第 29 卷 第 7 期
Vol. 29 No. 7

控 制 与 决 策
Control and Decision

2014 年 7 月
Jul. 2014

文章编号: 1001-0920 (2014) 07-1285-06 **DOI:** 10.13195/j.kzyjc.2013.0450

软集参数约简的新方法

李招文[a], 高宁华[a], 张纲强[b]

(广西民族大学 a. 理学院，b. 信息科学与工程学院，南宁 530006)

摘 要: 软集理论是一种新的处理不确定性问题的数学工具. 讨论了软集与信息系统之间的关系, 介绍了由软集诱导的二元关系, 借助信息系统的属性约简来研究软集的参数约简, 得到了软集参数约简的新方法, 并通过算例验证了方法的有效性.

关键词: 软集；参数约简；二元关系；辨识矩阵；辨识函数

中图分类号: TP18 **文献标志码:** A

New methods on parameter reduction of soft sets

LI Zhao-wen[a], *GAO Ning-hua*[a], *ZHANG Gang-qiang*[b]

(a. College of Science，b. College of Information Science and Engineering，Guangxi University for Nationalities, Nanning 530006，China．Correspondent：LI Zhao-wen，E-mail：lizhaowen8846@126.com)

Abstract: The soft set theory is a new mathematical tool to deal with uncertain problems. The relationship between soft sets and information systems is discussed, the binary relation induced by a soft set is introduced, the parameter reduction of soft sets by means of the attribute reduction for information systems is researched and new method on the parameter reduction of soft sets is obtained. Moreover, an example is given to verify the effectiveness of the proposed method.

Key words: soft set；parameter reduction；binary relation；discernibility matrix；discernibility function

0 引 言

在处理管理科学、社会科学、工程技术、医学诊断等领域的不确定问题时, 采用传统的定量分析方法处理所得到的效果并不理想. 现有的一些处理不确定问题的数学理论, 包括粗糙集理论[1]、模糊集理论[2]和概率论等, 都可以弥补传统的定量分析方法的不足. 但它们表达参数不充分, 即大量的参数无法确定. 为了避免上述缺陷, Molodtsov[3]在 1999 年给出了软集的概念. 随后, 人们证明了模糊集和粗糙集都是软集的特例. 目前, 在决策、预测和测量等实际问题中, 软集理论得到了广泛的应用[3-4].

软集理论的优势在于: 它对对象最初的描述具有近似性, 不需要引入精确解的概念. 它对对象的描述也没有限制条件, 研究者可以根据需要选择参数形式, 因此该理论使用起来非常方便, 极易实践. 软集中参数设置的无约束性极大地简化了决策过程, 使得研究者在数据信息量较少的情况下仍能有效地提出决策[5]. Maji 等[6]进一步研究软集理论, 提出了软集的与、或、并、交等运算, 并将软集理论用于解决决策问题. Pei 等[7] 讨论了软集与信息系统之间的关系, 指出软集是一类特殊的信息系统. 针对软集的参数语义表达欠丰富的缺点, Jiang 等[8]结合描述逻辑, 扩充了软集的参数语义, 形成了基于描述逻辑的软集.

软集的参数约简是软集理论中一个重要问题. 软集参数约简的实际意义, 是删除那些对最优决策没有影响或影响较小的冗余参数, 得到数量较少但仍能保持最优决策的参数. Maji 等[9] 提出了软集参数约简的概念. Chen 等[10]指出文献 [9] 中的软集参数约简的概念存在不合理性, 提出用软集参数约简的办法来改进基于软集的支持决策, 并说明了软集的参数约简与粗糙集的属性约简的区别. 为了解决文献 [10] 中提出的最优选择问题, Kong 等[11]提出了软集的正规参数约简的概念. Ma 等[12]也研究了软集的正规参数约简, 改进了文献 [11] 中的方法. 但是, 软集的正规参数

收稿日期: 2013-04-16；**修回日期:** 2013-07-08.

基金项目: 国家自然科学基金项目(11061004)；广西高校科学技术研究项目(2013ZD020, 2013ZD061)；中国-东盟研究中心开放课题项目(KT201310).

作者简介: 李招文(1962−), 男, 教授, 博士, 从事不确定数学、决策理论等研究；高宁华(1987−), 女, 硕士生, 从事信息系统、决策理论的研究.

约简较为复杂, 不易理解. 值得重视的是, 邹艳等[5]提出了基于最优选择对象不变的软集的参数约简, 肖智等[13]研究了基于双射软集决策系统的参数约简.

