第 29 卷 第 9 期
Vol. 29 No. 9

控 制 与 决 策
Control and Decision

2014 年 9 月
Sep. 2014

文章编号: 1001-0920 (2014) 09-1715-04 DOI: 10.13195/j.kzyjc.2013.0360

一种基于案例的多准则排序方法

熊文涛, 余胜平

(湖北工程学院 数学与统计学院，湖北 孝感 432000)

摘 要: 针对带有间接偏好信息的多准则决策问题, 首先利用加性效用函数理论提出一种排序方法, 该方法通过构建一个简单的优化模型, 得到与间接偏好信息相容的各评价值的效用; 然后, 利用线性插值方法计算出剩下方案各评价值的效用, 进而得到所有方案的综合效用及排序; 最后, 通过实例验证了该方法的有效性和可行性.

关键词: 多准则决策；加性效用函数；熵；偏好模型

中图分类号: C934 **文献标志码:** A

A case-based method for multi-criteria decision making problems

XIONG Wen-tao, *YU Sheng-ping*

(School of Mathematics and Statistic，Hubei Engineering University，Xiaogan 432000，China．Correspondent：XIONG Wen-tao，E-mail：xiong_2009@foxmail.com)

Abstract: For the multi-criteria decision making problems with indirect preference information, a method for ranking is proposed by using the additive utility function theory. In this approach, a simple optimization model is constructed, and the utility of evaluation values are obtained, which are compatible with indirect preference information. The utility of remaining evaluation values are calculated by using linear interpolation idea. Furthermore, the overall utility and ranking of all alternatives are obtained. Finally, an example is given to illustrate the effectiveness and feasibility of the proposed method.

Key words: multi-criteria decision making；additive value functions；entropy；preference model

0 引 言

多准则决策是决策科学中的一个重要研究课题, 其目的是从有限个方案中选择最优方案, 或对方案进行排序、分类[1]. 针对决策人提供的不同偏好信息, 文献中提出了大量的排序方法和分类方法[2]. 一般来说, 这些偏好信息可分为直接偏好信息和间接偏好信息. 直接偏好信息包括决策人直接给出准则的权重、区分阈值和期望水平等, 需要决策人较强的认知能力; 间接偏好信息是指从反映决策人整体偏好的例子中推导出关于模型参数的信息[3], 本文称之为案例信息. 这类信息可充分利用决策人以往的经验, 引起了学者们的广泛关注. 文献 [4] 提出了一种利用基准的多准则排序方法, 在考察一些基准之间的关系后, 结合决策人偏好信息和方案到基准的距离得到了方案的排序; 文献 [5-6] 针对信息不完全的多准则决策问题, 提出了几种分类方法; 然而, 这些方法很少考虑到决策结果的稳健性, 即: 任意形式的加性效用函数能否与所有的偏好信息相容, 计算的结果是否唯一地表示决策的偏好或效用. 针对选择的效用函数的稳健性, 文献 [7] 对 UTA 方法进行了扩展, 定义了必然弱偏好关系和可能弱偏好关系, 提出了一种 $\mathrm{UTA}^{\mathrm{GMS}}$ 方法. 在这种方法里, 效用函数不是唯一确定的, 也不一定是分段线性函数; 文献 [8] 则基于偏好单调性的假设, 使用线性规划模型构造非单调效用函数, 从一组基于参考方案的决策例子中推断决策模型; 最近, 文献 [9] 针对带有不精确评价值的多准则决策问题, 扩展了稳健序数回归方法, 重新给出了必然和可能偏好关系的概念, 使之不仅能处理与所有相容的参数集, 而且也能处理方案的不精确评价值.

利用案例导出偏好模型参数的方法虽然需要较弱的认知能力, 但是当偏好参数不唯一确定时, 会产生大量的计算结果[10]. 考虑到熵可以描述系统状态的不确定性, 且熵值越大, 系统越混乱, 本文将不同评价值的效用差看作是系统状态的发生概率, 利用熵值来

收稿日期: 2013-03-29；**修回日期:** 2013-08-28.

基金项目: 教育部重点项目 (212109)；湖北省教育厅科学研究计划项目 (Q20132706).

