

一类不确定离散系统的生存性判别

陈征^{1,2}, 高岩¹

(1. 上海理工大学 管理学院, 上海 200093; 2. 宁波工程学院 理学院, 浙江 宁波 315211)

摘要: 研究一类非线性不确定系统的生存性问题. 基于支撑函数, 给出了此系统在凸紧集下可生存的充要条件. 当生存域为多面体时, 分别针对多面体和的形式和交的形式给出了系统生存的充分条件. 最后给出的算例表明了所提出方法的有效性, 同时表明所得结果实际上给出了某类切换系统的生存性条件.

关键词: 不确定系统; 切换系统; 生存性

中图分类号: TD350

文献标志码: A

Determining viability for a class of uncertain discrete systems

CHEN Zheng^{1,2}, GAO Yan¹

(1. Management School, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China; 2. School of Sciences, Ningbo University of Technology, Ningbo 315211, China. Correspondent: CHEN Zheng, E-mail: chenzheng@nbut.edu.cn)

Abstract: The problem of viability for a class of nonlinear uncertain systems is studied. A sufficient and necessary condition of viability for the convex compact set under this system via support functions is presented. When the viable set is a polytope, sufficient conditions for the sum form and intersection form of the polytope are given to determine the viability. Finally, a numerical example is presented to illustrate the result, and the example shows that the main result also gives a condition of viability for a kind of switched systems.

Key words: uncertain system; switched system; viability

0 引言

生存性问题是目前控制理论中最热门的研究课题之一. 生存性判别研究无论在理论上还是在实际应用中都具有很大的意义和挑战性^[1-4]. 所谓控制系统的生存性是指如果系统的初始值在某一区域内, 则其整个轨迹都在此区域内. 虽然 Aubin^[5]给出了一般意义上的判断生存性的方法, 但此方法过于笼统和抽象, 并不能具体地计算和应用. 因此, 目前大量的工作都集中在对一些具体的区域和控制系统给出生存性的判断条件^[6-8], 尤其对线性系统的生存性研究取得了很好的结果. 但是这些关于生存性的判断方法往往需要对生存区域边界上的每个点都进行一次判断, 从而计算量非常大. 以上研究都是针对连续动力系统的, 对于离散系统和不确定系统的生存性研究较为少见. 与连续系统一样, 离散系统的生存性研究在控制理论研究上有着非常重要的位置^[9-10].

本文对一类较为一般的离散非线性不确定系统进行了生存性的研究, 给出了此系统在凸紧集下可生存的充要条件. 当生存域为多面体时, 只要判断多面体顶点的生存性就能完成整个系统生存性的判断, 从而不用判断生存域边界上每一点的生存性, 由此极大地减少了计算量, 使得生存性的判断成为可行. 另外, 所给出的系统实际上可以看成一种切换系统, 因此所得结果也适用于此类切换系统.

1 预备知识

为了研究方便, 先给出一些记号和定义^[11-12]. 设 $f(x)$ 为 R^m 到 R^n 上的函数, 则 $[f(x)]_i$ 表示 $f(x)$ 的第 i 个分量. 设 $u, v \in R^n$, $\max\{u, v\} = (\max(u_1, v_1), \dots, \max(u_n, v_n))^T$, 其中 u_i, v_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 是向量 u, v 的分量. 设向量 $c \in R^n$, 则定义 $a_+ = a_+(c) = \{j | c_j \geq 0\}$ 和 $a_- = a_-(c) = \{j | c_j < 0\}$.

定义 1 设 S 为 R^n 上的凸集, $f(x)$ 为定义于

收稿日期: 2013-01-22; 修回日期: 2013-07-09.

基金项目: 国家自然科学基金项目(11171221, 40901241); 上海市科委与地方院校能力建设项目(10550500800).

作者简介: 陈征(1977-), 男, 博士, 从事混杂系统控制的研究; 高岩(1962-), 男, 教授, 博士生导师, 从事非光滑优化、混杂系统控制等研究.

S 到 R 上的函数, 如果对于任意 $x_1, x_2 \in S, 0 \leq \lambda \leq 1$, 有

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2),$$

则称 $f(x)$ 为 S 上的凸函数.

