

基于反双曲正弦函数的跟踪微分器

周涛

(洛阳师范学院 物理与电子信息学院, 河南 洛阳 471022)

摘要: 反双曲正弦函数是光滑连续函数, 具有快速并消除速度高频震颤的作用. 利用反双曲正弦函数构造加速度函数, 设计二阶跟踪微分器, 证明了跟踪微分器的收敛性, 并分析了跟踪微分器频域特性. 仿真实验表明, 该跟踪微分器能对输入信号进行低通滤波, 且跟踪精度高, 响应速度快; 同时, 它较好地抑制了微分信号的噪声放大效应, 可以得到输入函数理想的微分信号.

关键词: 反双曲正弦函数; 跟踪微分器; 频域特性; 跟踪精度

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Tracking differentiator based on inverse hyperbolic sine function

ZHOU Tao

(School of Physics and Electronics Information, Luoyang Normal University, Luoyang 471022, China. E-mail: zhoutao041@163.com)

Abstract: The inverse hyperbolic sine function is a smooth and continuous function, which is swift and can eliminate velocity high frequency oscillations. An acceleration function is constructed by using the inverse hyperbolic sine function, so as to design a second-order tracking differentiator. The convergence of the tracking differentiator is proved, and the magnitude-frequency characteristic and phase-frequency characteristic are analyzed. Finally, the simulation experiments demonstrate the tracking differentiator can perform lowpass filtering of input signals, and it has the higher tracking precision and the swifter response velocity. Moreover, the tracking differentiator can inhibit the noise amplification effect and output ideal differential signals of the input function.

Key words: inverse hyperbolic sine function; tracking differentiator; frequency-domain characteristic; tracking precision

0 引言

在控制系统的工程应用中, 微分信号的获取一直是一个技术难点, 微分信号通常利用微分环节 $s/(Ts+1)$ 近似提取. 微分时间常数 T 越小, 微分信号的逼近精度越高, 同时噪声放大效应也越显著, 这样, 微分信号可能完全被噪声所污染^[1]. 伺服系统输出信号一般都包含大量高频噪声成分, 微分作用的高频噪声放大效应, 使得误差的微分信号难以利用, 因此, 需要以更好的方式得到微分信号. 跟踪微分器(TD)能够提供输入信号的理想微分信号, 可以用于各种控制器中微分项的获取. 跟踪微分器最早是由韩京清等^[1-2]提出的. TD利用动态过程尽可能快地跟踪输入信号的动态特性, 并通过求解微分方程来获取输入函数近似的微分信号. 目前, 有关跟踪微分器的研究文献并不多见. 文献[1]提出利用最速控制综合函数构造二

阶离散系统的跟踪微分器, 离散化的最速控制综合函数是一个非线性、非光滑和非连续函数, 其跟踪和微分效果较理想, 但是参数调整较繁琐, 理论证明困难^[3]. 文献[4]提出了一种混合微分器, 可以保证迅速的收敛和高精度的跟踪, 反馈函数也是一种非光滑函数. 文献[5-6]提出了一种反正切形式的跟踪微分器, 反正切是一种平滑连续函数. 另外, 还有其他形式的TD^[7]. TD能获得精确的微分信号, 可用于电机控制系统、导航制导、飞行目标跟踪、过程控制系统等^[5].

本文提出利用反双曲正弦函数构造二阶跟踪微分器. 首先分析反双曲正弦函数的一些特点; 然后进行跟踪微分器的设计和收敛性证明, 并分析了跟踪微分器对数幅频和相频特性; 最后, 对TD分别进行了单位阶跃响应和带噪声的正弦信号响应仿真实验, 表明了TD的有效性.

收稿日期: 2013-03-05; 修回日期: 2013-07-25.

基金项目: 国家863计划项目(2009AA7043001); 国家自然科学基金项目(61273161).

作者简介: 周涛(1970-), 男, 副教授, 博士, 从事高精度伺服系统、非线性控制等研究.