作者简介: 熊文涛 (1978−), 男, 讲师, 博士, 从事决策分析、最优化理论与方法等研究；余胜平(1980−), 女, 硕士, 从事生态数学的研究.

刻画其不确定性. 根据熵的计算公式构造目标函数, 并将决策人提供的偏好信息转化成约束条件, 得到一个优化模型. 该模型的结果避免了大部分同指标下不同评价值的效用值相同的情形. 对于剩下方案的评价值, 则利用线性插值方法计算出其效用, 根据加性公式得到所有方案的综合效用和排序.

1 UTA方法的基本原理

传统的UTA方法[11]是多元分析中的一种序数回归方法, 它利用效用函数理论, 通过线性规划模型导出与间接偏好信息相容的偏好模型. 对于某个多准则决策问题, 其准则集为 $C=\{c_1,c_2,\cdots,c_m\}$(为了方便, 本文中的准则和指标不加区分), 方案集 A 是由 n 个不同方案 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 组成的集合, 方案 a_i 在指标 c_j 下的评价值记为 x_{ij}, 决策人根据以往的经验, 能提供部分方案 $a_{k_1},a_{k_2},\cdots,a_{k_l}\in A^E\subseteq A$ 的排序, 这些方案称为案例. 对于每个方案 a, 假设其在指标 c_j 下的评价值为 x_j, 采用的加性效用函数为 $U(a)=\sum\limits_{j=1}^{m}u_j(c_j(x_j))$, 其中 u_j 为非降的边际效用函数, 简记为

$$U(a)=\sum_{j=1}^{m}u_j(x_j). \tag{1}$$

在UTA方法中, 假设边际效用函数是分段线性的, 对于每个指标 c_j, 若其最优值为 x_j^*, 最劣值为 x_{j*}, 则可定义每个准则的取值区间为 $[x_{j*},x_j^*]$, 该区间可等分为 $r_j\geqslant 1$ 个相等的子区间 $[x_j^0,x_j^1],[x_j^1,x_j^2],\cdots,[x_j^{r_j-1},x_j^{r_j}]$. 其中: $x_j^k=x_{j*}+\dfrac{k}{r_j}(x_j^*-x_{j*})$, $k=0,1,\cdots,r_j$. 对于任意的方案 $a\in A$ 在每个指标 c_j (其评价值为 x_j) 的边际效用值可通过如下的线性插值得到:

$$u_j(x_j)=u_j(x_j^k)+\frac{x_j-x_j^k}{x_j^{k+1}-x_j^k}(u_j(x_j^{k+1})-u_j(x_j^k)),\quad x_j\in[x_j^k,x_j^{k+1}]. \tag{2}$$

显然, 分段线性模型可通过分段点的效用值完全确定, 即当 $u_j(x_j^0)=u_j(x_{j*})$, $u_j(x_j^1)$, $u_j(x_j^2)$, $\cdots$, $u_j(x_j^{r_j})=u_j(x_j^*)$ 时, 每个评价值的效用便可完全确定. 为了计算出这些分段点的效用值, 可以充分利用决策人提供的间接偏好信息. 根据效用理论, 对于 A^E 中的已知偏好关系, 应该满足以下约束条件:

$$\begin{aligned}&a\succ b,\forall a,b\in A^E\Leftrightarrow U(a)>U(b),\\&a\sim b,\forall a,b\in A^E\Leftrightarrow U(a)=U(b).\end{aligned} \tag{3}$$

另外, 不同评价值的效用函数应该是单调非降的, 即

$$\begin{aligned}&u_j(x_j^{k+1})-u_j(x_j^k)\geqslant 0,\\&k=0,1,\cdots,r_j,\ j=1,2,\cdots,m.\end{aligned} \tag{4}$$

由于对每个指标 c_j, 其最劣值为 x_{j*}, 最优值为 x_j^*, 为了简便, 不妨设

$$u_j(x_{j*})=0,\ j=1,2,\cdots,m,\ \sum_{j=1}^{m}u_j(x_j^*)=1. \tag{5}$$

这里称满足式(3)～(5)的加性效用函数 $U(a)=\sum\limits_{j=1}^{m}u_j(x_j)$ 与决策人提供的间接偏好信息是相容的.

