

切换非线性系统的分布式模型预测控制

李 纹, 穆文英, 崔宝同

(江南大学 物联网工程学院, 江苏 无锡 214122)

摘 要: 针对一类具有预先指定切换序列的切换非线性系统, 研究了具有通信信道干扰和时滞测量的分布式模型预测控制问题. 在每个子系统都存在镇定控制器的假设下, 利用基于 Lyapunov 函数的模型预测控制器设计了分布式模型预测控制器, 并给出了闭环切换非线性系统最终有界的充分条件. 最后, 通过仿真结果表明了分布式模型预测控制策略的有效性.

关键词: 分布式模型预测控制; 切换系统; 时滞测量

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Distributed model predictive control of switched nonlinear systems

LI Wen, MU Wen-ying, CUI Bao-tong

(School of IoT Engineering, Jiangnan University, Wuxi 214122, China. Correspondent: LI Wen, E-mail: nmliwen@aliyun.com)

Abstract: A distributed model predictive control strategy is proposed for a class of switched nonlinear systems with a prescribed switching sequence. The control strategy takes explicitly into account communication disruptions and delayed measurements. Under the assumption that every subsystem exists a stabilizing controller, the distributed model predictive control architecture is designed by using Lyapunov-based model predictive control. Sufficient conditions for guaranteeing ultimate boundedness of the closed-loop switched nonlinear systems are presented. Simulation results show the effectiveness of the distributed model predictive control scheme.

Key words: distributed model predictive control; switched systems; delayed measurements

0 引 言

近年来, 切换系统的控制问题已成为一个重要的研究内容^[1-4]. 在许多实际控制系统中, 切换系统的输入和状态变量往往受到客观条件的限制和约束, 而且切换系统还需要按照预先指定的切换序列运行, 这些约束使得控制切换系统的性能存在一定的困难.

模型预测控制是一种可在线处理系统约束的控制方法, 关于模型预测控制的研究已有许多研究成果^[5]. 为了得到优化问题的初始可行区域, 通常在模型预测控制器设计中融入基于 Lyapunov 函数的方法. 文献 [6] 研究了具有指定切换序列的切换非线性系统的模型预测控制问题. 文献 [7] 研究了一类非线性切换系统在不确定性和变量约束下基于 Lyapunov 函数的预测控制问题. 文献 [8] 针对具有状态不可测和输入变量受约束的非线性切换系统, 提出了一种混合非线性预测控制方法. 上述文献均采用了集中模型预测

控制方法. 然而集中模型预测控制在处理多状态变量和多操作输入时, 由于计算的复杂性可能会降低闭环系统的性能. 许多学者开始采用分布式模型预测控制策略来处理具有多状态变量和多操作输入的系统^[9]. 分布式模型预测控制的优点是充分利用各个预测控制器之间的合作与交流, 从而减少计算负担. 文献 [10] 研究了非线性过程系统的分布式模型预测控制. 文献 [11] 考虑了具有异步和时滞测量的非线性系统的分布式模型预测控制. 文献 [12] 针对分布式模型预测控制器之间的信息传输具有信道干扰和数据丢失的情况, 给出了非线性系统的分布式模型预测控制策略. 文献 [13] 研究了具有指定切换序列的切换非线性系统的分布式模型预测控制, 但未考虑切换系统存在通信信道干扰和时滞测量的情形.

本文针对一类具有预先指定切换序列的切换非线性系统, 提出一种存在通信信道干扰和时滞测量

收稿日期: 2012-12-21; 修回日期: 2013-04-25.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61174021); 江南大学博士研究生科学研究基金项目(JUDCF13037).

作者简介: 李纹(1984—), 女, 博士生, 从事切换系统与模型预测控制的研究; 崔宝同(1960—), 男, 教授, 博士生导师, 从事复杂系统控制理论与应用等研究.

的分布式模型预测控制方法. 其主要思想是: 对于切换系统的每一个子系统, 在输入和状态均受约束的情况下, 设计基于 Lyapunov 函数的模型预测控制器 (LMPC); 然后设计分布式模型预测控制器, 使得在各个预测控制器之间进行信息的合作与交流, 并给出闭环系统最终有界的充分条件; 最后通过一个化工过程实例仿真验证了所提出的分布式模型预测控制策略的有效性.

1 问题描述

考虑如下状态空间描述的切换非线性系统:

$$\dot{x}(t) = f_{\sigma(t)}(x(t)) + g_{1\sigma(t)}(x(t))u_{1\sigma(t)}(t) + g_{2\sigma(t)}(x(t))u_{2\sigma(t)}(t) + k(x(t))w(t). \quad (1)$$

其中: $x(t) \in R^{n_x}$ 表示系统状态变量; $u_{j\sigma(t)}(t) \in R^{m_{u_j}}$ ($j = 1, 2$) 表示受限操作输入, 它在一个非空凸紧集 $U_{j\sigma(t)} := \{u_{j\sigma(t)} \in R^{m_{u_j}} : |u_{j\sigma(t)}| \leq u_{j\sigma(t)}^{\max}\}$ 上取值; $w(t) \in R^{n_w}$ 表示有界的扰动, 即 $w(t) \in W$, $W := \{w \in R^{n_w} : |w| \leq \theta_w, \theta_w > 0\}$; $\sigma(t) : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{I} = \{1, 2, \dots, p\}$ 表示右连续切换信号, 即 $\sigma(t_i) = \lim_{t \rightarrow t_i^+} \sigma(t)$ 对于所有的 i 成立, 这表明系统在有限时间间隔内只能切换有限次; $f_{\sigma(t)}(x) \in R^{n_x}$ 表示向量函数; $g_{j\sigma(t)}(x) \in R^{n_x \times m_{u_j}}$ 表示矩阵函数.