可将定义 1 中凸函数作如下推广:

设 $f(x)$ 是 $R^n \rightarrow R^m$ 的函数, $f(x)$ 是凸函数是指 $[f(x)]_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 都是凸函数.

定义 2 R^n 中有限点集 $\{a_1, \dots, a_m\}$ 的凸包为如下集合:

$$\left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i \mid \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1 \right\},$$

记作 $\text{co}\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$.

定义 3 集合 A, B 的 Minkowski 和定义为

$$A \oplus B = \{x + y \mid x \in A, y \in B\}.$$

定义 4 设 $S \subseteq R^n$ 为非空凸紧集, 称函数

$$\sigma_S^*(x) = \max_{s \in S} s^T x$$

为 S 的支撑函数.

定义 5 设 $f(x)$ 为 R^n 上的凸函数, $f(x)$ 在 x 点的次微分 $\partial f(x)$ 定义如下:

$$\partial f(x) = \{\xi \in R^n \mid f(y) \geq f(x) + \xi^T(y - x), \forall y \in R^n\}.$$

次微分可以看作是梯度的推广, 当 $f(x)$ 在 x 点可微时, 次微分便退化为梯度.

定义 6 某系统在闭集 K 下可生存指的是对于初始点 $x_0 \in K$, 系统的轨迹都落在集合 K 中.

Aubin 等给出了如下的生存条件:

引理 1 考虑集值映射 $F: R \rightarrow 2^{R^n}$, 差分包含 $x(k+1) \in F(x(k))$ 在闭集 K 下可生存的充要条件是

$$F(x) \cap K \neq \emptyset, \forall x \in K.$$

2 问题描述

考虑如下的离散系统:

$$x(k+1) = \max_{1 \leq i \leq m} (f_i(x(k), u) - g_i(x(k), u)) + w. \quad (1)$$

其中: $x(k) \in X \subseteq R^n$ 是系统当前的状态, $u \in U \subseteq R^m$ 是控制向量, $w \in W \subseteq R^n$ 是有界的干扰. 式 (1) 中的 $f_i, g_i: X \times U \rightarrow R^n$ 为凸函数. 设

$$h(x(k), u) = \max_{1 \leq i \leq m} (f_i(x(k), u) - g_i(x(k), u)),$$

$$F(x(k)) = \{h(x(k), u) \mid u \in U\},$$

可将式 (1) 写成差分包含形式

$$x(k+1) \in \{F(x(k)) \oplus W\}, \quad (2)$$

所以在下面的描述中, 系统 (2) 可生存与系统 (1) 可生存是等价的.

注 1 关于系统 (1), 等式右边如果不考虑干扰, 则是一类较为广泛的非光滑函数, 在较好的条件下,

可以逼近连续函数. 因此, 系统 (1) 可用来描述大量的现实世界中的动力系统.

为了研究方便, 给出如下的假设.

假设 1 $X \subseteq R^n, U \subseteq R^m, W \subseteq R^n$ 是闭凸并包含原点在其内部的集合, 并要求 W 是有界的.

$$\text{假设 2} \quad \max_{1 \leq i \leq m} \left\{ f_i(0, 0) + \sum_{j=1, j \neq i}^m g_j(0, 0) \right\} = 0$$

$$\text{和} \quad \sum_{j=1}^m g_j(0, 0) = 0.$$

定义 7 在假设 1 和假设 2 成立的条件下, 给出如下函数:

$$H(x(k), u, k) =$$

$$\sum_{k \in a_+} c_k \left(\left[\max_{1 \leq i \leq m} \left\{ f_i(x(k), u) + \sum_{j=1, j \neq i}^m g_j(x(k), u) \right\} \right]_k - (x(k)^T, u^T) \xi_k^2 \right) + \sum_{k \in a_-} c_k \left((x(k)^T, u^T) \xi_k^1 - \left[\sum_{j=1}^m g_j(x(k), u) \right]_k \right).$$

