$$\begin{aligned} b_i = & (\gamma(x_{k+1|k} + h\tilde{S}^T e_i) - \\ & \gamma(x_{k+1|k} - h\tilde{S}^T e_i))/2h, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} G_{i,i} = & (\gamma(x_{k+1|k} + h\tilde{S}^T e_i) - 2\gamma(x_{k+1|k}) + \\ & \gamma(x_{k+1|k} - h\tilde{S}^T e_i))/h^2, \quad 1 \leq i \leq n. \end{aligned} \quad (24)$$

④ 计算

$$\hat{x}_{k+1|k+1} = \hat{x}_{k+1|k} + L_{k+1}^+(y_{k+1} - z_{k+1}), \quad (25)$$

$$P_{k+1|k+1} = P_{k+1|k}^+ - L_{k+1}^+ P_{xz}^T. \quad (26)$$

其中

$$P_{xz} = \tilde{S}^T (b_1, \dots, b_n)^T, \quad (27)$$

$$P_{zz} = \sum_{i=1}^n b_i b_i^T + \sum_{i=1}^n (1/2) G_{i,i} G_{i,i}^T, \quad (28)$$

$$L_{k+1}^+ = P_{xz} (R + P_{zz})^{-1}, \quad (29)$$

$$z_{k+1} = \gamma(x_{k+1|k}) + \sum_{i=1}^n (1/2) G_{i,i}. \quad (30)$$

### 4 仿真分析

下面通过实际数值仿真, 对EKF、CDKF和CD-RSF几种滤波算法进行性能比较. 在仿真中, 采用磁强计作为测量敏感器, 参考矢量为10阶地磁场模型, 参数及滤波器的初始条件见表1.

表1 数值仿真的参数和初始条件

参数	取值
测量噪声方差/nT	300 <sup>2</sup>
采样步长/s	4.5
滤波器数值积分步长/s	0.2
干扰力矩噪声方差/(N·m)	(10 <sup>-6</sup> ) <sup>2</sup>
三轴姿态角初始值	[5° 5° 5°] <sup>T</sup>
三轴角速度初始值/(°/s)	[0.01 0.01 0.01] <sup>T</sup>
姿态初始方差/(°/s)	0.5 <sup>2</sup>
角速度初始方差/(°/s)	0.001 <sup>2</sup>
干扰力矩初始方差/(N·m)	(10 <sup>-5</sup> ) <sup>2</sup>

仿真是在初始误差较大且噪声统计特性未知情况下进行的. 仿真的初始条件是: 三轴姿态误差为[10°, -10°, 10°], 角速度的误差为[0.02, -0.02, 0.02]°/s, 初始干扰力矩为10<sup>-2</sup> N·m. 图1~图3分别为采

