

多航天器系统分布式有限时间姿态协同跟踪控制

张海博^{1,2}, 胡庆雷¹, 马广富¹, 朱志斌²

(1. 哈尔滨工业大学 航天学院, 哈尔滨 150001; 2. 北京控制工程研究所
空间智能控制技术国家级重点实验室, 北京 100190)

摘要: 基于一致性算法, 在有向通讯拓扑下, 研究存在状态约束的多航天器系统分布式有限时间姿态协同跟踪控制问题. 在仅有部分跟随航天器可以获取领航航天器状态, 并且跟随航天器之间存在不完全信息交互的情形下, 设计了分布式快速终端滑模面, 提出了不依赖于模型的分布式有限时间姿态协同跟踪控制律. 根据有限时间 Lyapunov 稳定性定理, 证明了系统的状态在有限时间内收敛于领航航天器状态的小邻域内. 最后通过仿真算例验证了所提出算法的有效性.

关键词: 航天器系统; 分布式; 有限时间; 姿态协同控制; 快速终端滑模面

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Distributed finite-time attitude coordinated tracking control for multiple spacecraft systems

ZHANG Hai-bo^{1,2}, HU Qing-lei¹, MA Guang-fu¹, ZHU Zhi-bin²

(1. School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China; 2. National Key Laboratory of Science and Technology on Space Intelligent Control, Beijing Institute of Control Engineering, Beijing 100190, China. Correspondent: HU Qing-lei, E-mail: huqinglei@hit.edu.cn)

Abstract: Based on the consensus algorithm, a distributed finite-time attitude coordinated tracking control is proposed for multiple spacecraft systems with state constraint under the directed communication topology. A model-independent distributed finite-time attitude coordinated control algorithm is proposed by using the fast terminal sliding mode in the case that the leader spacecraft may only be available to a part of the follower spacecraft and/or with an incomplete information exchange among the follower spacecraft. The proposed control algorithm can guarantee that the follower spacecraft attitudes and angular velocities converge to a neighborhood of the leader spacecraft state in finite time based on the finite time Lyapunov theory. Simulation results show the effectiveness and feasibility of the proposed algorithm.

Key words: multiple spacecraft systems; distributed; finite-time; attitude coordinated control; fast terminal sliding mode

0 引言

在航天控制领域, 为了实现对目标的快速跟踪, 往往需要追踪航天器能在有限时间内达到跟踪目标或者星载载荷指向目标, 并对目标进行干扰或者攻击, 因此研究航天器有限时间姿态控制有着重要的军事意义和科学意义. 随着 Bhat 等人对有限时间齐次性理论^[1]和有限时间 Lyapunov 稳定性理论^[2]的提出和完善, 连续有限时间控制得到了迅速的发展.

基于多智能体一致性理论, 多航天器系统分布式姿态协同引起了广大学者的关注. 多数文献所研究的

是多航天器系统的渐近稳定特性, 然而对于工程实际中的航天器系统而言, 一般需要在有限时间内达到期望的状态. 有限时间控制具有很好的鲁棒性和抗干扰性. 有关多智能体(航天器也可看作智能体)系统的有限时间一致性控制问题^[3-8], 已经引起了一些学者的关注.

Cortés^[3]提出了一类基于符号梯度函数的非连续控制算法, 解决了无向连通拓扑结构下多智能体系统的有限时间一致性问题. Xiao 等^[4]在有向且强连通拓扑下给出控制协议, 解决了多智能体系统有限时间一

收稿日期: 2013-01-19; 修回日期: 2013-06-27.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61174200, 61273175); 黑龙江省青年科学基金项目(QC2012C024).

作者简介: 张海博(1983—), 男, 博士后, 从事多航天器系统协同控制等研究; 胡庆雷(1979—), 男, 教授, 博士生导师, 从事航天器编队飞行控制、航天器故障诊断与容错控制等研究.

致性控制问题. 余莹莹等^[5]提出了一类连续非线性函数的有限时间一致性算法, 并且考虑了通讯时滞的影响. Meng 等^[6]研究了存在多个领航航天器的有限时间姿态协同控制问题, 提出的控制律使得跟随航天器在有限时间内收敛于多领航航天器所形成的凸包内. Zhou 等^[7]提出了带有分数幂项的有限时间控制律, 在航天器间的通信拓扑为无向连通的情形下, 并且至少有一个跟随航天器对期望参考状态可知时, 各航天器有限时间收敛于期望状态. 高岱等^[8]提出了无需绝对角速度和相对角速度测量的多航天器分布式有限时间姿态协同控制算法.

考虑到多航天器系统的特点, 比如某些跟随航天器不可获取领航航天器的状态, 跟随航天器间仅可获取其邻居航天器的信息等, 这些特点都为多航天器有限时间协同控制带来了一定的挑战. 此外, 尽管有限时间控制在多智能体系统协同控制中已有较好的研究成果, 但主要是针对一阶积分系统或者二阶积分系统. 由于非线性系统的特殊性, 上述结果不能直接扩展到多航天器的有限时间协同控制问题中. 文献[6-8]虽然研究了多航天器的有限时间协同控制, 但航天器间的通讯拓扑图为无向的, 不具有一般性. 因此本文致力于研究在更具一般性的有向通讯拓扑下, 多航天器系统的有限时间协同控制问题.