其中

$$\xi_k^1 \in \partial \left[\max_{i=1}^m \left\{ f_i(0, 0) + \sum_{j=1, j \neq i}^m g_j(0, 0) \right\} \right]_k,$$

$$\xi_k^2 \in \partial \left[\sum_{j=1}^m g_j(0, 0) \right]_k.$$

3 非线性不确定系统的生存性

考虑系统 (1) 在凸紧集下的生存性条件. 为了研究方便, 在系统 (1) 中先不考虑干扰 w , 当存在干扰 w 时, 其结果是类似的.

$$x(k+1) = \max_{1 \leq i \leq m} (f_i(x(k), u) - g_i(x(k), u)) \quad (3)$$

的差分包含形式为

$$x(k+1) \in F(x(k)). \quad (4)$$

在给出主要结果之前, 先给出如下定理.

定理 1 定义 7 中的 $H(x(k), u, c)$ 关于 $(x(k), u) \in X \times U$ 是凸函数.

证明 由 $H(x(k), u, c)$ 的定义可知, 它是由有限个凸函数相加和有限个凸函数取最大所形成的函数, 因此也是凸函数. \square

定理 2 在假设 1 和假设 2 成立的条件下, 对于任意的 $c \in R^n$, 有

$$c^T \max_{1 \leq i \leq m} (f_i(x(k), u) - g_i(x(k), u)) \leq$$

$$H(x(k), u, c).$$

证明 首先将 $\max_{1 \leq i \leq m} (f_i(x(k), u) - g_i(x(k), u))$ 作如下改写. 因为

$$f_i(x(k), u) - g_i(x(k), u) = f_i(x(k), u) + \sum_{j=1, j \neq i}^m g_j(x(k), u) - \sum_{j=1}^m g_j(x(k), u),$$

所以

$$\begin{aligned} & \max_{1 \leq i \leq m} (f_i(x(k), u) - g_i(x(k), u)) = \\ & \max_{1 \leq i \leq m} \left\{ f_i(x(k), u) + \sum_{j=1, j \neq i}^m g_j(x(k), u) \right\} - \sum_{j=1}^m g_j(x(k), u). \end{aligned}$$

显然, 函数 $\max_{1 \leq i \leq m} \left\{ f_i(x(k), u) + \sum_{j=1, j \neq i}^m g_j(x(k), u) \right\}$ 和 $\sum_{j=1}^m g_j(x(k), u)$ 是凸函数. 由次微分的定义, 有

$$\begin{aligned} & (x(k)^T, u^T) \xi_k^1 \leq \\ & \left[\max_{1 \leq i \leq m} \left\{ f_i(x(k), u) + \sum_{j=1, j \neq i}^m g_j(x(k), u) \right\} \right]_k, \\ & (x(k)^T, u^T) \xi_k^2 \leq \left[\sum_{j=1}^m g_j(x(k), u) \right]_k. \end{aligned}$$

由此, 如果 $k \in a_+$, 则

$$c_k((x(k)^T, u^T) \xi_k^2 - \sum_{j=1}^m g_j(x(k), u)) \leq 0;$$

如果 $k \in a_-$, 则

$$\begin{aligned} & c_k \left(\left[\max_{1 \leq i \leq m} \left\{ f_i(x(k), u) + \sum_{j=1, j \neq i}^m g_j(x(k), u) \right\} \right]_k - (x(k)^T, u^T) \xi_k^1 \right) \leq 0. \end{aligned}$$

有

$$\begin{aligned} & c^T \max_{1 \leq i \leq m} (f_i(x(k), u) - g_i(x(k), u)) - H(x(k), u, c) = \\ & \sum_{k=1}^n c_k \left(\left[\max_{1 \leq i \leq m} \left\{ f_i(x(k), u) + \sum_{j=1, j \neq i}^m g_j(x(k), u) \right\} \right]_k - \left[\sum_{j=1}^m g_j(x(k), u) \right]_k \right) - \sum_{k \in a_+} c_k \left(\left[\max_{1 \leq i \leq m} \left\{ f_i(x(k), u) + \sum_{j=1, j \neq i}^m g_j(x(k), u) \right\} \right]_k - (x(k)^T, u^T) \xi_k^2 \right) - \sum_{k \in a_-} c_k \left((x(k)^T, u^T) \xi_k^1 - \left[\sum_{j=1}^m g_j(x(k), u) \right]_k \right) = \\ & \sum_{k \in a_+} c_k \left((x(k)^T, u^T) \xi_k^2 - \left[\sum_{j=1}^m g_j(x(k), u) \right]_k \right) + \sum_{k \in a_-} c_k \left(\left[\max_{1 \leq i \leq m} \left\{ f_i(x(k), u) + \sum_{j=1, j \neq i}^m g_j(x(k), u) \right\} \right]_k - (x(k)^T, u^T) \xi_k^1 \right) \leq 0, \end{aligned}$$