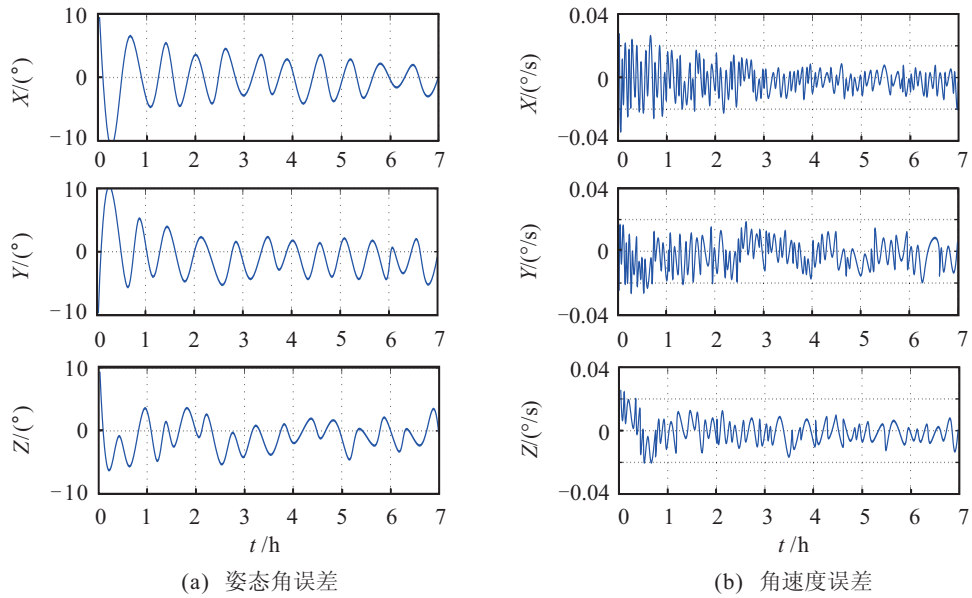


图1 EKF的姿态角和角速度误差

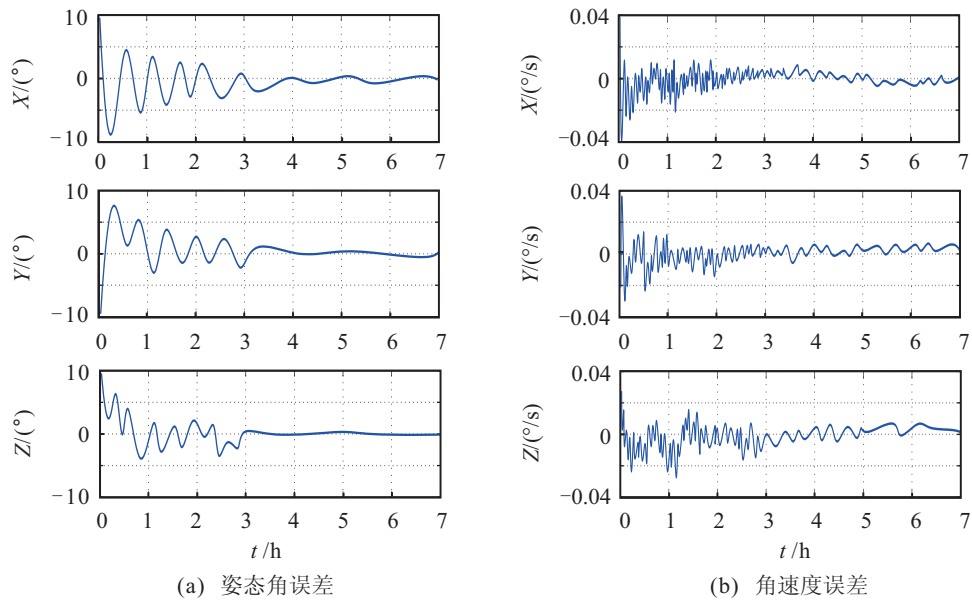


图2 CDKF的姿态角和角速度误差

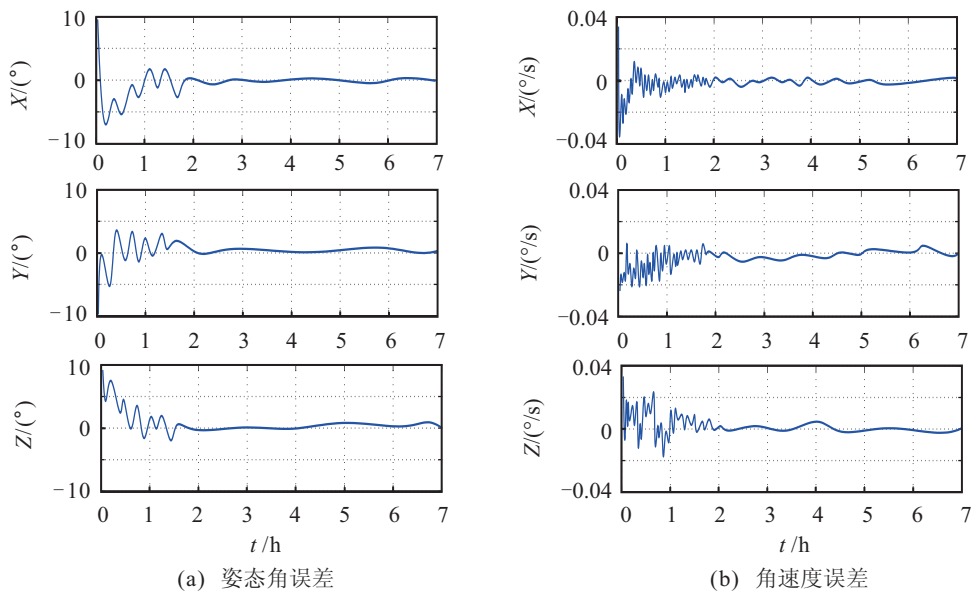


图3 CD-RKF的姿态角和角速度误差

用EKF、CDKF和CD-RSF得到的三轴姿态角和角速度的误差曲线。经过比较可以看出, EKF在6h内仍未收敛, 而CDKF在4h达到较好的收敛效果, CD-RSF则在3h内就得到了较小的误差。这主要是由于EKF所采取的一阶Taylor近似不能处理较大的初始条件误差, 而CDKF效果好些, 但滤波的鲁棒性不如CD-RSF。

## 5 结 论

随着估计理论的发展, 更多的滤波方法相继用于航天器姿态确定。本文尝试将风险敏感器滤波方法用于航天器姿态确定, 并用中心差分求积分法处理风险敏感滤波中难以处理的积分, 在初始误差较大及具有模型不确定的情况下取得了较好的滤波效果。本文方法为寻求高精度的姿态确定提供了有益的参考。

## 参考文献(References)

- [1] Lefferts E J, Markley F L, Shuster M D. Kalman filtering for spacecraft attitude estimation[J]. *J of Guidance, Control, and Dynamics*, 1982, 5(5): 417-429.
- [2] Crassidis J L, Markley F L. Unscented filtering for spacecraft attitude estimation[J]. *J of Guidance, Control, and Dynamics*, 2003, 26(4): 536-542.
- [3] Crassidis J L. Sigma-point Kalman filtering for integrated GPS and inertial navigation[J]. *IEEE Trans on Aerospace and Electronic Systems*, 2006, 42(2): 750-756.
- [4] Oshman Y, Carmi A. Attitude estimation from vector observations using genetic-algorithm-embedded quaternion particle filter[J]. *J of Guidance, Control, and Dynamics*, 2006, 29(4): 879-891.
- [5] 姜雪原, 马广富, 胡庆雷. 基于Marginalized粒子滤波的卫星姿态估计算法[J]. *控制与决策*, 2007, 22(1): 39-44. (Jiang X Y, Ma G F, Hu Q L. Satellite attitude estimation based on Marginalized particle filter[J]. *Control and Decision*, 2007, 22(1): 39-44.)
- [6] George J, Terejanu G, Singla P. Spacecraft attitude estimation using adaptive gaussian sum filter[J]. *J of the Astronautical Sciences*, 2009, 57(2): 31-45.