1 预备知识

1.1 图 论

考虑以有向通讯拓扑图来描述各航天器之间的信息获取关系. 关于图论的更多知识, 可阅读相关参考文献[9]. 有向通讯拓扑 g 由若干个顶点 v 和若干个边 ε 组成. 顶点 v_i 表示第 i 个航天器, $i = 1, 2, \dots, n$. 边 (v_i, v_j) 表示航天器 j 能够获取航天器 i 的信息, v_i 为父节点, v_j 为子节点. 定义 $A = [a_{ij}] \in R^{n \times n}$ 表示有向图的加权邻接矩阵. 如果 $(v_j, v_i) \in \varepsilon$, 则 $a_{ij} > 0$, 反之, $a_{ij} = 0$. 有向路径是指有向图中边的一个序列. 如果有向图中任意两个不同的顶点 v_i, v_j 都存在路径, 则称有向图 g 是强连通的. 强连通分支是有向图的一个极大的强连通诱导子图, 图的任何顶点都处在某个强连通分支中. 如果有向图中含有一个没有父节点的特殊顶点(称之为根节点), 除了此根节点外, 其余每个节点均有且仅有一个父节点, 并且存在根节点到其余任何节点的路径, 则称该有向图为有向树. 有向生成树为包含该有向图全部节点的有向树. 如果有向图包含一个有向生成树的子图, 则称该有向图具有有向生成树. 定义有向图 g 的 Laplacian 矩阵为

$$L = D - A,$$

其中: $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$, $d_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}$. 对有向图而言, L 一般是不对称的.

引理 1^[10] 有向图 g 的 Laplacian 矩阵 L 仅有一个零特征值当且仅当 g 具有有向生成树.

引理 2^[11] 如果有向图 g 是强连通的, 则存在一个正向量 $\xi = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n]^T$, 满足 $\xi^T L = 0$. 特别地, 对于 $\forall i = 1, 2, \dots, n$, 如果 ξ 满足 $\sum_{i=1}^n \xi_i = 1$, 则矩阵

$$\tilde{L} = \frac{1}{2}(\Xi L + L^T \Xi), \quad \Xi = \text{diag}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$$
 是对称半正定的.

引理 3^[12] 假设 g 是强连通的, 向量 ξ 满足 $\xi^T L = 0$, 则矩阵 $\text{diag}(\xi)L + L^T \text{diag}(\xi)$ 是半正定的, 0 是其代数简单的特征值, 1 是相应的特征向量.

引理 4^[12] 对于任意非负列向量 $b = [b_1, b_2, \dots, b_n]^T$, 如果 $b \neq 0$ 且图 g 是无向连通的, 则 $L + \text{diag}(b)$ 是对称正定的.

1.2 航天器运动模型

采用修正罗德里格参数 (MRPs) 来描述航天器姿态运动, 则第 i 个航天器的姿态运动学和动力学方程分别为

$$\dot{\sigma}_i = G(\sigma_i)\omega_i, \quad (1a)$$

$$J_i \dot{\omega}_i = -S(\omega_i)J_i \omega_i + \tau_i + \tau_{di}. \quad (1b)$$

其中: σ_i 为第 i 个航天器姿态, ω_i 为第 i 个航天器本体坐标系相对于地心惯性坐标系的角速度在本体系中的投影, J_i 为正定对称的航天器转动惯量阵, $S(\omega_i)$ 为 ω_i 的 3×3 斜对称矩阵, τ_i 为作用于第 i 个航天器上的控制输入, 且有

$$G(\sigma_i) = \frac{1}{2} \left[\frac{1 - \|\sigma_i\|^2}{2} I_3 + S(\sigma_i) + \sigma_i \sigma_i^T \right],$$

对于向量而言, $\|\cdot\|$ 表示向量的 2 范数, $G(\sigma_i)$ 满足如下性质:

$$\det(G(\sigma_i)) = \frac{(1 + \sigma_i^2)^3}{4} \neq 0, \quad (2a)$$

$$G^T(\sigma_i)G(\sigma_i) = \left(\frac{1 + \sigma_i^2}{4} \right)^2 I_3. \quad (2b)$$

1.3 稳定性理论及引理

引理 5^[13] 考虑非线性系统 $\dot{x} = f(x, u)$, 若存在正定连续的函数 $V(x) : U \rightarrow R$, 满足 $\dot{V}(x) + \lambda_1 V(x) + \lambda_2 V^\alpha(x) \leq 0$, 其中 $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\alpha \in (0, 1)$, 则系统的原点也是有限时间稳定的, 且有限到达时间满足

$$T \leq \frac{1}{\lambda_1(1-\alpha)} \ln \frac{\lambda_1 V^{1-\alpha}(x_0) + \lambda_2}{\lambda_2}.$$