1 反双曲正弦函数的特点

反双曲正弦函数的表达式为

$$\operatorname{arsh}x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad (1)$$

它为奇函数. 反双曲正弦函数的一阶导数为

$$(\operatorname{arsh}x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}. \quad (2)$$

由于 $\lim_{x \rightarrow \infty} (\operatorname{arsh}x)' = 0$, 表明 $|x|$ 很大时, 函数值接近于饱和; 并且 $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{arsh}x)' = 1$, 表明 $|x|$ 很小时, 函数值变化率接近于 1.

由泰勒中值定理, 可求出反双曲正弦函数在 $x_0 = 0$ 处的泰勒展开式, 即

$$\begin{aligned} \operatorname{arsh}x = & \\ \operatorname{arsh}x_0 + (\operatorname{arsh}x)'|_{x=x_0}(x - x_0) + & \\ \frac{(\operatorname{arsh}x)''|_{x=x_0}}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + R_n(x) = & \\ x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{9}{5!}x^5 + \cdots. & \end{aligned} \quad (3)$$

由式 (3) 可知, 在 $x = 0$ 的邻域内, 即 $|x|$ 很小时, $\operatorname{arsh}x \approx x$, 反双曲正弦函数近似为线性函数. 此时, 在函数 $a_1 \operatorname{arsh}(b_1 x)$ 中, 参数 a_1 和 b_1 可调节 $\operatorname{arsh}x$ 的函数值和变化率.

另外, 由反双曲正弦函数的图形可分析出与上述一致的结论. 由于反双曲正弦函数光滑连续, 用于二阶系统的状态反馈, 可避免滑模变结构控制的高频震颤现象, 系统响应快速而平稳, 稳态误差小.

反双曲正弦函数的上述特点使得 TD 具有较好的动态性能和理想的微分效果.

2 跟踪微分器的设计和证明

利用反双曲正弦函数构造二阶系统的加速度函数, 有如下结论^[5,8]. 考虑系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = R^2 \{-a_1 \operatorname{arsh}[b_1(x_1(t) - r(t))] - \\ \quad a_2 \operatorname{arsh}[b_2 x_2(t)/R]\}. \end{cases} \quad (4)$$

其中: $r(t)$ 为输入信号; $x_1(t)$, $x_2(t)$ 分别为二阶系统的状态变量; 参数 $R > 0$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $b_1 > 0$, $b_2 > 0$. 于是, 对于任意有界可积函数 $r(t)$, 系统 (4) 的解 $x_1(t)$ 满足

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^T |x_1(t) - r(t)| dt = 0, \quad (5)$$

其中 $T > 0$.

系统 (4) 即为所设计的利用反双曲正弦函数的跟踪微分器.

结论 (5) 的证明将用到如下定理^[1,5,8].

定理 1 设二阶系统

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) = z_2(t), \\ \dot{z}_2(t) = g[z_1(t), z_2(t)] \end{cases} \quad (6)$$

的所有解在原点 $(0, 0)$ 处渐近稳定, 即满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z_1(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} z_2(t) = 0, \quad (7)$$

则对于任意有界可积函数 $r(t)$, 及任意 $T > 0$, $R > 0$, 微分方程

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = R^2 g[(x_1(t) - r(t)), x_2(t)/R] \end{cases} \quad (8)$$

的解 $x_1(t)$ 满足

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^T |x_1(t) - r(t)| dt = 0. \quad (9)$$

令

$$g[z_1(t), z_2(t)] = -a_1 \operatorname{arsh}[b_1 z_1(t)] - a_2 \operatorname{arsh}[b_2 z_2(t)], \quad (10)$$

则只需证明系统

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) = z_2(t), \\ \dot{z}_2(t) = -a_1 \operatorname{arsh}[b_1 z_1(t)] - a_2 \operatorname{arsh}[b_2 z_2(t)] \end{cases} \quad (11)$$

在原点 $(0, 0)$ 处渐近稳定. 其中: 参数 $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $b_1 > 0$, $b_2 > 0$.