所以有

$$\begin{aligned} & c^T \max_{1 \leq i \leq m} (f_i(x(k), u) - g_i(x(k), u)) \leq \\ & H(x(k), u, c). \end{aligned}$$

由此定理得证. \square

注2 因为 $f_i, g_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 是凸函数, 所以 $\partial[f_i(0, 0)]_k, \partial[g_i(0, 0)]_k, i = 1, 2, \dots, m, k = 1, 2, \dots, n$ 存在. 由此, 记

$$\begin{aligned} & I_k(x) = \\ & \left\{ i \left[\max_{1 \leq i \leq m} \left\{ f_i(x(k), u) + \sum_{j=1, j \neq i}^m g_j(x(k), u) \right\} \right]_k = \left[f_i(x(k), u) + \sum_{j=1, j \neq i}^m g_j(x(k), u) \right]_k \right\}, \end{aligned}$$

有

$$\begin{aligned} & \partial \left[\max_{1 \leq i \leq m} \left\{ f_i(0, 0) + \sum_{j=1, j \neq i}^m g_j(0, 0) \right\} \right]_k = \\ & \text{co} \left\{ \bigcup \partial \left[f_i(0, 0) + \sum_{j=1, j \neq i}^m g_j(0, 0) \right]_k \mid i \in I_k(x) \right\} = \\ & \text{co} \left\{ \bigcup \left(\partial[f_i(0, 0)]_k + \sum_{j=1, j \neq i}^m \partial[g_j(0, 0)]_k \mid i \in I_k(x) \right) \right\}, \end{aligned}$$

其中 $k = 1, 2, \dots, n$. 计算 $\sum_{j=1}^m g_j(x(k), u)$ 在原点的次

微分, 有 $\partial \left[\sum_{j=1}^m g_j(0, 0) \right]_k = \sum_{j=1}^m \partial[g_j(0, 0)]_k$. 所以函数

$\max_{1 \leq i \leq m} \left\{ f_i(x(k), u) + \sum_{j=1, j \neq i}^m g_j(x(k), u) \right\}$ 和 $\sum_{j=1}^m g_j(x(k), u)$ 的次微分是可以通过计算 f_i, g_i 的次微分得到. 下面将给出本文的主要结果.

定理3 在假设1和假设2成立的条件下, 差分包含(2)在凸紧集 Q 下可生存的充要条件是存在一个 $u \in U$, 使得

$$\begin{aligned} & c^T \left(\max_{1 \leq i \leq m} (f_i(x(k), u) - g_i(x(k), u)) + w \right) \leq \\ & \sigma_Q^*(c) - \sigma_W^*(c), \forall x \in Q, \forall c \in R^n. \end{aligned}$$

证明 由引理1, 差分包含(2)在 Q 下可生存的充要条件是存在 $u \in U$, 使得

$$\begin{aligned} & \max_{1 \leq i \leq m} (f_i(x(k), u) - g_i(x(k), u)) + w \in Q, \\ & \forall x \in Q, \forall w \in W. \end{aligned} \tag{5}$$

因 Q 是凸紧集, 所以式(5)等价于

$$\begin{aligned} & c^T \left(\max_{1 \leq i \leq m} (f_i(x(k), u) - g_i(x(k), u)) + w \right) \leq \sigma_Q^*(c), \\ & \forall x \in Q, \forall w \in W, \forall c \in R^n. \end{aligned} \tag{6}$$