引理 6^[14] 考虑非线性系统 $\dot{x} = f(x, u)$, 假设存在连续函数 $V(x)$, 常数 $\lambda > 0$, $0 < \alpha < 1$, 且 $0 < \beta < \infty$, 使得 $\dot{V}(x) \leq -\lambda V^\alpha(x) + \beta$ 成立, 则系统是实际有限时间稳定的 (PFS), 且系统状态在有限时间内

收敛于如下紧集:

$$\lim_{t \rightarrow T} x \in \left(V^\alpha(x) \leq \frac{\beta}{(1-\theta)\lambda} \right),$$

其中 $0 < \theta \leq 1$, 有限到达时间为

$$T \leq \frac{V^{1-\alpha}(x(0))}{\lambda\theta(1-\alpha)}.$$

引理 7^[13] 对于任意给定的矢量 $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T, n \geq 1$, 如果 $0 < p < 2$, 则有不等式 $\|\mathbf{x}\|^p \leq \sum_{i=1}^n |x_i|^p$ 成立.

引理 8^[15] 任意 $x_i \in R, i = 1, 2, \dots, n$, 如果 $\exists 0 < b \leq 1$, 则有不等式 $(|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|)^b \leq |x_1|^b + |x_2|^b + \dots + |x_n|^b$ 成立.

引理 9^[13] $\frac{d|x_i|^{\alpha+1}}{dt} = (\alpha + 1)\text{sig}(x_i)^\alpha \dot{x}_i$, $\frac{d[\text{sig}(x)^{\alpha+1}]}{dt} = (\alpha + 1)|x|^\alpha \dot{x}$. 其中: $x, \alpha \in R, \text{sig}(x) = |x|\text{sgn}(x)$.

2 分布式有限时间姿态协同跟踪控制

2.1 问题描述

在仅有部分跟随航天器能够获取领航航天器状态, 并且跟随航天器间存在不完全的信息交互的情形下, 设计仅利用自身信息和邻居信息的分布式有限时间协同姿态跟踪控制律, 使得各跟随航天器在有限时间内跟踪上静态领航航天器.

记有向图 \bar{g} 表示跟随航天器与领航航天器之间的通讯拓扑. 假定领航航天器不能获取跟随航天器的状态信息, 即 $(v_i, v_0) \notin \bar{e}, \forall i = 1, 2, \dots, n$, 则 $a_{0i} = 0$, 并且仅有一部分跟随航天器可获取领航航天器的状态. 如果跟随航天器可以获得领航航天器的状态, 则 $a_{i0} > 0$, 否则 $a_{i0} = 0$. 领航航天器到所有跟随航天器都有有向路径, 则称有向图 \bar{g} 具有有向生成树. 注意到有向图 \bar{g} 的 Laplacian 矩阵为

$$\bar{L} = \begin{bmatrix} H & -a_{i0} \\ \mathbf{0}_n^T & 0 \end{bmatrix},$$

其中 $H = L + \text{diag}(a_{10}, a_{20}, \dots, a_{n0})$. 由引理 1 和 Gersgorin 圆盘定理可知, H 的所有特征值均具有正实部.

2.2 控制律设计

定义第 i 个跟随航天器的一致性误差为

$$\mathbf{q}_i = \sum_{j=0}^n a_{ij}(\boldsymbol{\sigma}_i - \boldsymbol{\sigma}_j). \quad (3)$$

其中: 下标“0”表示领航航天器, a_{ij} 表示航天器之间的信息获取关系, n 表示航天器的个数. 结合一致性误差, 设计如下快速终端滑模面:

$$\mathbf{s}_i = \boldsymbol{\omega}_i + G^T(\boldsymbol{\sigma}_i)[k_1 \mathbf{q}_i + k_2 \text{sig}(\mathbf{q}_i)^r]. \quad (4)$$

其中: $0 < r < 1, k_1$ 和 k_2 为大于零的常数, $\text{sig}(\mathbf{q}_i)^r =$

$$[\text{sgn}(q_{i1})|q_{i1}|^r, \text{sgn}(q_{i2})|q_{i2}|^r, \text{sgn}(q_{i3})|q_{i3}|^r]^T.$$

将式 (3) 和 (4) 表示为向量的形式, 则有

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= (H \otimes I_3)[\boldsymbol{\sigma} - (1_n \otimes \boldsymbol{\sigma}_0)], \\ \mathbf{s} &= \boldsymbol{\omega} + G^T(\boldsymbol{\sigma})[k_1 \mathbf{q} + k_2 \text{sig}(\mathbf{q})^r]. \end{aligned} \quad (5)$$

其中: $\mathbf{q}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\omega}$ 分别为 $\mathbf{q}_i, \boldsymbol{\sigma}_i, \boldsymbol{\omega}_i$ 拼成的列向量, $G^T(\boldsymbol{\sigma}) = \text{diag}(G^T(\boldsymbol{\sigma}_1), G^T(\boldsymbol{\sigma}_2), \dots, G^T(\boldsymbol{\sigma}_n)), 1_n$ 为全 1 的列向量, “ \otimes ”表示 Kronecker 积, $\text{sig}(\mathbf{q})^r = [\text{sig}(q_1)^{rT}, \text{sig}(q_2)^{rT}, \dots, \text{sig}(q_n)^{rT}]^T$.