证明^[5,8] 取李雅普诺夫函数

$$V(z_1, z_2) = \int_0^{z_1} a_1 \operatorname{arsh}(b_1 \theta) d\theta + \frac{1}{2} z_2^2. \quad (12)$$

由于 $a_1 > 0$, $b_1 > 0$, 且当 $z_1 > 0$ 时, $a_1 \operatorname{arsh}(b_1 z_1) > 0$; 当 $z_1 < 0$ 时, $a_1 \operatorname{arsh}(b_1 z_1) < 0$. 由积分中值定理, 可得

$$\int_0^{z_1} a_1 \operatorname{arsh}(b_1 \theta) d\theta = a_1 \operatorname{arsh}(b_1 \xi) \cdot z_1, \quad (13)$$

其中 $0 < \xi < z_1$, 则

$$\int_0^{z_1} a_1 \operatorname{arsh}(b_1 \theta) d\theta > 0. \quad (14)$$

又因为当 $z_2 \neq 0$ 时, $\frac{1}{2} z_2^2 > 0$, 所以

$$V(z_1, z_2) > 0, \quad (15)$$

并且

$$\begin{aligned} \dot{V}(z_1, z_2) = & \dot{z}_1 a_1 \operatorname{arsh}(b_1 z_1) + z_2 \dot{z}_2 = \\ & z_2 a_1 \operatorname{arsh}(b_1 z_1) + z_2 [-a_1 \operatorname{arsh}(b_1 z_1) - a_2 \operatorname{arsh}(b_2 z_2)] = \\ & -z_2 a_2 \operatorname{arsh}(b_2 z_2). \end{aligned} \quad (16)$$

同理, 由于 $a_2 > 0$, $b_2 > 0$, 有 $z_2 a_2 \operatorname{arsh}(b_2 z_2) \geq 0$, 则

$$\dot{V}(z_1, z_2) \leq 0. \quad (17)$$

式 (17) 中, 在原点 $(0, 0)$ 附近, 仅当 $z_2 = 0$ 时, $\dot{V}(z_1, z_2) = 0$. 因此, 由李雅普诺夫第二定理可知, 系统 (11) 在原点 $(0, 0)$ 处渐近稳定, 从而式 (7) 成立. \square

定理 1 说明, 当 R 足够大时, 系统 (4) 的解 $x_1(t)$ 在任意有限时间 T 内都能充分逼近输入信号 $r(t)$, 从而 $x_1(t)$ 的微分 $\dot{x}_1(t) = x_2(t) = \dot{r}(t)$ 即为输入信号的近似微分信号.

3 跟踪微分器频域特性

采用扫频测试方法, 利用正弦输入信号测量跟

踪微分器输出正弦信号响应的幅值和相位角, 得到其近似的Bode图以分析其频域特性. 对TD输入正弦信号 $r(t) = A \cdot \sin(\omega t)$, 假设其稳态输出为 $y = x_1(t) = B \cdot \sin(\omega t + \varphi)$. 首先, 在一定的频率 ω 范围内进行扫频测试, 并根据最小二乘原理进行估计; 然后, 计算出某一频率对应输出信号的幅值 B 和相角 φ ; 最后, 求解系统的幅频和相频特性^[4].

TD的对数幅频特性和对数相频特性如图1所示.

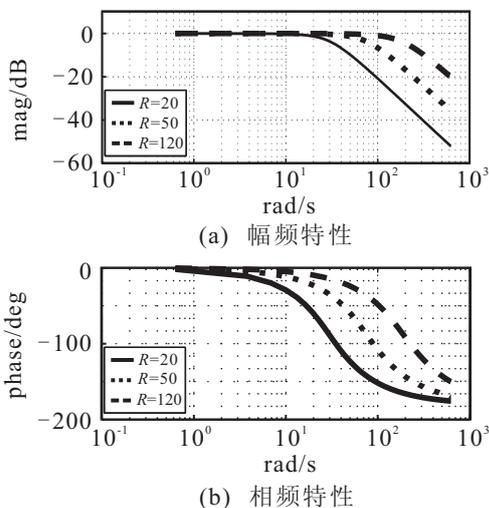


图1 跟踪微分器的幅频和相频特性

图1表明, 该TD对数幅频特性近似是由两条直线组成的折线, 折线交点处为转折频率 ω_0 , 它类似于理想二阶低通滤波器的幅频特性, 因此, TD可以滤除高频噪声. 随着 R 值的增大, 转折频率 ω_0 也增大, TD能跟踪的信号的频率越高.