式(6)又等价于

$$c^T \left(\max_{1 \leq i \leq m} (f_i(x(k), u) - g_i(x(k), u)) \right) \leq$$

$$\sigma_Q^*(c) - \sup_{w \in W} c^T w,$$

进一步等价于

$$c^T \left(\max_{1 \leq i \leq m} (f_i(x(k), u) - g_i(x(k), u)) + w \right) \leq$$

$$\sigma_Q^*(c) - \sigma_W^*(c).$$

由此定理得证. \square

定理 3 给出了差分包含 (2) 在凸紧集 Q 下可生存的充要条件. 此条件中有支撑函数的计算, 一般情况是可以计算的, 但需要检验无穷多个点. 而当凸紧集 Q 为有界多面体时, 只需要检验有限多个点是否生存. 下面的定理描述了此特殊情况.

给出如下形式的有界多面体:

$$P = \text{co}\{a_1, a_2, \dots, a_l\},$$

其中 $a_i (i = 1, 2, \dots, l)$ 是 n 维向量.

定理 4 在假设 1 和假设 2 成立的条件下, 对于多面体 $P = \text{co}\{a_1, a_2, \dots, a_l\}$, 如果在点 a_1, a_2, \dots, a_l 处存在 $u_i = u_i(a) \in U$, 使得

$$H(a_i, u_i, c) \leq \sigma_P^*(c), \quad i = 1, 2, \dots, l$$

成立, 则差分包含 (4) 在多面体 P 下是可生存的. 其中 c 是任意常向量.

证明 由于 P 是多面体, 对于 $x \in P$ 可以表示成 $x(k) = \sum_{j=1}^l \lambda_j a_j, 0 \leq \lambda_j \leq 1, \sum_{j=1}^l \lambda_j = 1$. 其对应的控制 u 定义为 $u = \sum_{j=1}^l \lambda_j u_j$. 由定理 2, 得

$$c^T \left(\max_{1 \leq i \leq m} (f_i(x(k), u) - g_i(x(k), u)) \right) \leq H(x(k), u, c),$$

而

$$H(x(k), u, c) = H\left(\sum_{j=1}^l \lambda_j a_j, \sum_{j=1}^l \lambda_j u_j, c\right).$$

又由定理 1, 得

$$H\left(\sum_{j=1}^l \lambda_j a_j, \sum_{j=1}^l \lambda_j u_j, c\right) \leq \sum_{j=1}^l \lambda_j H(a_j, u_j, c) \leq \sum_{j=1}^l \lambda_j \sigma_P^*(c).$$

综上, 有

$$c^T \left(\max_{1 \leq i \leq m} (f_i(x(k), u) - g_i(x(k), u)) \right) \leq \sigma_P^*(c).$$

所以由定理 3, 差分包含 (4) 在多面体 P 下是可生存的. \square

如果考虑有干扰的不确定系统 (1), 则可以得到类似定理 4 的结果. 下面给出此定理.

定理 5 在假设 1 和假设 2 成立的条件下, 对于多面体 $P = \text{co}\{a_1, a_2, \dots, a_l\}$, 如果在点 $a_1, a_2, \dots,$

a_l 处存在 $u_i = u_i(a) \in U$, 使得

$$H(a_i, u_i, c) \leq \sigma_P^*(c) - \sigma_W^*(c), \quad i = 1, 2, \dots, l$$

成立, 则差分包含 (2) 在多面体 P 下是可生存的, 其中 c 是任意常向量.

证明 由于 P 是多面体, 对于 $x \in P$ 可以表示成 $x(k) = \sum_{j=1}^l \lambda_j a_j, 0 \leq \lambda_j \leq 1, \sum_{j=1}^l \lambda_j = 1$. 其对应的控制 u 定义为 $u = \sum_{j=1}^l \lambda_j u_j$.

$$c^T \left(\max_{1 \leq i \leq m} (f_i(x(k), u) - g_i(x(k), u)) \right) \leq$$

$$H(x(k), u, c) = H\left(\sum_{j=1}^l \lambda_j a_j, \sum_{j=1}^l \lambda_j u_j, c\right) \leq$$

$$\sum_{j=1}^l \lambda_j H(a_j, u_j, c) \leq \sum_{j=1}^l \lambda_j (\sigma_P^*(c) - \sigma_W^*(c)) =$$

$$\sigma_P^*(c) - \sigma_W^*(c).$$

所以由定理 3, 差分包含 (2) 在多面体 P 下是可生存的. \square

定理 4 和定理 5 中的多面体以凸包的形式给出, 多面体也可以由若干个超平面的交的形式给出. 这两种形式可以相互转化, 具体见文献 [13].