针对第 i 个跟随航天器, 提出如下分布式有限时间协同控制律:

$$\boldsymbol{\tau}_i = -\eta \mathbf{s}_i - \varsigma \text{sig}(\mathbf{s}_i)^r - \mu J_i^* \|\boldsymbol{\omega}_i\| \text{fsat}(\mathbf{s}_i). \quad (6)$$

其中: $i = 1, 2, \dots, n, \eta, \varsigma > 0$, 由设计者给定; 定义航天器惯量矩阵的诱导范数 $\|J_i\| = \sqrt{\lambda_{\max}(J_i^T J_i)}$, 其中 $\lambda_{\max}(\cdot)$ 为矩阵的最大特征值, 选取 $J_i^* \geq \|J_i\|$ 为航天器转动惯量矩阵诱导范数的上界; μ 可表示为

$$\begin{aligned} \mu &= \|S(G^T(\boldsymbol{\sigma})[k_1 \mathbf{q} + k_2 \text{sig}(\mathbf{q})^r]) + \\ & k_1 G^T(\boldsymbol{\sigma})(H \otimes I_3)G(\boldsymbol{\sigma}) + \\ & k_2 r G^T(\boldsymbol{\sigma})\text{diag}(|\mathbf{q}|^{r-1})(H \otimes I_3)G(\boldsymbol{\sigma}) - \\ & S^T([k_1 \mathbf{q} + k_2 \text{sig}(\mathbf{q})^r])G(\boldsymbol{\sigma})\| + \\ & \frac{3}{2} \|\boldsymbol{\sigma}\| \|G(\boldsymbol{\sigma})[k_1 \mathbf{q} + k_2 \text{sig}(\mathbf{q})^r]\|. \end{aligned}$$

注意到当 $\mathbf{q}_i = 0$ 时, 表达式 $|\mathbf{q}_i|^{r-1}$ 将趋于无穷, 为了确保 μ 的有界性, 定义当 $\mathbf{q}_i = 0$ 时, 表达式 $|\mathbf{q}_i|^{r-1}$ 也等于 0, 从而避免了奇异的发生. fsat 可表示为

$$\text{fsat}\left(\frac{\mathbf{s}_i}{\phi}\right) = \begin{cases} \frac{|\mathbf{s}_i|^\rho}{|\mathbf{s}_i|^\rho + \phi} \text{sgn}(\mathbf{s}_i), & \|\mathbf{s}_i\| \leq \phi; \\ \text{sgn}(\mathbf{s}_i), & \|\mathbf{s}_i\| > \phi. \end{cases}$$

其中: $\text{sgn}(\mathbf{s}_i) = [\text{sgn}(s_{i1}), \text{sgn}(s_{i2}), \text{sgn}(s_{i3})]^T, 0 < \rho < 1$.

综上所述, 针对多航天器有限时间姿态协同控制问题, 给出如下定理.

定理 1 假设领航航天器为静态的, 应用分布式有限时间姿态协同控制律 (6), 如果有向图 \bar{g} 具有有向生成树, 则对于 $\forall i = 1, 2, \dots, n$, 存在有限时间 T , 当 $t \geq T$ 时, 各跟随航天器的状态在有限时间内到达领航航天器状态的小邻域内.

证明 根据引理 5 和引理 6, 分两步分析系统在控制律 (6) 作用下的有限时间稳定性.

1) 首先证明在控制律 (6) 作用下, 跟随航天器的状态能够在有限时间内到达滑模面的小邻域内. 选取如下候选 Lyapunov 函数:

$$V_0 = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T J \mathbf{s}, \quad (7)$$

其中 $J = \text{diag}(J_1, J_2, \dots, J_n)$. 对 V_0 求导可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_0 = & \mathbf{s}^T [J\dot{\boldsymbol{\omega}} + k_1 JG^T(\boldsymbol{\sigma})\dot{\mathbf{q}} + k_2 r JG^T(\boldsymbol{\sigma})\text{diag}(|\mathbf{q}|^{r-1})\dot{\mathbf{q}} + \\ & J\dot{G}^T(\boldsymbol{\sigma})[k_1 \mathbf{q} + k_2 \text{sig}(\mathbf{q})^r]]. \end{aligned} \quad (8)$$