本文中用符号 $t_{i_r}^{\text{in}}$ 和 $t_{i_r}^{\text{out}}$ 分别表示第 i 个子系统的第 r 个切入和切出时间, 即 $\sigma(t_{i_r}^+) = \sigma(t_{i_r}^-) = i$. 在此记号下, 当 $t_{i_r}^{\text{in}} \leq t < t_{i_r}^{\text{out}}$ 时, 系统 (1) 可表示为

$$\dot{x}(t) = f_i(x(t)) + g_{1i}(x(t))u_{1i}(t) + g_{2i}(x(t))u_{2i}(t) + k(x(t))w(t). \quad (2)$$

其中: $T_{i,\text{in}} = \{t_{i_1}^{\text{in}}, t_{i_2}^{\text{in}}, \dots\}$, $T_{i,\text{out}} = \{t_{i_1}^{\text{out}}, t_{i_2}^{\text{out}}, \dots\}$ 分别表示系统的切入和切出时间集合. 对于所有的 $i \in \mathcal{I}$, 假设向量函数 f_i 和矩阵函数 g_{1i} 、 g_{2i} 都是局部 Lipschitz 的, 并且 $f_i(0) = 0$.

本文考虑的是测量值存在时滞和在两个分布式模型预测控制器之间存在通信信道干扰的情况, 即控制器在 t_k 时刻接收到的测量值是 $x(t_k - d_{i_r})$. 其中: $t_k = t_{i_r}^{\text{in}} + k\Delta_{i_r}$, $k = 0, 1, \dots, N_{i_r}$; Δ_{i_r} 为采样时间; N_{i_r} 为正整数. 系统结构示意图如图 1 所示.

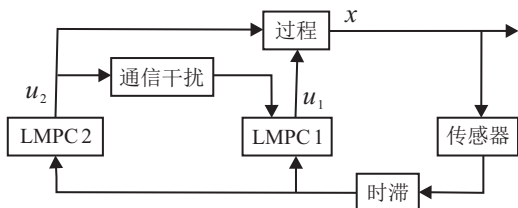


图 1 系统结构

对于给定的通信信道输入 $r \in R^{m_u}$, 由于两个分布式模型预测控制器之间的通信存在数据丢失和噪声, 得到的通信信道输出为 $\tilde{r} = lr + n$. 其中: $\tilde{r} \in R^{m_u}$,

l 为伯努利随机变量, $n \in R^{m_u}$ 为高斯白噪声. 为了研究系统的稳定性, 假设 $|d_{i_r}| \leq D_i$, $|n| < \eta$.

2 分布式模型预测控制

为了得出主要结果, 需给出以下假设和引理.

假设 1 当 $u_{2i}(t) = 0$ 时, 假设有基于 Lyapunov 函数的控制器 $u_{1i}(t) = h_i(x(t))$, 使得下式是渐近稳定的:

$$\dot{\hat{x}}(\tau) = f_i(\hat{x}(\tau)) + g_{1i}(\hat{x}(\tau))h_i(\hat{x}(\tau)), \quad t_{i_r}^{\text{in}} \leq \tau < t_{i_r}^{\text{out}}. \quad (3)$$

由 Lyapunov 逆定理可知, 存在 \mathcal{K} 函数 $\alpha_{li}(\cdot)$ ($l = 1, 2, 3, 4$) 和连续可微 Lyapunov 函数 $V_i(x)$, 使得下列不等式对于所有的 $x \in D_i \subseteq R^{n_x}$ 成立:

$$\begin{aligned} \alpha_{1i}(|x|) &\leq V_i(x) \leq \alpha_{2i}(|x|); \\ \frac{\partial V_i(x)}{\partial x} (f_i(x) + g_{1i}(x)h_i(x)) &\leq \\ & - \alpha_{3i}(|x|), \quad h_i(x) \in U_{1i}; \\ \left| \frac{\partial V_i(x)}{\partial x} \right| &\leq \alpha_{4i}(|x|). \end{aligned}$$

其中 D_i 表示原点的开邻域. 由 f_i 和 g_{ji} 的光滑性可知, 存在正常数 M_i 使得下式对于所有的 $x \in \Omega_{\rho_i}$, $u_{ji} \in U_{ji}$, $i \in \mathcal{I}$ ($j = 1, 2$) 成立:

$$\left| f_i(x(t)) + \sum_{j=1}^2 g_{ji}(x(t))u_{ji}(t) + k(x(t))w(t) \right| \leq M_i. \quad (4)$$

其中: $\Omega_{\rho_i} \subseteq D_i$ 表示在控制器 h_i 的作用下, 闭环系统在第 i 个模态的稳定区域; 符号 Ω_r 定义为 $\Omega_r := \{x \in R^{n_x} : V(x) \leq r\}$. 另外, 由 Lyapunov 函数 $V_i(x)$ 的连续可微性和 f_i 与 g_{ji} 的光滑性可知, 存在正常数 L_{x_i} , $L_{u_{j_i}}$, L_w , R_{x_i} 和 R_{w_i} 使得下式对于所有的 $x, \hat{x} \in \Omega_{\rho_i}$, $u_{j_i} \in U_{j_i}$, $i \in \mathcal{I}$ ($j = 1, 2$) 成立:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial V_i(x)}{\partial x} f_i(x) - \frac{\partial V_i(x)}{\partial x} f_i(\hat{x}) \right| &\leq L_{x_i} |x - \hat{x}|, \\ \left| \frac{\partial V_i(x)}{\partial x} g_{ji}(x) - \frac{\partial V_i(x)}{\partial x} g_{ji}(\hat{x}) \right| &\leq L_{u_{j_i}} |x - \hat{x}|, \\ \left| \frac{\partial V_i(x)}{\partial x} k(x) \right| &\leq L_{w_i}, \\ \left| f_i(x) + \sum_{j=1}^2 g_{ji}(x)u_{j_i} + k(x)w - f_i(\hat{x}) - \sum_{j=1}^2 g_{ji}(\hat{x})u_{j_i} \right| &\leq \\ R_{x_i} |x - \hat{x}| + R_{w_i} |w|. \end{aligned} \quad (5)$$