下面给出如下的多面体交的形式:

$$P' = \{x | c_i x \leq d_i, i = 1, 2, \dots, p\}. \quad (7)$$

其中: c_i 是向量, d_i 是常数.

由支撑函数的定义可得

$$x \in P' \Leftrightarrow c_i x \leq d_i = \sigma_P^*(c_i^T), \quad i = 1, 2, \dots, p.$$

所以当多面体为式 (7) 的形式时, 支撑函数取值只要考虑有限个值, 即点 $c_i, i = 1, 2, \dots, p$.

下面考虑如下的多面体: $P' = \{x | c_i x \leq 1, i = 1, 2, \dots, p\}$, 给出如下两个推论, 分别对应了定理 4 和定理 5.

推论 1 在假设 1 和假设 2 成立的条件下, 对于多面体 $P' = \{x | c_i x \leq 1, i = 1, 2, \dots, p\}$, 设其顶点为 a_1, a_2, \dots, a_l , 如果在点 a_1, a_2, \dots, a_l 处存在 $u_i = u_i(a_i) \in U$, 使得

$$H(a_i, u_i, c_j^T) \leq 1, \quad (8)$$

$$i = 1, 2, \dots, l, \quad j = 1, 2, \dots, p$$

成立, 则差分包含 (4) 在多面体 P' 下是可生存的.

证明 与定理 4 类似, 此处省略.

推论 2 在假设 1 和假设 2 成立的条件下, 对于多面体 $P' = \{x | c_i x \leq 1, i = 1, 2, \dots, p\}$, 设其顶点为 a_1, a_2, \dots, a_l , 如果在点 a_1, a_2, \dots, a_l 处存在 $u_i = u_i(a_i) \in U$, 使得

$$H(a_i, u_i, c_j^T) \leq 1 - \sigma_W^*(c_j^T), \quad (9)$$

$$i = 1, 2, \dots, l, j = 1, 2, \dots, p$$

成立, 则差分包含 (2) 在多面体 P' 下是可生存的.

证明与定理 5 类似, 此处省略.

注 3 对于推论 1 中条件 (8), 只需计算 $H(a_i, u_i, c_j^T)$, 观察其值是否小于 1 即可, 因此很容易判断整个多面体区域的生存性. 推论 2 中的条件 (9) 的判断与条件 (8) 相比较, 需要计算支撑函数 $\sigma_W^*(c_j^T)$, 而此支撑函数的计算可以转化为如下的优化问题:

$$\begin{aligned} \max \quad & c_j^T x; \\ \text{s.t.} \quad & x \in W, j = 1, 2, \dots, p, \end{aligned}$$

由 W 的凸紧性可以求出最优解. 推论 1 和推论 2 的优点在于判断生存性时, 只要作有限次判断即可. 另外, 根据上面的讨论, 每次判断只要进行一次简单的比较或运算.

4 数值仿真

下面给出算例来说明本文方法的有效性. 取

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

于是 $Hx \leq 1$ 表示以点 $(1, 1)^T, (-1, 1)^T, (-1, -1)^T$ 和 $(1, -1)^T$ 为顶点的正方形区域. 取

$$\begin{aligned} x(k+1) = \max \left\{ \begin{bmatrix} -0.9 & 0 \\ 0 & -0.8 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \right. \\ \left. \begin{bmatrix} -0.7 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \right\}, \end{aligned}$$

为了方便, 取 $u = 0$. 由式 (8) 经过简单的计算可知上述系统是可生存的.