其中: $\text{diag}(|\mathbf{q}|^{r-1}) = \text{diag}(|q_{i1}|^{r-1}, |q_{i2}|^{r-1}, |q_{i3}|^{r-1})$, $\text{diag}(|\mathbf{q}|^{r-1}) = \text{diag}[\text{diag}(|\mathbf{q}_1|^{r-1}), \dots, \text{diag}(|\mathbf{q}_n|^{r-1})]$. 结合式(1b)和(5), 并整理式(8)可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_0 = & \mathbf{s}^T \left\{ -S(\boldsymbol{\omega})J\boldsymbol{\omega} + k_1 JG^T(\boldsymbol{\sigma})(H \otimes I_3)G(\boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{\omega} + \right. \\ & k_2 r JG^T(\boldsymbol{\sigma})\text{diag}(|\mathbf{q}|^{r-1})(H \otimes I_3)G(\boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{\omega} + \\ & \left. \frac{1}{2}J[-\boldsymbol{\sigma}^T[G(\boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{\omega}]I_3 + S[G(\boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{\omega}] + G(\boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\sigma}^T + \right. \\ & \left. \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\omega}^T G^T(\boldsymbol{\sigma})]^T[k_1 \mathbf{q} + k_2 \text{sig}(\mathbf{q})^r] \right\} + \mathbf{s}^T \boldsymbol{\tau}. \end{aligned} \quad (9)$$

其中: $\boldsymbol{\tau}$ 为 τ_i 拼成的列向量; $S(\mathbf{l}) = \text{diag}[S(\mathbf{l}_1), S(\mathbf{l}_2), \dots, S(\mathbf{l}_n)]$, \mathbf{l} 为 \mathbf{l}_i 拼成的列向量, \mathbf{l}_i 泛指 $S(\cdot)$ 括号中三维向量; 注意到 $\boldsymbol{\omega} = -G^T(\boldsymbol{\sigma})[k_1 \mathbf{q} + k_2 \text{sig}(\mathbf{q})^r] + \mathbf{s}$ 和 $\mathbf{s}^T S(\mathbf{s}) = \mathbf{0}$, 将其代入式(9), 并整理可得

$$\dot{V}_0 \leq \mu \|\mathbf{s}\| \cdot \|J\| \cdot \|\boldsymbol{\omega}\| + \mathbf{s}^T \boldsymbol{\tau}. \quad (10)$$

结合引理7, 当 $\|\mathbf{s}_i\| > \phi$ 时, 将分布式控制律(6)代入式(10)可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_0 \leq & \mu \|\mathbf{s}\| \cdot \|J\| \cdot \|\boldsymbol{\omega}\| - \eta \mathbf{s}^T \mathbf{s} - \zeta \mathbf{s}^T \text{sig}(\mathbf{s})^r - \\ & \mu \sum_{i=1}^n J_i^* \|\boldsymbol{\omega}_i\| \mathbf{s}_i^T \text{sgn}(\mathbf{s}_i) \leq \\ & -\eta \mathbf{s}^T \mathbf{s} - \zeta \mathbf{s}^T \text{sig}(\mathbf{s})^r. \end{aligned} \quad (11)$$

注意到 J 对称正定, 则有如下不等式:

$$\frac{1}{2} J_{\min} \|\mathbf{s}\|^2 \leq V_0 \leq \frac{1}{2} J_{\max} \|\mathbf{s}\|^2,$$

其中 J_{\max} 和 J_{\min} 分别为 J 的最大、最小特征值. 结合引理8, 进一步整理式(11)可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_0 \leq & -\eta \|\mathbf{s}\|^2 - \zeta \sum_{i=1}^n \sum_{m=3}^3 |s_{im}|^{r+1} \leq \\ & -\frac{2\eta}{J_{\max}} V_0 - \frac{2^{(r+1)/2} \zeta}{J_{\max}^{(r+1)/2}} V_0^{\frac{r+1}{2}}. \end{aligned} \quad (12)$$

由引理5可知, 闭环系统(1a)和(1b)的轨迹在有限时间内收敛于边界层内. 当系统状态轨迹在边界层内, 即 $\|\mathbf{s}_i\| < \phi$ 时, 将控制律(6)代入式(10), 并整理可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_0 \leq & \mu \|\mathbf{s}\| \cdot \|J\| \cdot \|\boldsymbol{\omega}\| - \eta \mathbf{s}^T \mathbf{s} - \zeta \mathbf{s}^T \text{sig}(\mathbf{s})^r - \\ & \mu \sum_{i=1}^n J_i^* \|\boldsymbol{\omega}_i\| \mathbf{s}_i^T \frac{|\mathbf{s}_i|^\rho}{|\mathbf{s}_i|^\rho + \phi} \text{sgn}(\mathbf{s}_i). \end{aligned} \quad (13)$$

实际上, 在边界层内总存在一个小的正数, 使得 $\rho \leq \frac{|\mathbf{s}_i|^\rho}{|\mathbf{s}_i|^\rho + \phi}$ 成立, 且 $\rho < 1$, 则有

$$\begin{aligned} \dot{V}_0 \leq & -\eta \mathbf{s}^T \mathbf{s} - \zeta \mathbf{s}^T \text{sgn}(\mathbf{s})^r + \mu \|\mathbf{s}\| \cdot \|\boldsymbol{\omega}\| (\|J\| - \rho J_{\min}^*), \end{aligned} \quad (14)$$

其中 $J_{\min}^* = \min\{J_i^*\}$.