显然, 当决策人提供一定的间接偏好信息时, 人们希望与这些信息尽量相容, 于是, 可以构造以下线性规划模型 1.

模型 1

$$\max\ \mathrm{Err}=\sum_{a\in A^E}(\sigma^-(a)+\sigma^+(a)).$$

$$\begin{aligned}\text{s.t. }&U(a)+\sigma^-(a)-\sigma^+(a)\geqslant\\&U(b)+\sigma^-(b)-\sigma^+(b)+\varepsilon\Leftrightarrow\\&a\succ b,\ \forall a,\ b\in A^E;\\&U(a)+\sigma^-(a)-\sigma^+(a)=\\&U(b)+\sigma^-(b)-\sigma^+(b)\Leftrightarrow\\&a\sim b,\ \forall a,b\in A^E;\\&u_j(x_j^{k+1})-u_j(x_j^k)\geqslant 0,\ u_j(x_{j*})=0,\\&k=0,1,\cdots,r_j,\ j=1,2,\cdots,m;\\&\sum_{j=1}^{m}u_j(x_j^*)=1;\\&\sigma^+(a)\geqslant 0,\ \sigma^-(a)\geqslant 0,\ \forall a\in A^E.\end{aligned}$$

其中: $u_j(x_j^k)$ 为待求的未知变量, 共有 $\sum\limits_{j=1}^{m}r_j$ 个; $\sigma^-(a)$, $\sigma^+(a)$ 为引入的偏差变量; ε 为已知的较小正数, 用来保证当 $a\succ b$, $\forall a,\ b\in A^E$ 时, 不等式 $U(a)+\sigma^-(a)-\sigma^+(a)>U(b)+\sigma^-(b)-\sigma^+(b)$ 严格成立.

当最优值 $\mathrm{Err}^*=0$ 时, 至少可以找到一个效用函数, 使之与决策人提供的偏好信息完全相容, 并且用其估计的排序结果与决策人预先设定的完全一致, 误差为零. 通常, 由于存在多组最优解, 这样的效用函数有很多, 很难判断得到的效用函数是否具有较好的性质; 另外, 当最优值 $\mathrm{Err}^*>0$ 时, 意味着不存在一个能够完全表达决策人偏好的效用函数. 但经验表明, 在非最优解或近似最优解处 ($\mathrm{Err}>\mathrm{Err}^*$), 可能存在比最优解更好表达决策人偏好的效用函数. 因此, 需要进行再优化分析以检验最优解的稳定性, 即: 通过求解 m 个线性规划, 采用其最优解的平均值作为最终的效用函数.

2 基于案例的稳健排序方法

文献 [7] 认为每个效用型准则下的边际效用函数不一定是分段线性的, 只需要是单调非降的, 对此提出了方案两两比较的可能偏好关系和必然偏好关系. 将模型 1 中的 ε 看作是一个未知数, 可得到下面的线性规划模型 2.

模型 2

$$\begin{aligned}
&\max\ \ \varepsilon.\\
&\text{s.t. } U(c) \geqslant U(d)+\varepsilon;\\
&\quad U(a) \geqslant U(b)+\varepsilon \Leftrightarrow a \succ b,\ \forall a,\ b \in A^E;\\
&\quad U(a) = U(b) \Leftrightarrow a \sim b,\ \forall a,\ b \in A^E;\\
&\quad u_j(x_j^k) - u_j(x_j^{k-1}) \geqslant 0,\ u_j(x_{j*}) = 0,\\
&\quad k = 1,2,\cdots,l_j(A^E \bigcup \{c,d\}),\ j=1,2,\cdots,m;\\
&\quad \sum_{j=1}^m u_j(x_j^*) = 1.
\end{aligned}$$

其中: $u_j(x_{j*}) = u_j(x_j^0)$, $u_j(x_j^*) = u_j(x_j^{l_j})$, x_j^k 为准则 c_j 下出现的评价值, $l_j(A)$ 表示方案集 A 中所有方案在准则 c_j 下出现的不同评价值个数, x_j^k 不一定为等分节点, $k = 1,2,\cdots,l_j$, $j = 1,2,\cdots,m$.