如果取初始点为 $P_1 = (0.9, 0.9)^T$, 即初始点取在第 I 象限, 可得到图 1 所示的轨迹. P_1 在第 I 象限用实点表示, 根据所给的系统计算出第 2 点 P_2 在第 III 象限, 并用空心的点表示. 然后继续得到第 I 象限的 P_3 和第 III 象限的 P_4 , 如此一直进行下去得到系统的轨迹图. 按照上面的规律, 状态点在第 I 象限和第 III

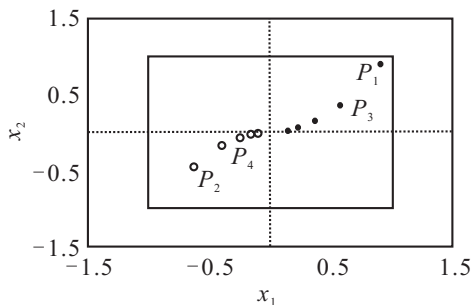


图 1 生存性示意图 (a)

象限交替出现, 并且第 I 象限用实点表示, 第 III 象限用空心的点表示. 可见初始点取在第 I 象限时, 系统是可生存的.

如果初始点取在第 II 象限, 设 $Q_1 = (-0.85, 0.9)^T$, 得到如图 2 所示的轨迹. 图 2 中的点还是依此在第 II 象限和第 IV 象限出现. 由此可知, 初始点取在第 II 象限时, 系统是可生存的.

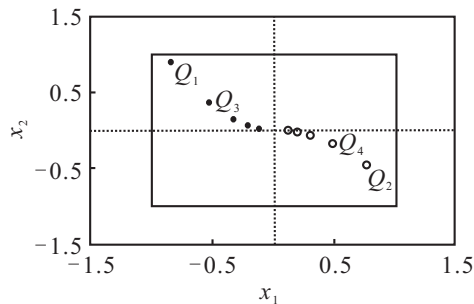


图 2 生存性示意图 (b)

如果初始点取第 III 象限的 $M_1 = (-0.85, -0.9)^T$, 得到如图 3 所示的轨迹. 图 3 中的点依此在第 III 象限和第 I 象限出现. 可见初始点取在第 III 象限时, 系统是可生存的.

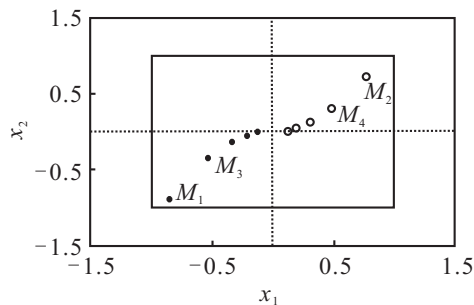


图 3 生存性示意图 (c)

初始点取第 IV 象限的 $N_1 = (0.85, -0.9)^T$, 得到如图 4 所示的轨迹. 图 4 中的点依此在第 IV 象限和第 II 象限出现. 可见初始点取在第 IV 象限时, 系统是可生存的.

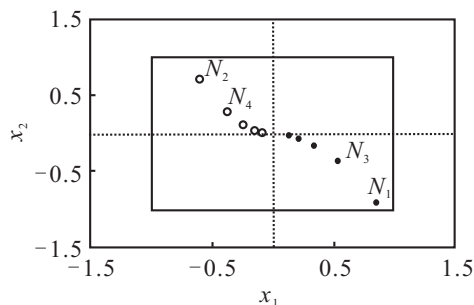


图 4 生存性示意图 (d)

注 4 实际上, 本节中给出的例子可以用如下系统表示:

$$x(k+1) = \begin{cases} \begin{cases} \begin{bmatrix} -0.7 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \\ 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1; \end{cases} \\ \begin{cases} \begin{bmatrix} -0.9 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \\ -1 \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq 1; \end{cases} \\ \begin{cases} \begin{bmatrix} -0.9 & 0 \\ 0 & -0.8 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \\ -1 \leq x \leq 0, -1 \leq y \leq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} \begin{bmatrix} -0.7 & 0 \\ 0 & -0.8 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \\ 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 0. \end{cases} \end{cases} \quad (10)$$

系统 (10) 实际是一个离散的切换系统, 其子系统

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} -0.7 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u;$$

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} -0.9 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u;$$

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} -0.9 & 0 \\ 0 & -0.8 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u;$$

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} -0.7 & 0 \\ 0 & -0.8 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u.$$

其切换规则依赖于系统的状态所在的象限, 即平面上的 4 个象限.