引理 1^[11] 考虑闭环系统 (2), 如果存在 $\varepsilon_{s_i} > 0$, $\Delta_i > 0$, $\rho_i > \rho_{s_i} > 0$, 使得下式成立:

$$\begin{aligned} -\alpha_{3i}(\alpha_{2i}^{-1}(\rho_{s_i})) + \left(L_{x_i} + \sum_{j=1}^2 L_{u_{j_i}} u_{j_i}^{\max} \right) M_i \Delta_i + \\ L_{w_i} \theta_w \leq \frac{-\varepsilon_{s_i}}{\Delta_i}, \end{aligned} \quad (6)$$

则当 $x(t_0) \in \Omega_{\rho_i}$, $\rho_{\min_i} < \rho_i$ 时, $V_i(\hat{x}(t)) \leq V_i(\hat{x}(t_k))$, $\forall t \in [t_k, t_{k+1})$, $V_i(\hat{x}(t_k)) \leq \max\{V_i(\hat{x}(t_0) - k)\varepsilon_{s_i}, \rho_{\min_i}\}$. 其中: $\rho_{\min_i} = \max\{V_i(x(t + \Delta_{i_r})) : V_i(x(t)) \leq \rho_{s_i}\}$, $\forall \Delta_{i_r} \in (0, \Delta_i]$.

假设 2^[13] 对于系统 (3), 存在一个正实数 ρ_i^* , 使得

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(\hat{x}(\tau)) &\leq -\rho_i^* V_i(\hat{x}(\tau)), \\ \hat{x}(\tau) &\in \Omega_{\rho_i/\rho_{s_i}}, t_{i_r}^{\text{in}} \leq \tau < t_{i_r}^{\text{out}}. \end{aligned}$$

引理 2^[11] 对于具有初始状态 $x_a(t_0) = x_b(t_0) \in \Omega_\rho$ 的系统

$$\begin{aligned} \dot{x}_a(t) &= f_i(x_a(t), u_1(t), u_2(t), w(t)), \\ \dot{x}_b(t) &= f_i(x_b(t), u_1(t), u_2(t), 0), \end{aligned}$$

存在一类 \mathcal{K} 函数 $f_{W_i}(\cdot)$, 使得 $|x_a(t) - x_b(t)| \leq f_{W_i}(t - t_0)$ 对于所有的 $x_a(t), x_b(t) \in \Omega_{\rho_i}, w(t) \in W$ 成立. 其中 $f_{W_i}(\tau) = \frac{R_{w_i} \theta_w}{R_{x_i}} (e^{R_{x_i} \tau} - 1)$.

引理 3^[11] 对于 Lyapunov 函数 $V_i(\cdot)$, 存在一个二次函数 $f_{V_i}(\cdot)$, 使得 $V_i(x) \leq V_i(\hat{x}) + f_{V_i}(|x - \hat{x}|)$ 对于所有的 $x, \hat{x} \in \Omega_\rho$ 成立. 其中 $f_{V_i}(s) = \alpha_{4_i} (\alpha_{1_i}^{-1}(\rho_i)) s + M_i s_i^2, M_i > 0$.

引理 4^[13] 对于状态轨迹 $\hat{x}(t)$, 当 $t_{i_r}^{\text{in}} \leq t < t_{i_r}^{\text{out}} = t_{f_{w_i}^{\text{in}}}$ 和 $\hat{x}(t_{i_r}^{\text{in}}) \in \Omega_{\rho_i}$ 时, 如果存在 $\rho_i > 0, \rho_i^* > 0, N_{i_r} > 0, \Delta_{i_r} > 0, \forall i \in \mathcal{I}$ 使得 $\alpha_{2_f} (\alpha_{1_i}^{-1}(\rho_i e^{-\rho_i^* N_{i_r} \Delta_{i_r}})) \leq \rho_f$, 则 $\hat{x}(t_{f_{w_i}^{\text{in}}}) \in \Omega_{\rho_f}$.

本文的分布式模型预测控制执行策略如下.

Step 1: 在 t_k 时刻, LMPC 2 接受测量值 $x(t_k - d_{k_r})$. 如果 $t_k - d_{k_r} > \max_{l < k} t_l - d_{l_r}$, 则执行下一步, 否则执行 Step 6.

Step 2: 利用 LMPC 2 估计状态值 $\tilde{x}(t_k)$, 基于估计值 $\tilde{x}(t_k)$ 计算最优输入 u_2 .

Step 3: LMPC 2 将最优输入 u_2 传送给执行器和 LMPC 1.

Step 4: LMPC 1 根据接收的输入解决一个可行性问题, 再根据可行性问题结果来判断接收到的信息是否可用. 如果可用, 则 LMPC 1 立即计算最优输入 u_1 .

Step 5: LMPC 1 传送最优输入 u_1 给执行器.

Step 6: 如果有新的测量值被接收 ($k \leftarrow k + 1$), 则返回 Step 1.