本文进一步研究了一般软集的参数约简, 介绍了由软集诱导的二元关系, 并基于此二元关系给出了软集参数约简的概念, 借助辨识矩阵和辨识函数来研究软集的参数约简, 得到了软集参数约简的新方法. 通过使用该方法的一个算例, 表明了新方法的有效性.

1 基本知识

1.1 软 集

定义 1[3] 设 U 为初始论域, 2^U 为 U 的幂集, E 为所有可能的参数组成的参数集, $A \subseteq E$, 若 f 是 A 到 2^U 的一个映射, 则称 (f, A) 是 U 上的一个软集, 可记 (f, A) 为 f_A.

定义 2[5] 设 f_A 和 g_B 是 U 上的两个软集. 若 $A \subseteq B$, 且对于任意的 $e \in A$, $f(e) = g(e)$, 则称 f_A 为 g_B 的软子集, 记为 $f_A \widetilde{\subseteq} g_B$ 或 $g_B \widetilde{\supseteq} f_A$.

定义 3[5] 设 f_A 和 g_B 是 U 上的两个软集. 若对于每个 $e \in A$, 有 $A = B$ 和 $f(e) = g(e)$, 则称 f_A 和 g_B 是软相等的, 记为 $f_A = g_B$.

显然, $f_A = g_B$ 当且仅当 $f_A \widetilde{\subseteq} g_B$ 且 $f_A \widetilde{\supseteq} g_B$.

定义 4[5] 设 $A, B \subseteq E$, 且 f_A 和 g_B 是 U 上的两个软集.

1) 若 $C = A \bigcap B$, 且对于任意的 $e \in C$, $h(e) = f(e) \bigcap g(e)$, 则称 h_C 是 f_A 和 g_B 的交, 记为 $f_A \widetilde{\bigcap} g_B = h_C$.

2) 若 $C = A \bigcup B$, 且

$$h(e) = \begin{cases} f(e), \ e \in A - B; \\ f(e) \bigcup g(e), \ e \in A \bigcap B; \\ g(e), \ e \in B - A; \end{cases}$$

则称 h_C 是 f_A 和 g_B 的并, 记为 $f_A \widetilde{\bigcup} g_B = h_C$.

3) 若 $C = A \times B$, 且对于任意的 $a \in A$, $b \in B$, $h(a, b) = f(a) \bigcap g(b)$, 则称 h_C 是 f_A 和 g_B 的尖交, 记为 $f_A \bigwedge g_B = h_C$.

4) 若 $C = A \times B$, 且对于任意的 $a \in A$, $b \in B$, $h(a, b) = f(a) \bigcup g(b)$, 则称 h_C 是 f_A 和 g_B 的尖并, 记为 $f_A \bigvee g_B = h_C$.

1.2 软集与信息系统之间的关系

定义 5[14] 设 U 是有限的对象集, A 是属性集. 称序对 (U, A, V, g) 为一个信息系统(或知识表达系统), 如果 g 是一个从 $U \times A$ 到 $V = \bigcup\limits_{a \in A} V_a$ 的信息函数, 则称 $V_a = \{g(x, a) : x \in U\}$ 为属性 a 的值域.

若 $V = \{0, 1\}$, 则信息系统 (U, A, V, g) 称为 2 值信息系统.

定义 6 设 $S = (f, A)$ 是 U 上的一个软集, 则称 $I_S = (U, A, V, g_s)$ 是由 S 诱导的 2 值信息系统, 其中对于任意的 $x \in U$, $a \in A$, 有

$$g_s(x, a) = \begin{cases} 1, \ x \in f(a), \\ 0, \ x \notin f(a). \end{cases}$$

定义 7 设 $I = (U, A, V, g)$ 是一个 2 值信息系统, 称 $S_I = (f_I, A)$ 是由 I 诱导的 U 上的软集, 其中对于任意的 $a \in A$, 有 $f_I(a) = \{x \in U : g(x, a) = 1\}$.

引理 1 设 $S = (f, A)$ 是一个 U 上的软集, $I_S = (U, A, V, g_s)$ 是由 S 诱导的 2 值信息系统, 并且 $S_{I_S} = (f_{I_S}, A)$ 是由 I_S 诱导的 U 上的软集, 则 $S = S_{I_S}$.

证明 由定义 7, 对于任意的 $a \in A$, 有 $f_{I_S}(a) = \{x \in U : g_s(x, a) = 1\}$.