系统状态在边界层内, 因此 \mathbf{s} 是有界的, 进一步可得 $\boldsymbol{\omega}$ 也是有界的, 即 $\|\mathbf{s}\| \leq c_1$, $\|\boldsymbol{\omega}\| \leq c_2$. 这里选择 $\|J_i\| \leq J_i^* \leq \frac{\|J_i\|}{\rho}$, 则 $J_{\min}^* \leq \frac{\|J_i\|}{\rho}$, 因此可知 $0 \leq \|J\| - \rho J_{\min}^* \leq c_3$. 结合式(12), 并整理式(14)可得

$$\dot{V}_0 \leq -\frac{2\eta}{J_{\max}} V_0 - \frac{2^{(r+1)/2} \zeta}{J_{\max}^{(r+1)/2}} V_0^{\frac{r+1}{2}} + c_0, \quad (15)$$

其中 $c_0 = \mu c_1 c_2 c_3$. 定义 $b_1 = \frac{2\eta}{J_{\max}}$, $b_2 = 2^{r+1/2} \zeta / J_{\max}^{r+1/2}$, 则式(15)可重写为如下2种形式:

$$\dot{V}_0 \leq -\left(b_1 - \frac{c_0}{V_0}\right) V_0 - b_2 V_0^{\frac{r+1}{2}}, \quad (16)$$

$$\dot{V}_0 \leq -b_1 V_0 - \left(b_2 - \frac{c_0}{V_0^{\frac{r+1}{2}}}\right) V_0^{\frac{r+1}{2}}. \quad (17)$$

由式(16)可得, 如果 $b_1 - c_0/V_0 > 0$, 则由引理5可知, 系统终端滑模面有限时间内到达区域

$$\|\mathbf{s}\| \leq \sqrt{\frac{J_{\max} c_0}{J_{\min} \eta}} = \Omega_1. \quad (18)$$

由式(17)可得, 如果 $b_2 - \frac{c_0}{V_0^{r+1/2}} > 0$, 则同样由引理5可知, 系统终端滑模面有限时间内到达区域

$$\|\mathbf{s}\| \leq \sqrt{\left(\frac{c_0}{\zeta}\right)^{\frac{2}{r+1}} \frac{J_{\max}}{J_{\min}}} = \Omega_2. \quad (19)$$

综上可知, 闭环系统(1a)和(1b)的状态在有限时间内收敛于终端滑模面的小邻域内, 即区域 $\|\mathbf{s}\| \leq \Omega$ 内, 其中 $\Omega = \min\{\Omega_1, \Omega_2\}$.

2) 证明系统轨迹将沿着近似滑模面有限时间内收敛于领航航天器状态的邻域内. 假设各航天器间的通讯拓扑为强连通的, 选取 Lyapunov 函数为

$$V_1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \xi_i \sum_{m=1}^3 q_{im}^2. \quad (20)$$

对式(20)求导可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 = & \dot{\mathbf{q}}^T (\text{diag}(\boldsymbol{\xi}) \otimes I_3) \mathbf{q} = \\ & \boldsymbol{\omega}^T G^T(\boldsymbol{\sigma}) (H^T \text{diag}(\boldsymbol{\xi}) \otimes I_3) \mathbf{q}. \end{aligned} \quad (21)$$

结合 $\boldsymbol{\omega}$ 、引理2、引理3、引理4、引理7、引理8、性质(2a)和性质(2b), 对式(21)整理可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 \leq & -\left(\frac{\lambda_{\min} k_1}{8 \max_i \{\xi_i\}} - \frac{a \lambda_E}{2 \max_i \{\xi_i\}}\right) V_1 + \\ & \frac{\lambda_E}{4a} \|\mathbf{s}\|^2 - \frac{2^{r-1/2} \lambda_{\min} k_2}{\max_i \{\xi_i\}^{\frac{r+1}{2}}} V_1^{\frac{r+1}{2}}. \end{aligned} \quad (22)$$

其中: λ_{\min} 为对称正定矩阵 $\frac{1}{2}(\text{diag}(\boldsymbol{\xi})H + H^T \text{diag}(\boldsymbol{\xi}))$ 的最小特征值; a 为任意的正常数; λ_E 为矩阵 $H^T \text{diag}(\boldsymbol{\xi}) \otimes I_3$ 的诱导范数, 这里注意到 H 的所有特征根具有正实部, 因此 $H^T \text{diag}(\boldsymbol{\xi})$ 的全部特征根也具有正实部. 选择合适的 k_1 , 保证 $\frac{k_1 \lambda_{\min}}{2} - a \lambda_E > 0$.

上述已证明 $\|\mathbf{s}\| \leq \Omega$, 将其代入式(22)可得

$$\dot{V}_1 \leq -\lambda_2 V_1^{\frac{r+1}{2}} + \frac{\lambda_E}{4a} \Omega^2, \quad (23)$$

其中 $\lambda_2 = \frac{2^{\frac{r-7}{2}} \lambda_{\min} k_2}{\max_i \{\xi_i\}^{\frac{r+1}{2}}}$.