当小于转折频率 ω_0 时, 对数相频特性的相角差接近于零, 说明TD的相位滞后很小, 动态性能较好. 在转折频率 ω_0 附近处, 相位差迅速增大. 随着 R 值的增大, 相频特性近似向右平移.

跟踪微分器的微分效果可以利用阶跃响应来进行验证. 在许多情况下, 某些TD进入稳态之后, 速度输出很难精确地保持为零. 当输入信号为单位阶跃信号时, 如果一个TD能在有限时间内进入稳态, 并且稳态跟踪误差足够小, 同时, 其微分信号输出快速到达零值并保持不变, 即不出现速度的高频震颤现象, 则该TD就具有理想的微分性能^[1].

4 仿真实验

4.1 单位阶跃信号跟踪响应

令输入信号为单位阶跃函数, 下面进行TD的仿真实验. 在仿真实验中, 利用反双曲正弦的TD中的参数 $R = 20, a_1 = 4, b_1 = 1.5, a_2 = 4, b_2 = 1.5$, 输入信号 $r(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0.1 \text{ s} \\ 0, & t < 0.1 \text{ s} \end{cases}$, 则上述跟踪微分器的阶跃响应曲线, 即跟踪输出 $x_1(t)$ 曲线如图2所示. 它表

明TD的阶跃响应能够快速无超调地进入稳定状态, 并准确跟踪阶跃信号 $r(t)$.

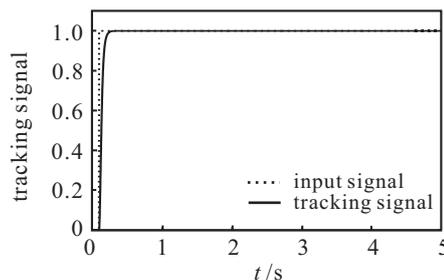


图2 TD的阶跃响应

时间 t 在区间 $[3 \text{ s}, 5 \text{ s}]$ 内放大的微分信号曲线 $x_2(t)$ 如图3所示. 它表明当 $x_1(t)$ 处于稳态时, 该TD的速度信号曲线没有出现高频震颤现象. 因此, 它能够消除输出微分信号中的超调和震颤现象, 从而较好地抑制微分信号中的噪声放大效应.

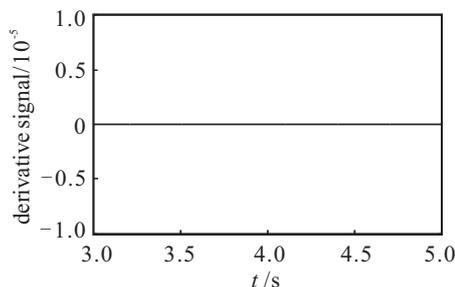


图3 TD阶跃响应的微分信号

上述仿真结果表明该TD的跟踪精度和微分效果都是很理想的. 由于反双曲正弦函数具有快速并消除速度震颤的功能, 将其用于非线性反馈控制律是较为理想的.

4.2 带噪声的正弦信号跟踪响应

为了验证TD的滤波性能, 假设输入信号为 $r(t) = \sin t + n(t)$, 其中 $n(t)$ 为带限白噪声信号. 该正弦输入信号如图4所示. 设置TD的参数为: $R = 15, a_1 = 2, b_1 = 1, a_2 = 2, b_2 = 1$, 则TD的正弦信号跟踪响应如图5所示, 跟踪响应的微分信号如图6所示.

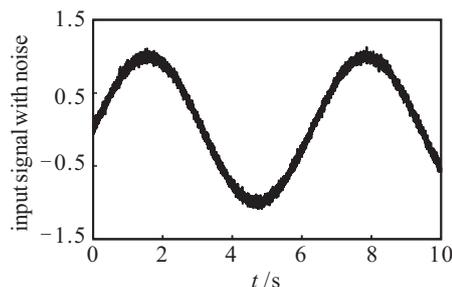


图4 正弦输入信号

图5表明, 跟踪微分器正弦信号的响应滤波效果较好, 跟踪精度高. 图6表明, 跟踪微分器的微分逼近精度较高, 并有效抑制了微分信号的噪声放大效应.