由定义 6, 对于任意的 $x \in U$, $a \in A$, 有

$$g_s(x, a) = \begin{cases} 1, \ x \in f(a); \\ 0, \ x \notin f(a). \end{cases}$$

则 $g_s(x, a) = 1 \Leftrightarrow x \in f(a)$. 从而对于任意的 $a \in A$, 有 $f(a) = f_{I_S}(a)$. 于是 $(f, A) = (f_{I_S}, A)$, 故 $S = S_{I_S}$. □

引理 2 设 $I = (U, A, V, g)$ 是一个 2 值信息系统, $S_I = (f_{I,A})$ 是由 I 诱导的 U 上的软集, 并且 $I_{S_I} = (U, A, V, g_{s_I})$ 是由 S_I 诱导的 2 值信息系统, 则 $I = I_{S_I}$.

由定义 6, 对于任意的 $x \in U$, $a \in A$, 有

$$g_{s_I}(x, a) = \begin{cases} 1, \ x \in f_I(a); \\ 0, \ x \notin f_I(a). \end{cases}$$

由定义 7, 对于任意的 $a \in A$, 有 $f_I(a) = \{x \in U : g(x, a) = 1\}$. 因为 $I = (U, A, V, g)$ 是一个 2 值信息系统, 若 $x \notin f_I(a)$, 则 $g(x, a) = 0$. 这意味着

$$g(x, a) = \begin{cases} 1, \ x \in f_I(a); \\ 0, \ x \notin f_I(a). \end{cases}$$

于是对于任意的 $x \in U$, $a \in A$, 有 $g_{s_I}(x, a) = g(x, a)$. 可得 $g_{s_I} = g$, 故 $I = I_{S_I}$.

定理 1 设 $\varSigma = \{S : S = f_A$ 是一个 U 上的软集$\}$, 并且 $\varGamma = \{I : I = (U, A, V, g)$ 是一个 2 值信息系统$\}$, 则在 $\varSigma$ 与 $\varGamma$ 之间存在一一对应.

由引理 1 和引理 2 可推得定理 1 成立, 此处证明略.

1.3 软集诱导的二元关系

定义 8 设 f_A 是 U 上的软集, 且 (U, A, V, g) 是由 U 上的软集 f_A 诱导的 2 值信息系统. 对于任意的 $B \subseteq A$, 定义

$$R_B = \{(x, y) \in U \times U : g(x, a) = g(y, a) (\forall a \in B)\}.$$

记 $R_{\{a\}} = R_a$, 显然 $R_B = \bigcap\limits_{a \in B} R_a$.

定义 9 设 f_A 是 U 上的软集, $B \subseteq A$, 并且 (U, R_B) 为一个近似空间. 基于近似空间 $P_B = (U, R_B)$,

定义一对算子 $\underline{R}_B$、$\overline{R}_B$: $2^U \to 2^U$ 如下:

$$\underline{R}_B(X) = \{x \in U : R_B(x) \subseteq X\},$$
$$\overline{R}_B(X) = \{x \in U : R_B(x) \bigcap X \neq \varnothing\}.$$

其中: $X \in 2^U$, $R_B(x) = \{y \in U : xR_By\}$.

称 $\underline{R}_B(X)$ 和 $\overline{R}_B(X)$ 分别为关于 P_B 的 X 下近似和上近似.

若 $\underline{R}_B(X) = \overline{R}_B(X)$, 则称 X 为关于 P_B 的可定义集; 否则, 称 X 为关于 P_B 的粗糙集.

定理 2 设 f_A 是 U 上的软集, $B \subseteq A$, 则有下列性质成立:

1) R_B 是 U 上的等价关系;

2) 如果 $B_1 \subseteq B_2 \subseteq A$, 则 $R_{B_1} \supseteq R_{B_2} \supseteq R_A$;

3) 对于任意的 $x \in U$, 有 $R_B(x) = \bigcap\limits_{a\in B} R_a(x)$.

定理 3 设 f_A 是 U 上的软集, 则对于任意的 $B \subseteq A$, $X, Y \in 2^U$, 下列性质成立:

1) $\underline{R}_B(\varnothing) = \overline{R}_B(\varnothing) = \varnothing$, $\underline{R}_B(U) = \overline{R}_B(U) = U$;

2) $\underline{R}_B(X) \subseteq X \subseteq \overline{R}_B(X)$;

3) $X \subseteq Y \Rightarrow \underline{R}_B(X) \subseteq \underline{R}_B(Y)$, $X \subseteq Y \Rightarrow \overline{R}_B(X) \subseteq \overline{R}_B(Y)$;

4) $\underline{R}_B(X \bigcap Y) = \underline{R}_B(X) \bigcap \underline{R}_B(Y)$, $\overline{R}_B(X \bigcup Y) = \overline{R}_B(X) \bigcup \overline{R}_B(Y)$;

5) $\underline{R}_B(X \cup Y) \supseteq \underline{R}_B(X) \bigcup \underline{R}_B(Y)$, $\overline{R}_B(X \bigcap Y) \subseteq \overline{R}_B(X) \bigcap \overline{R}_B(Y)$;

6) $\underline{R}_B(U - X) = U - \overline{R}_B(X)$, $\overline{R}_B(U - X) = U - \underline{R}_B(X)$;

7) $\overline{R}_B(\underline{R}_B(X)) \subseteq X \subseteq \underline{R}_B(\overline{R}_B(X))$.