当接收到测量值 $x(t_k - d_{k_r})$ 后, LMPC 2 可以通过在线求解如下的优化控制问题得到最优输入轨迹:

$$\begin{aligned} \min_{u_{2_i} \in S_2(\Delta_{i_r})} & \int_{t_k}^{t_k + N \Delta_{i_r}} [|\tilde{x}(\tau)|_{Q_{c_i}} + |u_{1_i}(\tau)|_{R_{c_{1_i}}} + \\ & |u_{2_i}(\tau)|_{R_{c_{2_i}}}] d\tau. \\ \text{s.t. } & \dot{\tilde{x}}(t) = f_e(\tilde{x}(t)) + \sum_{j=1}^2 g_{j_e}(\tilde{x}(t)) u_{j_e}^*(t), \\ & t_k - d_k \leq t < t_{k_r}^{\text{in}}; \end{aligned}$$

$$\dot{\tilde{x}}(t) = f_i(\tilde{x}(t)) + \sum_{j=1}^2 g_{j_i}(\tilde{x}(t)) u_{j_i}^*(t),$$

$$t_{k_r}^{\text{in}} < t_k - d_k, t_k - d_k \leq t < t_k;$$

$$\dot{\tilde{x}}(t) = f_i(\tilde{x}(t)) + \sum_{j=1}^2 g_{j_i}(\tilde{x}(t)) u_{j_i}^*(t),$$

$$\forall t \in [t_k, t_k + N \Delta_{i_r});$$

$$u_{1_i} = h_i(\tilde{x}(t_k + m \Delta_{i_r})),$$

$$\forall t \in [t_k + m \Delta_{i_r}, t_k + (m + 1) \Delta_{i_r});$$

$$u_{2_i}(t) \in U_{2_i}, \forall t \in [t_k, t_k + N \Delta_{i_r});$$

$$\tilde{x}(t_k - d_k) = x(t_k - d_k). \quad (7)$$

$$\dot{\tilde{x}}(t) = f_i(\tilde{x}(t)) + h_i(\tilde{x}(t_k + m \Delta_{i_r})),$$

$$\forall t \in [t_k + m \Delta_{i_r}, t_k + (m + 1) \Delta_{i_r});$$

$$\hat{x}(t_k) = \tilde{x}(t_k). \quad (8)$$

$$V(\tilde{x}(t)) \leq V(\hat{x}(t)), \forall t \in [t_k, t_k + N \Delta_{i_r}). \quad (9)$$

$$V_f(\tilde{x}(t_{f_{w_i}^{\text{in}}})) \leq \begin{cases} \phi, w > 1, \varphi > 0; \\ \rho_{\min_f}, w > 1, \varphi \leq 0; \\ \rho_f, w = 1. \end{cases} \quad (10)$$

其中: $\phi = V_f(\tilde{x}(t_{f_{w_i}^{\text{in}}})) - \varepsilon^*, \varepsilon^* > 0, \varphi = V_f(\tilde{x}(t_{f_{w_i}^{\text{in}}})) - \rho_{\min_f}$. $N \Delta_{i_r}$ 为预测时域, Δ_{i_r} 为采样时间, $|\cdot|_Q$ 表示 $|x|_Q = x^T Q x$. 如果 $t_{k_r}^{\text{out}} < \infty$, 则 $N \Delta_{i_r} = t_{k_r}^{\text{out}} - t_k$; 如果 $t_{k_r}^{\text{out}} = \infty$, 则 $N \Delta_{i_r} = T_{\text{design}}, 0 < T_{\text{design}} < \infty$ 是一个设计参数. $m = 0, 1, \dots, N - 1, u_{1_i}^*(t)$ 和 $u_{2_i}^*(t)$ 为控制器传送给执行器的最新的输入轨迹. $u_{2_i}^*(t|t_k)$ 表示最优解. LMPC 2 将最优解 $u_{2_i}^*(t|t_k)$ 通过通信信道传输给 LMPC 1, 而 LMPC 1 接收到被干扰的输入信号 $\tilde{u}_{2_i}(\tau|t_k)$, 且 $\tilde{u}_{2_i}(\tau|t_k) = l u_{2_i}^*(\tau|t_k) + n$. LMPC 1 通过解决一个类似于文献 [12] 的可行性问题 P1 来判断接收到的信息是否可靠. 可行性问题 P1 表述如下:

寻找 $z \in S_2(\Delta_{i_r})$, 使得

$$\text{s.t. } \tilde{u}_{2_i}(\tau|t_k) - \eta \leq z(\tau) \leq \tilde{u}_{2_i}(\tau|t_k) + \eta,$$

$$z(\tau) \in U_{2_i}, \frac{\partial V(x(t_k))}{\partial x} g_{2_i}(x(t_k)) z(0) > 0. \quad (11)$$

如果问题 P1 不存在可行解, 则表明干扰对可控制镇定行为不产生影响, 此时接收到的输入信号是可用的; 反之, 如果问题 P1 存在可行解, 则表明干扰影响了可控制镇定行为, 此时接收到的输入信号是不可用的, 将被丢弃, LMPC 1 将使用 u_{2_i} 的 0 轨迹进行评估. 当数据丢失时, LMPC 1 也会用 u_{2_i} 的 0 轨迹进行评估. 综合以上情况, LMPC 1 接收到的可用信息可表示为

$$\tilde{u}_{2_i}(\tau|t_k) = \begin{cases} \tilde{u}_{2_i}(\tau|t_k), & \text{式 (12) 不可行且无数据丢失;} \\ 0, & \text{式 (12) 可行或者数据丢失.} \end{cases}$$

LMPC 1 可以通过求解如下的优化控制问题得

到:

$$\begin{aligned} & \min_{u_{1_i} \in S_1(\Delta_{i_r})} \int_{t_k}^{t_k + N\Delta_{i_r}} [|\bar{x}(\tau)|_{Q_{c_i}} + |u_{1_i}(\tau)|_{R_{c_{1_i}}} + \\ & |u_{2_i}(\tau)|_{R_{c_{2_i}}}] d\tau. \\ \text{s.t. } & \dot{\hat{x}}(t) = f_i(\hat{x}(t)) + g_{1_i}(\hat{x})h_i(\hat{x}(t_k + m\Delta_{i_r})) + \\ & g_{2_i}(\hat{x}(t))u_{2_i}(t), \\ & \forall t \in [t_k + m\Delta_{i_r}, t_k + (m+1)\Delta_{i_r}); \\ & \dot{\hat{x}}(t) = f_i(\hat{x}(t)) + \sum_{j=1}^2 g_{j_i}(x(t))u_{j_i}(t), \\ & \forall t \in [t_k, t_k + N\Delta_{i_r}); \\ & u_{2_i}(t) = u_{2_i}^*(t|t_k), \forall t \in [t_k, t_k + N\Delta_{i_r}); \\ & u_{1_i} \in U_1, \forall t \in [t_k, t_k + N\Delta_{i_r}); \\ & \bar{x}(t_k) = \hat{x}(t_k). \end{aligned} \quad (12)$$