综上, 可以知道本文的主要结果实际上也给出了切换系统的生存条件. 如果例子中的函数取为非线性的, 则可以讨论更复杂的切换系统的生存性.

5 结 论

本文研究了一类非线性不确定系统的生存性问题. 当研究区域为凸紧集时, 给出了判断生存性的充要条件, 此条件具有非常明显的数学意义, 即用支撑函数表示, 便于具体的计算. 进一步, 当研究区域为多面体时, 只要通过判断此多面体上的有限个点便可判断整个区域的生存性, 从而避免了判断不可数多个点的情况. 最后, 给出的例子表明了生存性判别方法的可行性, 同时表明本文的结果实际上给出了切换规则依赖状态的切换系统的生存条件.

参考文献(References)

- [1] 陈征, 高岩. 人口控制的混杂模型与应用[J]. 系统管理学报, 2009, 18(1): 107-110.
(Chen Z, Gao Y. Hybrid model of population control and its

application[J]. J of Systems & Management, 2009, 18(1): 107-110.)

- [2] 陈征, 高岩. 两种群捕食-被食系统收获模型及控制[J]. 生物数学学报, 2009, 24(3): 419-426.

(Chen Z, Gao Y. Two species predator-prey system harvest model and control[J]. J of Biomathematics, 2009, 24(3): 419-426.)

- [3] Sergio B, Jaqueline P, Francesco P, et al. An introduction to the viable systems approach and its contribution to marketing[J]. J of Business Market Management, 2012, 5(2): 54-78.

- [4] Gao Y, Lygeros J, Quincampoix M, et al. On the Control uncertain impluse system: Approximate stabilization and controlled invariance[J]. Int J of Control, 2004, 77(16): 1393-1407.

- [5] Aubin J P. Viability theory[M]. Boston: Birkhauser, 1991.

- [6] 张霞, 高岩, 夏尊铨. 线性控制系统的无界多面体不变集[J]. 控制理论与应用, 2011, 28(6): 875-880.

(Zhang X, Gao Y, Xia Z Q. Unbounded polyhedral invariant sets for linear control systems[J]. Control Theory & Applications, 2011, 28(6): 875-880.)

- [7] 高岩. 一类非线性控制系统关于非光滑区域生存性的判别[J]. 控制与决策, 2006, 21(8): 923-925.

(Gao Y. Determining the viability for a class of nonlinear control systems on a region with nonsmooth boundary[J]. Control and Decision, 2006, 21(8): 923-925.)

- [8] Gao Y. Viability criteria for differential inclusions[J]. J of Systems Science and Complexity, 2011, 12(2): 825-834.

- [9] Blanchini F. Set invariance in control[J]. Automatica, 1999, 35(11): 1747-1767.

- [10] 蒋卫华, 黄琳, 楚天广. 离散非线性时变凸多面体系统族的鲁棒正不变集[J]. 自动化学报, 2001, 27(5): 631-636.

(Jiang W H, Huang L, Chu T G. Robust positively invariant sets of discrete-time nonlinear and time-variable convex polyhedral system family[J]. Acta Automatica Sinica, 2001, 27(5): 631-636.)

- [11] 高岩. 非光滑优化[M]. 北京: 科学出版社, 2008.

(Gao Y. Nonsmooth optimization[M]. Beijing: Science Press, 2008.)

- [12] Clarke F H, Leda Yu S, Stem R J, et al. Nonsmooth analysis and control theory[M]. New York: Springer-Verlag, 1998.

- [13] 魏龄龄, 闫洪. 广义最优化理论和模型[M]. 北京: 科学出版社, 2006.

(Wei Q L, Yan H. The generalized optimization theory and model[M]. Beijing: Science Press, 2006.)

(责任编辑: 孙艺红)