可仿照文献 [14] 中定理 3.2 和定理 3.7 对定理 3 进行证明, 此略.

2 软集的参数约简

2.1 软集参数约简概述

软集中参数约简的主要目的是删除那些对最优决策没有影响或影响较小的参数, 以减少用于决策的参数个数. 具体做法是, 根据参数的重要性对参数进行分类, 找到获取最优决策没有影响或影响较小的参数集. 软集的参数约简在决策问题中起着重要作用, 它能节省繁琐的检验时间.

由定理 1 可知, 由所有软集组成的集与由所有 2 值信息系统组成的集之间存在一一对应关系, 因此, 信息系统的属性约简方法可移植到一般软集的参数约简中.

定义 10 设 f_A 是 U 上的软集.

1) 若当 $B \subseteq A$ 时, 有 $R_A = R_B$, 并且对于任意的 $a \in B$, $R_B \neq R_{B-\{a\}}$ 成立, 则称 B 是 f_A 的参数约简.

2) 所有参数约简的交集称为 f_A 的核, 记为 $\mathrm{core}(f_A)$.

在本文中, 记所有 f_A 的参数约简组成的集合为 $\mathrm{pr}(f_A)$. 于是有

$$\mathrm{core}(f_A) = \bigcap \mathrm{pr}(f_A).$$

定理 4 设 f_A 是 U 上的软集, 则 $\mathrm{pr}(f_A) \neq \varnothing$.

证明 1) 若对于任意的 $a \in A$, 都有 $R_A \neq R_{A-\{a\}}$ 成立, 则 $A \in \mathrm{pr}(f_A)$. 所以 $\mathrm{pr}(f_A) \neq \varnothing$.

2) 若对某个 $a \in A$, 有 $R_A = R_{A-\{a\}}$ 成立, 则考虑 $B_1 = A - \{a\}$.

若对于任意的 $b_1 \in B_1$, 都有 $R_A \neq R_{B_1-\{b_1\}}$ 成立, 则 $B_1 \in \mathrm{pr}(f_A)$, 故 $\mathrm{pr}(f_A) \neq \varnothing$; 否则, 再考虑 $B_1 - \{b_1\}$.

重复以上过程. 因 A 是有限集, 所以至少可找到 f_A 的一个约简. 因此, $\mathrm{pr}(f_A) \neq \varnothing$. □

例 1 设 f_A 是 U 上的软集, 其中 $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$, $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, $f(a_1) = \{h_1, h_2, h_5\}$, $f(a_2) = \{h_1, h_6\}$, $f(a_3) = \{h_3, h_4\}$, $f(a_4) = \{h_3, h_4, h_6\}$.

不难验证

$$\mathrm{pr}(f_A) = \{\{a_2, a_4\}, \{a_1, a_2\}\},$$
$$\mathrm{core}(f_A) = \{a_2, a_4\} \bigcap \{a_1, a_2\} = \{a_2\}.$$

定义 11 设 f_A 是 U 上的软集, $a \in A$, $\mathrm{pr}(f_A) = \{B_k : k \leqslant q\}$.

1) 若 $a \in \bigcap\limits_{k=1}^{q} B_i = \mathrm{core}(f_A)$, 则称 a 为核心的;

2) 若 $a \in \bigcup\limits_{k=1}^{q} B_i - \mathrm{core}(f_A)$, 则称 a 为相对必要的;

3) 若 $a \in A - \bigcup\limits_{k=1}^{q} B_i$, 则称 a 为绝对不必要的;

4) 若 $a \in A - \mathrm{core}(f_A)$, 则称 a 为不必要的.

显然, $a \in A$ 是不必要的当且仅当 a 是相对必要的或绝对不必要的.

例 2 在例 1 中, 有:

1) a_2 是核心参数;

2) a_1 和 a_4 是相对必要参数;

3) a_3 是绝对不必要参数;

4) a_1, a_3 和 a_4 是不必要参数.