$$V(\bar{x}(t)) \leq V(\hat{x}(t)), \forall t \in [t_k, t_k + N\Delta_{i_r}). \quad (13)$$

$$V_f(\bar{x}(t_{f_w}^{\text{in}})) \leq \begin{cases} \phi, & w > 1, \varphi > 0; \\ \rho_{\min_f}, & w > 1, \varphi \leq 0; \\ \tilde{\rho}_f, & w = 1. \end{cases}$$

切换非线性系统的第 i 个子系统的可操作输入定义为

$$\begin{aligned} u_{1_i}(t) &= u_{1_i}^*(t|t_k), \forall t \in [t_k, t_{k+j}); \\ u_{2_i}(t) &= u_{2_i}^*(t|t_k), \forall t \in [t_k, t_{k+j}). \end{aligned} \quad (14)$$

定理 1 如果假设 1 和假设 2 成立, 且存在 $\Delta_i \geq \Delta_{i_r}$, $\varepsilon_{s_i} > 0$, $\rho_i > \rho_{\min_i} > 0$, $\rho_i > \rho_{s_i} > 0$ 和 $D_i \geq 0$ 使得式 (7) 和下面的不等式成立, 则 $x(t)$ 是最终有界的.

$$-j\varepsilon_{s_i} + f_{V_i}(f_{W_i}(j\Delta_i + D_i)) + f_{V_i}(f_{W_i}(D_i)) < 0. \quad (15)$$

证明 由引理 1 可得

$$V_i(\hat{x}(t_{k+j})) \leq \max\{V_i(\hat{x}(t_k)) - j\varepsilon_{s_i}, \rho_{\min_i}\}, \quad (16)$$

由式 (9)、(13) 可得

$$V_i(\bar{x}(t)) \leq V_i(\hat{x}(t)) \leq V_i(\hat{x}(t)), \quad (17)$$

由式 (8)、(12)、(16) 和 (17) 可得

$$V_i(\bar{x}(t_{k+j})) \leq \max\{V_i(\hat{x}(t_k)) - j\varepsilon_{s_i}, \rho_{\min_i}\}. \quad (18)$$

当 $x(t) \in \Omega_{\rho_i}$ 时, 由引理 3 可得

$$V_i(\bar{x}(t_k)) \leq V_i(x(t_k)) + f_{V_i}(|x(t_k) - \bar{x}(t_k)|), \quad (19)$$

$$V_i(x(t_{k+j})) \leq$$

$$V_i(\bar{x}(t_{k+j})) + f_{V_i}(|x(t_{k+j}) - \bar{x}(t_{k+j})|), \quad (20)$$

由引理 2 可得

$$|x(t_k) - \bar{x}(t_k)| \leq f_{W_i}(d_{i_k}),$$

$$|x(t_{k+j}) - \bar{x}(t_{k+j})| \leq f_{W_i}(j\Delta_{i_r} + d_{i_k}). \quad (21)$$

因此由式 (18)~(21) 可得

$$V_i(x(t_{k+j})) \leq \max\{V_i(x(t_k)) - j\varepsilon_{s_i}, \rho_{\min_i}\} +$$

$$f_{V_i}(f_{W_i}(j\Delta_{i_r} + d_{i_k})) + f_{V_i}(f_{W_i}(d_{i_k})). \quad (22)$$

由于 f_{V_i} , f_{W_i} 是严格递增函数, 对于所有的 $0 \leq d_{k_i} \leq D_i$ 和 $\Delta_{i_r} \leq \Delta_i$, 有下式成立:

$$-j\varepsilon_{s_i} + f_{V_i}(f_{W_i}(j\Delta_i)) + f_{V_i}(f_{W_i}(D_i)) < 0, \quad (23)$$

从而存在 $\varepsilon_{s_i} > 0$, 使得

$$V_i(x(t_{k+j})) \leq \max\{V_i(x(t_k)) - \varepsilon_{s_i}, \rho_{d_i}\}. \quad (24)$$

其中

$\rho_{d_i} = \rho_{\min_i} + f_{V_i}(f_{W_i}(j\Delta_i + D_i)) + f_{V_i}(f_{W_i}(D_i))$. 由式 (24) 可知, 当 $x(t_k) \in \Omega_{\rho_i}/\Omega_{\rho_{d_i}}$ 时, 有 $V(x(t_{k+j})) < V(x(t_k))$; 当 $x(t_k) \in \Omega_{\rho_{d_i}}$ 时, 有 $V(x(t_{k+j})) < \rho_{d_i}$, 从而

$$V_i(x(t)) \leq \max\{V_i(x(t_k)), \rho_{d_i}\}, \forall t \in [t_k, t_{k+j}]. \quad (25)$$

对式 (25) 进行递推可得, 当 $x(t_0) \in \Omega_{\rho_{d_i}}$ 时, $x(t) \in \Omega_{\rho_{d_i}}$. 同理, 对式 (24) 进行递推可得, 当 $x(t_0) \in \Omega_{\rho_{d_i}}$ 时, $\limsup_{t \rightarrow \infty} V_i(x(t)) \leq \rho_{d_i}$. 由此可知, $x(t)$ 在 $\Omega_{\rho_{d_i}}$ 上最终有界.