根据引理(6), 系统的一致性误差 \mathbf{q} 在有限时间内到达包含系统平衡点在内的小紧集内, 即

$$\lim_{t \rightarrow T} \mathbf{q}(t) \in \left(\|\mathbf{q}\| \leq \sqrt{\frac{1}{\min_i \{\xi_i\}} \left(\frac{\lambda_E \Omega^2}{4a(1-\theta_0)\lambda_2} \right)^{\frac{1}{r+1}}} \right), \quad (24)$$

其中 $0 < \theta_0 \leq 1$.

上述证明了在各航天器间的通讯拓扑为强联通的情形下, 系统状态在有限时间收敛. 接下来分析在各跟随航天器间的有向通讯拓扑具有有向生成树的情形下系统状态的有限时间收敛特性.

对一般的有向通讯拓扑图而言, 它是由若干个强连通分支组成的, 并且单个航天器也可以看作一个强连通分支. 对于一个包含领航航天器的强连通分支, 它们的状态不受其他航天器的影响, 因此该强连通分支中的各航天器的状态在有限时间内与领航航天器达到一致, 随后这些航天器的状态是时不变的, 对于其他航天器而言, 状态达到一致的几个航天器可以看作一个整体, 作为新的领航航天器, 与此整体相连通的跟随航天器在有限时间内与此新领航航天器的状态达到一致. 以此类推, 在有向通讯拓扑下各跟随航天器的状态在有限时间内跟踪领航航天器的状态. 因此可知, 在一般有向通讯拓扑下, 存在时间 T , 使得一致性误差 \mathbf{q} 收敛于零的小邻域内. 由式(5)可知, $\sigma_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 也收敛于领航航天器状态 σ_0 的小邻域内. 由 $\|s\| \leq \Omega$ 和式(5)可知, $\omega_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 也收敛于领航航天器状态的小邻域内. 因此, 所设计的控制律使得编队中的各跟随航天器状态在有限的时间内收敛于领航航天器状态的小邻域内. \square

3 仿真分析

本小节中对所设计的分布式有限时间协同跟踪控制律(6)的有效性进行仿真验证. 以6个跟随航天器飞行为例, 跟随航天器与领航航天器间的通讯拓扑关系如图1所示.

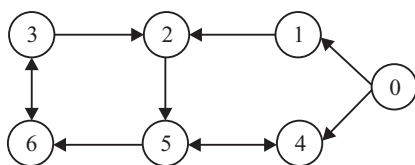


图1 跟随航天器与领航航天器通讯拓扑

由于篇幅的限制, 这里省略各跟随航天器的初始参数. 控制器参数选取为 $r = \rho = 0.8, k_1 = 20, k_2 = 2, \eta = 8, \varsigma = 4, J^* = 1.8, \phi = 0.05$. 给定领航航天器的状态(期望状态)为 $\sigma_0 = [0.1, 0, -0.1]^T$,

$\omega_0 = [0, 0, 0]^T \text{rad/s}$. 跟随航天器1、3、5的姿态和角速度随时间的变化曲线如图2所示. 图中纵坐标标注中变量的上角标代表滚动、俯仰和偏航3个分量, 下角标为跟踪航天器的标号, 下同.

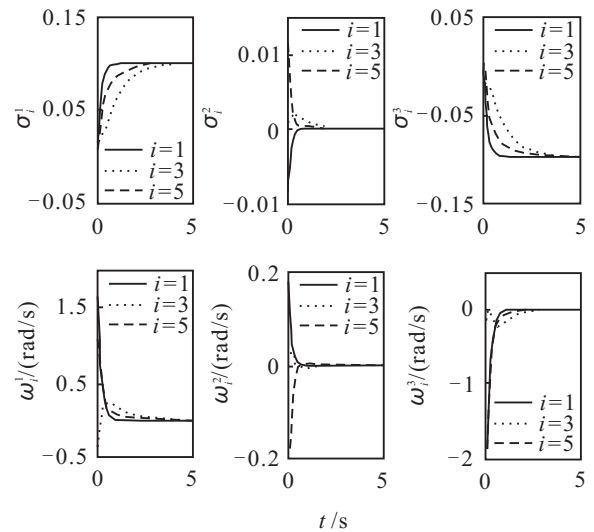


图2 跟随航天器1、3、5姿态和角速度变化曲线

由图2可知, 跟随航天器状态能够在有限时间内达到领航航天器的状态.

跟随航天器1、3、5所需控制力矩和航天器快速终端滑模面变化曲线如图3所示.

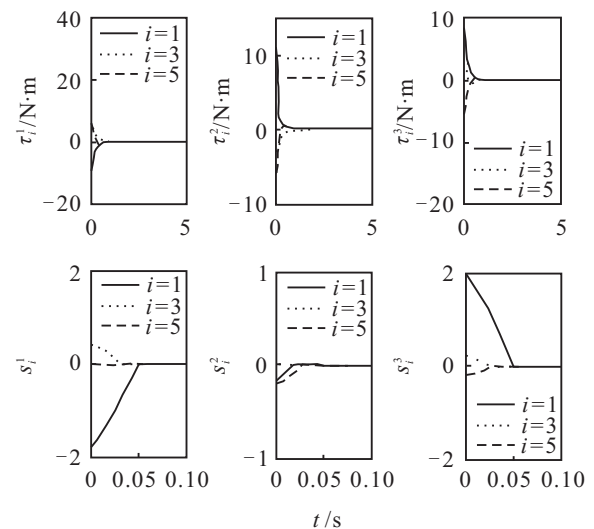


图3 跟随航天器1、3、5所需控制力矩和滑模面变化曲线

由图3可知, 由于分布式有限时间协同控制律(6)没有考虑执行机构输出受限问题, 仿真初始阶段所需要的力矩比较大, 系统的状态也在很短的时间内到达近似滑模面.