模型 2 的最优值记为 $\varepsilon(c,d)$. 文献 [7] 指出, 当且仅当 $\varepsilon(d,c) \leqslant 0$ 时, c 和 d 具有必然偏好关系; 当且仅当 $\varepsilon(c,d) > 0$ 时, c 和 d 具有可能偏好关系. 然而, 根据线性规划的性质, 线性规划的最优解在可行域形成的多面体顶点处取得. 这样, 当案例中方案较少, 即决策人提供的偏好信息较少时, 在最优解处, 许多不等式约束将会变成有效的等式约束 $u_j(x_j^{k+1}) = u_j(x_j^k)$, 即同一指标下很多不同评价值的效用相同, 这与实际情况一般不符, 决策人关于不同评价值的效用一般不同. 在与间接偏好信息相容的前提下, 这里希望不同评价值的效用尽量不同. 也就是说, 在最优解处, 希望有较多的不等式 $u_j(x_j^{k+1}) > u_j(x_j^k)$ 成立. 为此, 引入辅助变量 $s_j^k = u_j(x_j^{k+1}) - u_j(x_j^k)$, 则 $s_j^k > 0$; 由于 $\sum_{j=1}^m u_j(x_j^*) = 1$, 容易验证 $\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{l_j} s_j^k = 1$. 将 s_j^k 认为是系统不同状态的概率, 考虑到熵是一个描述系统信息多少的度量, 熵值越大, 系统无序、混乱的程度越大, 这里利用熵的计算公式, 可得如下目标函数:

$$\max z = -\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{r_j} s_j^k \cdot \ln s_j^k. \tag{6}$$

将模型 2 的目标函数转换成约束条件 (不妨给出下界, 即 $\varepsilon \geqslant 0.1$), 结合式 (3) ∼ (5), 可得以下模型 3.

模型 3

$$\begin{aligned}
&\max\ \ z = -\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{l_j} s_j^k \cdot \ln s_j^k.\\
&\text{s.t. } U(a) \geqslant U(b)+\varepsilon \Leftrightarrow a \succ b,\ \forall a,\ b \in A^E;\\
&\quad U(a) = U(b) \Leftrightarrow a \sim b,\ \forall a,\ b \in A^E;\\
&\quad \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{l_j} s_j^k = 1;\\
&\quad u_j(x_j^{k-1}) + s_j^{k-1} = u_j(x_j^k),\ u_j(x_{j*}) = 0;\\
&\quad 0 < s_j^k \leqslant 1,\ k=1,2,\cdots,l_j(A^E),\ j=1,2,\cdots,m;\\
&\quad \varepsilon \geqslant 0.1.
\end{aligned}$$

其中: $u_j(x_j^k)$ 和 $s_j^k (k = 1,2,\cdots,l_j,\ j = 1,2,\cdots,m)$ 为未知变量, 共有 $2\sum_{j=1}^m l_j$ 个; $\sigma^-(a)$ 和 $\sigma^+(a)$ 为引入的偏差变量; 模型 3 中的其他符号同模型 2.

计算出 $u_j(x_j^k)$ 后, 根据式 (2) 可得到剩下方案中所有评价值的效用, 再利用式 (1) 计算出所有方案的综合效用; 通过比较, 得到这些方案的排序. 与文献 [7] 相似, 本文方法是在与决策人提供的案例信息完全相容的前提下计算所有效用函数, 因此不需要进行再优化分析, 并且结果具有一定的稳健性.