当 $t_{i_r}^{\text{in}} \leq t < t_{i_r}^{\text{out}}$ 和 $t_{f_w}^{\text{in}} = t_{i_r}^{\text{out}} < \infty$ 时, 考虑系统有无限次切换, 此时第 i 个模态被激活. 若 $V_i(x) > \rho_{d_i}$, 则由假设 2 有 $V_i(x(t_{i_r}^{\text{out}})) < V_i(x(t_{i_r}^{\text{in}}))$ 切换约束 (10) 确保 $V_i(x(t_{i_r}^{\text{in}})) < V_i(x(t_{i-1}^{\text{in}})) < \dots < \rho_{d_i}$. 由于方程 (10) 是可行的, $V_i(x)$ 会一直递减. 即使模态 i 不被激活, 也总会存在一个模态 $z \in \mathcal{I}$ 使得 V_z 一直递减且 $V_z \leq \rho_{d_z}$. 由此可知, $x(t)$ 在 $\Omega_{\rho_{d_i}}$ 上最终有界.

当 $t_{i_r}^{\text{in}} \leq t < t_{i_r}^{\text{out}} = \infty$ 时, 系统存在有限次切换, 同样有 $V_i(x(t_{i_r}^{\text{in}})) < V_i(x(t_{i-1}^{\text{in}})) < \dots < \rho_{d_i}$. 当切换到第 i 个模态时, 有 $x(t_{i_r}^{\text{in}}) \in \Omega_{\rho_{d_i}}$. 此时分布式模型预测控制没有任何切换约束. 由于分布式模型预测控制在第 i 个模态是可镇定的, 有 $x(t)$ 在 $\Omega_{\rho_{d_i}}$ 上最终有界. 从而定理 1 得证. \square

注 1 本文分布式模型预测控制器由 LMPC 1 和 LMPC 2 组成, 可将其推广至由 LMPC 1, LMPC 2, \dots , LMPC m 组成的情形. 其中 LMPC 1 使闭环系统稳定而剩下的 LMPC 2 至 LMPC m 通过与 LMPC 1 的合作与交流来改善闭环系统的性能.

3 仿真结果

为验证上述分布式模型预测控制的有效性, 将其应用于具有形如 $A \rightarrow B, B \rightarrow C$ 的两个连续搅拌反应器和一个闪蒸分离器中. 其中: A 为反应物, B 为要求的产品, C 为副产品. 在标准建模假设下, 此过程的数学模型为

$$\begin{aligned} \frac{dx_{A1}}{dt} &= \frac{F_{10\sigma}}{V_1}(x_{A10\sigma} - x_{A1}) + \frac{F_{r\sigma}}{V_1}(x_{A_r} - x_{A1}) - \\ & k_1 e^{-\frac{E_1}{RT_1}} x_{A1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dx_{B1}}{dt} &= \frac{F_{10\sigma}}{V_1}(x_{B10\sigma} - x_{B1}) + \frac{F_{r\sigma}}{V_1}(x_{B_r} - x_{B1}) + \\ &\quad k_1 e^{\frac{-E_1}{RT_1}} x_{A1} - k_2 e^{\frac{-E_2}{RT_1}} x_{B1}, \\ \frac{dT_1}{dt} &= \frac{F_{10\sigma}}{V_1}(T_{10\sigma} - T_1) + \frac{F_{r\sigma}}{V_1}(T_3 - T_1) + \\ &\quad \frac{-\Delta H_1}{C_P} k_1 e^{\frac{-E_1}{RT_1}} x_{A1} + \frac{Q_{1\sigma}}{\rho C_p V_1} + \\ &\quad \frac{-\Delta H_1}{C_P} k_2 e^{\frac{-E_2}{RT_1}} x_{B1}; \\ \frac{dx_{A2}}{dt} &= \frac{F_{1\sigma}}{V_2}(x_{A1} - x_{A2}) + \frac{F_{20\sigma}}{V_2}(x_{A20\sigma} - x_{A2}) - \\ &\quad k_1 e^{\frac{-E_1}{RT_2}} x_{A2}, \\ \frac{dx_{B2}}{dt} &= \frac{F_{1\sigma}}{V_2}(x_{B1} - x_{B2}) + \frac{F_{20\sigma}}{V_2}(x_{B20\sigma} - x_{B2}) + \\ &\quad k_1 e^{\frac{-E_1}{RT_2}} x_{A2} - k_2 e^{\frac{-E_2}{RT_2}} x_{B2}, \\ \frac{dT_2}{dt} &= \frac{F_{1\sigma}}{V_1}(T_1 - T_2) + \frac{F_{20\sigma}}{V_2}(T_{20\sigma} - T_2) + \\ &\quad \frac{-\Delta H_1}{C_P} k_1 e^{\frac{-E_1}{RT_2}} x_{A2} + \frac{Q_{2\sigma}}{\rho C_p V_2} + \\ &\quad \frac{-\Delta H_1}{C_P} k_2 e^{\frac{-E_2}{RT_2}} x_{B2}; \\ \frac{dx_{A3}}{dt} &= \frac{F_{2\sigma}}{V_3}(x_{A2} - x_{A3}) - \frac{F_{r\sigma} + F_{p\sigma}}{V_3} \times \\ &\quad (x_{A_r} - x_{A3}), \\ \frac{dx_{B3}}{dt} &= \frac{F_{2\sigma}}{V_3}(x_{B2} - x_{B3}) - \frac{F_{r\sigma} + F_{p\sigma}}{V_3} \times \\ &\quad (x_{B_r} - x_{B3}), \\ \frac{dT_3}{dt} &= \frac{F_{2\sigma}}{V_3}(T_2 - T_3) + \frac{Q_{3\sigma}}{\rho C_p V_3}. \end{aligned}$$

本文的控制目标是将系统调节到关于稳态输入 u_{1s} 和 u_{2s} 的稳定稳态值 x_s . 参数取值见表1, 稳态输入和稳态状态值分别见表2和表3.