为了说明所设计快速终端滑模面的优越性, 根据 k_1 和 k_2 的不同取值, 给出当滑模面选择为线性滑模面 $s_i = \Omega_i + k_1 q_i$ 和终端滑模面 $s_i = \Omega_i + k_2 \text{sig}(q_i)^r$ 时, 跟随航天器一致性误差 $\|\mathbf{q}\|$ 随时间的变化曲线如图4所示.

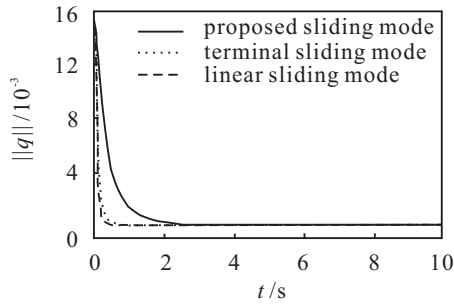


图 4 跟随航天器一致性误差 $\|q\|$ 变化曲线

由图 4 仿真曲线可以看出, 基于快速终端滑模面的有限时间姿态协同控制算法的收敛速度更快。

4 结 论

本文主要研究了在有向通讯拓扑下, 跟随航天器对领航航天器姿态的有限时间协同跟踪问题. 考虑静态的领航航天器, 只要有向通讯拓扑图 \bar{g} 具有有向生成树, 则所提出的分布式有限时间姿态控制律便能保证各跟随航天器在有限时间内收敛于领航航天器状态的小邻域内. 将来的工作主要考虑领航航天器为动态情形和信息时延、执行机构受限情形下的有限时间协同跟踪控制。

参考文献(References)

- [1] Bhat S, Bernstein D. Finite-time stability of homogeneous systems[C]. Proc of the American Control Conf. Albuquerque, 1997: 2513-2514.
- [2] Bhat S P, Bernstein D S. Continuous finite-time stabilization of the translational and rotational double integrators[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1998, 43(5): 678-682.
- [3] Cortés J. Finite-time convergent gradient flows with applications to network consensus[J]. Automatica, 2006, 42(11): 1993-2000.
- [4] Xiao F, Wang L, Chen J, et al. Finite-time formation control for multi-agent systems[J]. Automatica, 2009, 45(11): 2605-2611.
- [5] 余莹莹, 方华京. 基于一类连续非线性函数的多智能体系统有限时间一致性[J]. 控制与决策, 2011, 26(7): 1101-1104.
- (She Y Y, Fang H J. Finite-time consensus for multi-agent systems on continuous nonlinear functions[J]. Control and Decision, 2011, 26(7): 1101-1104.)
- [6] Meng Z Y, Ren W, You Z. Distributed finite-time attitude containment control for multiple rigid bodies[J]. Automatica, 2010, 46(12): 2092-2099.
- [7] Zhou J K, Hu Q L, Friswell M I. Decentralized Finite-time attitude synchronization control of satellite formation flying[J]. J of Guidance, Control, and Dynamics, 2013, 36(1): 185-195.
- [8] 高岱, 吕建婷, 王本利. 航天器有限时间输出反馈姿态控制[J]. 航空学报, 2012, 32(11): 2074-2081.
- (Gao D, Lv J T, Wang B L. Finite-time output feedback attitude control of spacecraft[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2012, 33(11): 2074-2081.)
- [9] Biggs N. Algebraic graph theory[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1993.
- [10] Ren W, Beard R W, Atkins E M. Information consensus in multivehicle cooperative control[J]. IEEE Control Systems Magazine, 2007, 27(2): 71-82.
- [11] Olfati-saber R, Fax J A, Murray R M. Consensus and cooperation in networked multi-agent systems[J]. Proc of the IEEE, 2007, 95(1): 215-233.
- [12] 肖锋. 多智能体网络系统的一致性[D]. 北京: 北京大学工学院, 2008.
- (Xiao F. Consensus problems in networks of multiple autonomous agents[D]. Beijing: College of Engineering, Peking University, 2008.)
- [13] Yu S H, Yu X H, Shirinzadeh B, et al. Continuous finite-time control for robotic manipulators with terminal sliding mode[J]. Proc of the IEEE, 2007, 95(1): 215-233.
- [14] Zhu Z, Xia Y Q, Fu M Y. Attitude stabilization of rigid spacecraft with finite-time convergence[J]. Int J of Robust and Nonlinear Control, 2011, 21(6): 686-702.
- [15] Hardy G, Littlewood J, Polya G. Inequalities[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1952: 72-77.

(责任编辑: 闫妍)