3　实例说明

考察文献 [12] 中提供的例子. 某中东国家拟从美国购买一种喷气式战斗机若干架, 美国五角大楼的官员提供了准予出售的 4 种机型 (a_1,a_2,a_3,a_4) 的有关信息, 该中东国家派出的专家组对这 4 种飞机进行了详细考察. 考察的指标主要有: 最大速度 c_1, 巡航半径 c_2, 最大载荷 c_3, 价格 c_4, 可靠性 c_5 和可维修性 c_6. 其中除了 c_4 外, 其余的属性均为效益型指标. 为了简便, 这里假设评价值已经经过了规范化和解模糊化处理, 所有的指标都是效益型指标, 即评价值越大该指标越优. 4 种机型在各指标下的评价值如表 1 所示. 其最优值和最劣值分别为 $x^* = [3,3,2.5,1,10,10]$, $x_* = [1,1,1,0,1,1]$, 专家组假设这些指标的权重分别为 0.2, 0.1, 0.1, 0.1, 0.2, 0.3, 考虑到效用函数具有简单可加性, 每个指标的权重值可理解为 $\omega_j = u_j(x_j^*)$, $j = 1,2,\cdots,m$. 根据决策人以往的经验可知, 方案 a_1,a_2,a_4 具有偏好关系 $a_1 \succ a_4 \succ a_2$, 进而试着确定所有方案的排序及最佳选择机型.

表 1　喷气式战斗机主要指标及相应的评价值

指标 机型	最大速度 c_1/Mach	巡航半径 $c_2/10^3$m	最大载荷 $c_3/10^4$Pounds	价 格 $c_4/10^6$\$	可靠性 c_5	可维修性 c_6
a_1	2	1.5	2	0.475 7	5	9
a_2	2.5	2.7	1.8	0.402 5	3	5
a_3	1.8	2	2.1	0.581 4	7	7
a_4	2.2	1.8	2	0.523 2	5	5

将方案在各指标下不同指标的评价值看作是节点, 根据决策人提供间接偏好信息 $a_1 \succ a_4 \succ a_2$, 利用模型 3, 将 $u_j(x_j^*) = \omega_j (j = 1,2,\cdots,m)$ 加入到模型 3 的约束条件中, 可建立如下优化模型:

$$\begin{aligned}
&\max\ \ z = -\sum_{j=1}^6 \sum_{k=1}^{l_j} s_j^k \cdot \ln s_j^k.\\
&\text{s.t. } u_1(2)+u_2(1.5)+u_3(2)+u_4(0.475\,7)+\\
&\quad u_5(5)+u_6(9) \geqslant\\
&\quad u_1(2.2)+u_2(1.8)+u_3(2)+u_4(0.523\,2)+\\
&\quad u_5(5)+u_6(5)+\varepsilon;\\
&\quad u_1(2.2)+u_2(1.8)+u_3(2)+u_4(0.523\,2)+\\
&\quad u_5(5)+u_6(5) \geqslant
\end{aligned}$$

$$u_1(2.5)+u_2(2.7)+u_3(1.8)+u_4(0.4025)+$$
$$u_5(3)+u_6(5)+\varepsilon;$$
$$u_1(1)=u_2(1)=u_3(1)=u_4(0)=u_5(1)=u_6(1)=0;$$
$$u_1(3)=0.2, u_2(3)=0.1, u_3(2.5)=0.1, u_4(1)=0.1,$$
$$u_5(10)=0.2, u_6(10)=0.3;$$
$$\sum_{j=1}^{6}\sum_{k=1}^{l_j} s_j^k=1;\ u_j(x_j^k)+s_j^k=u_j(x_j^{k+1});$$
$$0<s_j^k\leqslant 1,\ k=0,1,\cdots,l_j,\ j=1,2,\cdots,6;$$
$$\varepsilon\geqslant 0.1.$$

其中: l_j 分别为 3, 3, 2, 3, 2, 2. 利用 Yalmip 工具箱[13]计算, 通过求解上面的优化模型, 可得各参考方案的综合效用为: $U(a_1)=0.5923$, $U(a_2)=0.3923$, $U(a_4)=0.4923$; 各节点的效用值如表 2 所示.

表 2 案例中各节点的效用值及参考方案的综合效用

各节点的效用值
$u_1(2)=0.0625, u_1(2.2)=0.0908, u_1(2.5)=0.1374$
$u_2(1.5)=0.0313, u_2(1.8)=0.0454, u_2(2.7)=0.0687$
$u_3(1.8)=0.0299, u_3(2)=0.0701$
$u_4(0.4025)=0.0253, u_4(0.4757)=0.0593, u_4(0.5232)=0.0747$
$u_5(3)=0.0598, u_5(5)=0.1402$
$u_6(5)=0.0711, u_6(9)=0.2289$

利用线性插值公式 (2) 和加性效用公式 (1), 可得到剩下方案 a_3 的综合效用为 0.5686, 进而得到排序 $a_1\succ a_3\succ a_4\succ a_2$, a_1 可作为最佳机型. 此排序结果与文献 [12] 给出方法的结果相同.