表1 过程参数

参数	单位
$T_{101} = T_{201} = 310, T_{102} = T_{202} = 300$	K
$F_{101} = 5.5, F_{102} = 5, F_{r1} = 50, F_{r2} = 50$	m ³ /h
$x_{A101} = 0.09, x_{A201} = 0.58$	kmol/m ³
$x_{A102} = 0.0823, x_{A202} = 0.5698$	kmol/m ³
$x_{B101} = 0.78, x_{B102} = 0.7699$	kmol/m ³
$x_{B201} = 0.38, x_{B202} = 0.3905$	kmol/m ³
$V_1 = 1.0, V_2 = 0.5, V_3 = 1.0$	m ³
$E_1 = 5e + 4, E_2 = 6e + 4$	kJ/kmol
$k_1 = 2.7e + 4, k_2 = 2.5e + 4$	1/h
$\Delta H_1 = -6e + 4, \Delta H_2 = -7e + 4$	kJ/kmol
$C_p = 0.231$	kJ/kgK
$R = 8.314$	kJ/kmolK
$\rho = 1000$	kJ/m ³

表2 u_{1s} 和 u_{2s} 稳态值

稳态值	单位	稳态值	单位
$Q_{1s} = 2.3085e+6$	kJ/h	$Q_{3s} = 1.092e+6$	kJ/h
$Q_{2s} = 2.1841e+6$	kJ/h	$Q_{4s} = 5.0$	m ³ /h

表3 x_s 稳态值

$x_{A1s} = 0.5687$	$x_{A2s} = 0.5687$	$x_{A3s} = 0.3$
$x_{B1s} = 0.3909$	$x_{B2s} = 0.3909$	$x_{B3s} = 0.6$
$T_{1s} = 429$	$T_{2s} = 423$	$T_{3s} = 427$

考虑到控制目标, 式(26)的模型属于下列给出的非线性切换系统形式:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_\sigma(x) + \sum_{j=1}^2 g_{j\sigma}(x)u_{j\sigma}(t) + k(x(t))w(t), \\ \sigma &\in \{1, 2\}. \end{aligned}$$

其中: $x^T = [x_{A1} - x_{A1s}, x_{B1} - x_{B1s}, T_1 - T_{1s}, x_{A2} - x_{A2s}, x_{B2} - x_{B2s}, T_2 - T_{2s}, x_{A3} - x_{A3s}, x_{B3} - x_{B3s}, T_3 - T_{3s}]$ 为系统状态; $u_{1\sigma}^T = [Q_{1\sigma} - Q_{1s}, Q_{2\sigma} - Q_{2s}, Q_{3\sigma} - Q_{3s}]$ 和 $u_{2\sigma} = F_{20} - F_{20s}$ 为系统可操作输入, 且有 $|u_{1\sigma}| \leq 10^6 \text{kJ/h}, |u_{2\sigma}| \leq 3$.

设计一个基于 Lyapunov 函数的可镇定闭环系统的控制器 $h_\sigma(x)$ 如下:

$$u_\sigma = h_\sigma(x) = -p_\sigma(x)L_{G_\sigma}V_\sigma^T.$$

其中

$$\begin{aligned} p_\sigma(x) &= \begin{cases} \frac{L_{f_\sigma}V_\sigma + \sqrt{L_{f_\sigma}V_\sigma^2 + (L_{G_\sigma}V_\sigma^T)^4}}{|L_{G_\sigma}V_\sigma^T|^2}, \\ L_{G_\sigma}V_\sigma \neq 0; \\ 0, L_{G_\sigma}V_\sigma = 0; \end{cases} \\ L_{f_\sigma}V_\sigma &= \frac{\partial V_\sigma}{\partial x} f_\sigma(x), L_{G_\sigma}V_\sigma = \frac{\partial V_\sigma}{\partial x} G_\sigma(x), \\ G_\sigma &= [g_{1\sigma} \ g_{2\sigma}]. \end{aligned}$$

取二次型 Lyapunov 函数 $V_\sigma(x) = x^T P_\sigma x$, 且有

$$P_1 = \text{diag}(4 \times 10^{12}[4, 4, 10^{-4}, 4, 4, 10^{-4}, 4, 4, 10^{-4}]),$$

$$P_2 = \text{diag}(2 \times 10^{12}[4, 4, 10^{-4}, 4, 4, 10^{-4}, 4, 4, 10^{-4}]).$$

其中符号 $\text{diag}(v)$ 表示对角元素为向量 v 的对角矩阵. 采样间隔 $\Delta_1 = \Delta_2 = 0.02 \text{h}$, 预测时域 $N = 6$, 加权矩阵分别为 $Q_{c1} = Q_{c2} = \text{diag}(2 \times 10^3[2, 2, 3 \times 10^{-3}, 2, 2, 3 \times 10^{-3}, 2, 2, 3 \times 10^{-3}]), R_{c11} = R_{c12} = \text{diag}(4 \times 10^{-12} \times [1 \ 1 \ 1]), R_{c21} = R_{c21} = 100$. 选取初始状态为 $x_0 = [0.8217, 0.2209, 389, 0.8517, 0.1979, 383, 0.594, 0.362, 387]$.

设定在 $t = 0.04$ 时, 系统从模态 1 切换到模态 2, 此后一直在模态 2 运行, 仿真结果如图 2~图 5 所示.