- [7] Linares R, Kumar V, Singla P, et al. Information theoretic space object data association methods using an adaptive gaussian sum filter[J]. *Advances in the Astronautical Sciences*, 2011, 140(5): 665-680.
- [8] Lam Q M, Crassidis J L. Evaluation of a multiple model adaptive estimation scheme for space vehicle's enhanced navigation solution[C]. *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conf. Hilton Head*, 2007: 4690-4710.
- [9] Boel R K, James M R, Peterson I R. Robustness and risk sensitive filtering[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2002, 47(3): 451-461.
- [10] Zhang H, Xie L, Soh Y C. Risk-sensitive filtering, prediction and smoothing for discrete-time singular systems[J]. *Automatica*, 2003, 39(1): 57-66.
- [11] 李鹏, 宋申民. 融合风险敏感估计算子的无迹粒子滤波[J]. *中南大学学报: 自然科学版*, 2011, 42(1): 448-452. (Li P, Song S M. Unscented particle filter with risk sensitive function[J]. *J of Central South University: Science and Technology*, 2011, 42(1): 448-452.)
- [12] 陈里铭, 陈喆, 殷福亮, 等. 基于中心差分卡尔曼-概率假设密度滤波的多目标跟踪方法[J]. *控制与决策*, 2013, 28(1): 36-42. (Chen L M, Chen Z, Yin F L, et al. Central difference Kalman-probability hypothesis density filter for multi-target tracking[J]. *Control and Decision*, 2013, 28(1): 36-42.)
- [13] James M R, Elliott R J. Risk sensitive and risk neutral control for continuous time hidden markov models[J]. *J of Applied Mathematics and Optimization*, 1996, 34(1): 37-50.

(责任编辑: 李君玲)