4 结 论

在许多多准则决策问题中, 决策人根据以往的经验, 常常只能提供一些间接的偏好信息. 本文根据效用函数理论, 通过一个简单的优化模型, 得到了案例中所有评价值的效用, 并且它们与决策人提供的间接偏好信息均相容; 然后, 利用线性插值计算出任意评价值的效用以及每个方案的综合效用; 最后, 通过计算得到了方案集的优劣排序. 与传统 UTA 方法不同的是: 1) 准则的最劣值最优值区间不一定被等分, 而是将参考方案的评价值作为分段点; 2) 熵的使用能尽量保证不同节点效用值的多样性; 3) 决策人提供的间接偏好信息不一定是全序, 可以是部分方案两两比较的排序; 4) 本文方法不需要进行再优化分析, 计算结果具有一定的稳健性.

参考文献(References)

[1] Zopounidis C, Doumpos M. Multicriteria classification and sorting methods: A literature review[J]. European J of Operational Research, 2002, 138(2): 229-246.

[2] 廖貅武. 不完全信息下的多属性决策理论、方法与应用研究[D]. 大连: 大连理工大学 管理学院, 2002.
(Liao X W. Study on theory, methods and applications for multiple attribute decision-making problem with incomplete information[D]. Dalian: School of management, Dalian University of Technology, 2002.)

[3] Greco S, Kadzinski M, Slowinski R. Selection of a representative value function in robust multiple criteria sorting[J]. Computers & Operations Research, 2011, 38(11): 1620-1637.

[4] Chen Y, Kilgour D M, Hipel K W. Using a benchmark in case-based multiple-criteria ranking[J]. IEEE Trans on Systems, Man and Cybernetics, Part A: Systems and Humans, 2009, 39(2): 358-368.

[5] 王坚强. 基于离差优化的信息不完全确定的多准则分类方法[J]. 控制与决策, 2006, 21(5): 513-516.
(Wang J Q. Multi-criteria classification approach with incomplete certain information based on optimizing deviation of categories[J]. Control and Decision, 2006, 21(5): 513-516.)

[6] 王坚强. 一种信息不完全确定的多准则分类决策方法[J]. 控制与决策, 2006, 21(8): 863-867.
(Wang J Q. A multi-criteria classification approach with inco-mplete certain information[J]. Control and Decision, 2006, 21(8): 863-867.)

[7] Greco S, Mousseau V, Slowinski R. Multiple criteria sorting with a set of additive value functions[J]. European J of Operational Research, 2010, 207(3): 1455-1470.

[8] Doumpos M. Learning non-monotonic additive value functions for multicriteria decision making[J]. OR Spectrum, 2012, 34(1): 89-106.

[9] Corrente S, Greco S, Slowinski R. Robust ordinal regression in case of imprecise evaluations[EB/OL]. [2012-06-27]. http://arxiv.org/abs/1206.6317.

[10] Vetschera R, Chen Y, Hipel K W, et al. Robustness and information levels in case-based multiple criteria sorting[J]. European J of Operational Research, 2010, 202(3): 841-852.

[11] Siskos Y, Grigoroudis E, Matsatsinis N. UTA methods[M]. State of the Art in Multiple Criteria Decision Analysis, Berlin: Springer, 2005: 297-334.

[12] 李荣钧. 模糊多准则决策理论与应用[M]. 北京: 科学出版社, 2002: 149-151.
(Li R J . Fuzzy mult-criteria decision-making theory and applications[M]. Beijing: Science Press, 2002: 149-151.)

[13] Lofberg J. YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB[C]. 2004 IEEE Int Symposium on Computer Aided Control Systems Design. Taipei, 2004: 284-289.

(责任编辑: 滕 蓉)