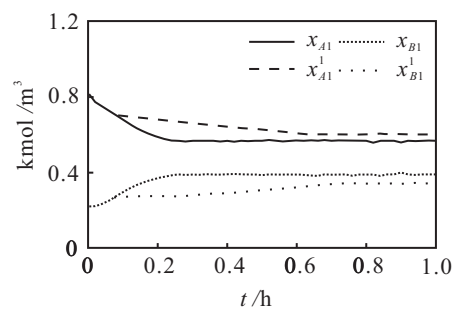
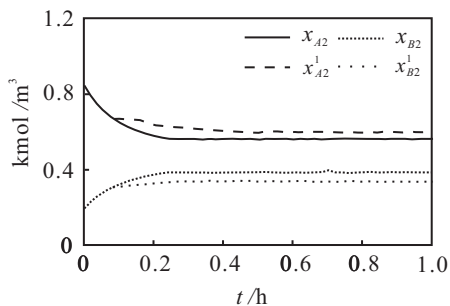
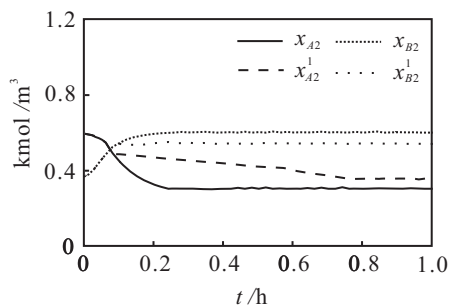
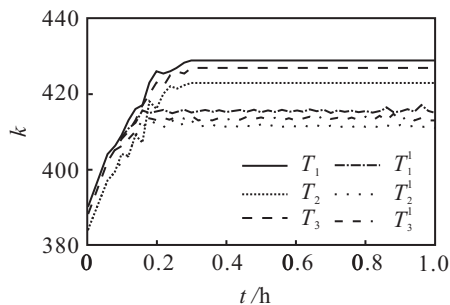


图2 x_{A1} 和 x_{B1} 的轨迹

图 3 x_{A2} 和 x_{B2} 的轨迹图 4 x_{A3} 和 x_{B3} 的轨迹图 5 T_1, T_2 和 T_3 的轨迹

从图 2~图 5 可以看出, 在本文的分布式模型预测控制器作用下, 状态 $x = [x_{A1}, x_{B1}, T_1, x_{A2}, x_{B2}, T_2, x_{A3}, x_{B3}, T_3]^T$ 可以到达所需的稳态值。而利用文献 [12] 中的控制策略所得到的状态 $x^1 = [x_{A1}^1, x_{B1}^1, T_1^1, x_{A2}^1, x_{B2}^1, T_2^1, x_{A3}^1, x_{B3}^1, T_3^1]^T$, 由于没有考虑时滞测量对分布式模型预测控制的影响, 无法到达所需要的稳态值。

4 结 论

本文针对一类具有预先指定切换序列的切换非线性系统, 提出了一种具有通信信道干扰和时滞测量的分布式模型预测控制方法。首先设计了具有 LMPC 1 和 LMPC 2 的分布式模型预测控制策略, 其中 LMPC 1 用来保证闭环系统的稳定性能; 而 LMPC 2 通过与 LMPC 1 的信息交流与合作来改善闭环系统的性能。然后给出了使得闭环切换非线性系统最终有界的充分条件; 最后通过一个化工过程仿真验证了分布式模型预测控制策略的有效性和可行性。

参考文献(References)

[1] Liberzon D. Switching in systems and control[M]. Boston: Birkhauser, 2003: 21-68.

- [2] Lin H, Antsaklis P. Stability and stabilizability of switched linear systems: A survey of recent results[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2009, 54(2): 308-322.
- [3] Geromela J C, Colaneri P, Bolzern P. Passivity of switched linear systems: Analysis and control design[J]. Systems & Control Letters, 2012, 61(4): 549-554.
- [4] 董学平, 温锐, 刘红亮. 一类时滞分布参数切换系统的鲁棒容错控制[J]. 控制与决策, 2012, 27(2): 232-236. (Dong X P, Wen R, Liu H L. Robust fault-tolerant control for a class of distributed parameter switched system with time-delay[J]. Control and Decision, 2012, 27(2): 232-236.)
- [5] Grüne L, Pannek J. Nonlinear model predictive control theory and algorithms[M]. London: Springer-Verlag, 2011: 43-65.
- [6] Mhaskar P, El-Farra N H, Christofides P D. Predictive control of switched nonlinear systems with scheduled mode transitions[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2005, 50(11): 1670-1680.
- [7] 苏佰丽, 李少远. 具有不确定性的非线性切换系统的约束预测控制[J]. 自动化学报, 2008, 34(9): 1140-1146. (Su B L, Li S Y. Constrained predictive control for nonlinear switched systems with uncertainty[J]. Acta Automatica Sinica, 2008, 34(9): 1140-1146.)
- [8] 苏佰丽, 李少远, 朱全民. 约束切换非线性系统给出初始稳定区域的预测控制设计[J]. 中国科学 E 辑: 技术科学, 2009, 39(5): 994-1003. (Su B L, Li S Y, Zhu Q M. Predictive control design for initial stability region of constrained switched nonlinear systems[J]. Science in China Series E: Science and Technology, 2009, 39(5): 994-1003.)
- [9] 曾静, 薛定宇, 袁德成. 分布式模型预测控制方法的研究[J]. 系统仿真学报, 2008, 20(21): 5898-5902. (Zeng J, Xue D Y, Yuan D C. Distributed model predictive control: A survey[J]. J of System Simulation, 2008, 20(21): 5898-5902.)
- [10] Liu J F, Peña D M, Christofides P D. Distributed model predictive control of nonlinear process systems[J]. American Institute of Chemical Engineers J, 2009, 55(5): 1171-1184.
- [11] Liu J F, Peña D M, Christofides P D. Distributed model predictive control of nonlinear systems subject to asynchronous and delayed measurements[J]. Automatica, 2010, 46(1): 52-61.
- [12] Heidarnejad M, Liu J F, Peña D M, et al. Handling communication disruptions in distributed model predictive control[J]. J of Process Control, 2011, 21(1): 173-181.
- [13] Heidarnejad M, Liu J F, Christofides P D. Distributed model predictive control of switched nonlinear systems[C]. 2012 American Control Conf. Montréal, 2012: 3198-3203.