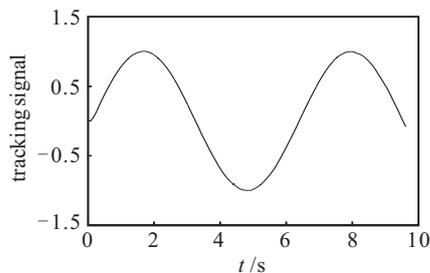


图 5 正弦信号跟踪响应

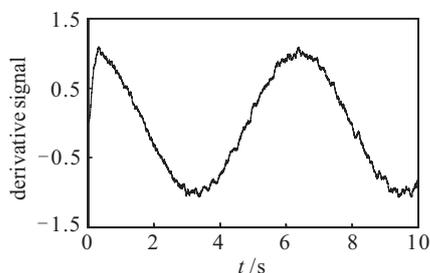


图 6 正弦响应的微分信号

5 结 论

本文提出了一种利用反双曲正弦函数构造的跟踪微分器。反双曲正弦函数是一种光滑连续函数,当自变量很小时,近似为线性函数;当自变量很大时,函数值接近饱和,从而使系统响应平稳。仿真实验表明:1) 该跟踪微分器能对输入信号进行低通滤波,并且跟踪精度高,响应速度快;2) 它具有较高的微分逼近精度,有效抑制了微分信号的噪声放大效应;3) 反双曲正弦函数具有快速并消除速度震颤的作用;4) 跟踪微分器结构简单,实时性好,参数调整方便。本文工作对于控制系统的设计具有重要的参考意义和应用价值。

参考文献(References)

- [1] 韩京清. 自抗扰控制技术——估计补偿不确定因素的控制技术[M]. 北京: 国防工业出版社, 2008: 46-66.
(Han J Q. Active disturbance rejection control technique—The technique for estimating and compensating the uncertainties[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2008: 46-66.)
- [2] 韩京清, 袁露林. 跟踪-微分器的离散形式[J]. 系统科学与数学, 1999, 19(3): 268-273.

(Han J Q, Yuan L L. The discrete tracking differentiator[J]. System Science and Mathematics, 1999, 19(3): 268-273.)

- [3] 孙彪, 孙秀霞. 离散系统最速控制综合函数[J]. 控制与决策, 2010, 25(3): 473-477.
(Sun B, Sun X X. Optimal control synthesis function of discrete-time system[J]. Control and Decision, 2010, 25(3): 473-477.)
- [4] 王新华, 刘金琨. 微分器设计与应用——信号滤波与求导[M]. 北京: 电子工业出版社, 2010: 82-88.
(Wang X H, Liu J K. Differentiator design and application—signal filtering and differentiation[M]. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2010: 82-88.)
- [5] 董小萌, 张平. 反正切形式跟踪微分器设计及相平面分析[J]. 控制理论与应用, 2010, 27(4): 533-537.
(Dong X M, Zhang P. Design and phase plane analysis of an arctangent-based tracking differentiator[J]. Control Theory & Applications, 2010, 27(4): 533-537.)
- [6] 张平, 董小萌, 付奎生, 等. 机载/弹载视觉导引稳定平台的建模与控制[M]. 北京: 国防工业出版社, 2011: 162-165.
(Zhang P, Dong X M, Fu K S, et al. Modeling and control of airborne/missile-borne vision-guidance stabilized platform[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2011: 162-165.)
- [7] 史永丽, 侯朝楨. 改进的非线性跟踪微分器设计[J]. 控制与决策, 2008, 23(6): 647-650.
(Shi Y L, Hou C Z. Design of improved nonlinear tracking differentiator[J]. Control and Decision, 2008, 23(6): 647-650.)
- [8] 向真. 自抗扰控制及其在一类热工控制系统中的应用研究[D]. 北京: 华北电力大学控制与计算机工程学院, 2011: 23-25.
(Xiang Z. Active disturbance rejection control and its application in a kind of thermal control system[D]. Beijing: School of Control & Computer Engineering, North China Electric Power University, 2011: 23-25.)

(责任编辑: 李君玲)