定理 5 设 f_A 是 U 上的软集, 并且 $\mathrm{pr}(f_A) = \{B_k : k \leqslant q\}$, 则有:

1) $|\mathrm{pr}(f_A)| = 1$ 当且仅当 $\mathrm{core}(f_A) \in \mathrm{pr}(f_A)$;

2) $a \in \mathrm{core}(f_A)$ 当且仅当 $R_A \neq R_{A-\{a\}}$;

3) $a \in A$ 是不必要的, 当且仅当 $R_A = R_{A-\{a\}}$.

证明 1) 必要性是显然的. 下面证明充分性.

设 $\mathrm{core}(f_A) \in \mathrm{pr}(f_A)$. 由于 $\mathrm{pr}(f_A) = \{B_k : k \leqslant q\}$, 需要证明 $q = 1$.

① 假设 $q = 2$, B_1 和 B_2 是 f_A 的两个不同的参数约简.

a) 假设 $B_1 \subsetneq B_2$. 因 $B_2 \in \mathrm{pr}(f_A)$, 所以 $R_A \neq R_{B_1}$, 这意味着 $B_1 \notin \mathrm{pr}(f_A)$, 产生矛盾.

b) 假设 $B_2 \subsetneq B_1$, 类似地, 也可得出矛盾.

c) 假设 $B_1 \nsubseteq B_2$, $B_2 \nsubseteq B_1$. 显然, $\mathrm{core}(f_A) = B_1 \bigcap B_2$, 并且 $\mathrm{core}(f_A) \subsetneq B_1$. 由于 $B_1 \in \mathrm{pr}(f_A)$, 有 $R_A \neq R_{\mathrm{core}(f_A)}$. 这意味着 $\mathrm{core}(f_A) \notin \mathrm{pr}(f_A)$, 产生矛盾.

② 假设 $q \geqslant 3$, 类似于 1) 的证明, 也可得出矛盾. 因此, $|\mathrm{pr}(f_A)| = 1$.

2) 充分性. 假设 $R_A \neq R_{A-\{a\}}$, 对于任意的 $1 \leqslant k \leqslant q$, 都有 $a \in B_k$; 否则, 若对某个 k_0, 有 $a \notin B_{k_0}$, 意味着 $R_A = R_{B_{k_0}}$. 由定理 2 得, $R_{B_{k_0}} \supseteq R_{A-\{a\}} \supseteq R_A$, 所以 $R_A \neq R_{A-\{a\}}$, 产生矛盾. 因此 $a \in \mathrm{core}(f_A)$.

必要性. 假设 $R_A = R_{A-\{a\}}$, 因为 $\mathrm{pr}(f_A) \neq \varnothing$, 至少能找到一个 $B_1' \subseteq A - \{a\}$, 使得 $B_1' \in \mathrm{pr}(f_A)$, 所以 $a \notin \mathrm{core}(f_A)$, 产生矛盾. 因此, $R_A \neq R_{A-\{a\}}$.

3) 充分性. 设 $R_A = R_{A-\{a\}}$, 因为 $A-\{a\}$ 是有限集, 可找到 $B_2 \subseteq A - \{a\}$ 使得 $B_2 \in \mathrm{pr}(f_A)$, 所以 $a \notin \mathrm{core}(f_A)$, 于是 $a \in A - \mathrm{core}(f_A)$. 因此 a 是不必要参数.

必要性. 假设 $R_A \neq R_{A-\{a\}}$, 类似于 (2) 的证明, 有 $a \in \mathrm{core}(f_A)$, 于是 $a \notin A - \mathrm{core}(f_A)$. 因为 a 是不必要参数, 所以 $a \in A - \mathrm{core}(f_A)$, 产生矛盾. 因此, $R_A = R_{A-\{a\}}$. □

2.2 软集的辨识矩阵

定义 12 设 f_A 是 U 上的软集, $|U| = n$, 并且 (U, A, V, g) 是由软集 f_A 诱导的 2 值信息系统. 对于任意的 $x, y \in U$, 定义能区分对象 x 和 y 的参数集为

$$d(x, y) = \{a \in A : g(x, a) \neq g(y, a)\}.$$

称 $\mathfrak{D}(f_A) = (d_{ij})_{n\times n}$ 是 f_A 的辨识矩阵, 其中 $U = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, $d_{ij} = d(x_i, x_j)$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$.

引理 3 设 f_A 是 U 上的软集, 则:

1) 对于任意的 $x, y \in U$, 有 $d(x, y) = \{a \in A : x \in f(a), y \notin f(a)$ 或者 $x \notin f(a), y \in f(a)\}$;

2) 对于任意的 $x, y \in U$, 有 $d(x, y) = d(y, x)$;

3) 对于任意的 $x \in U$, 有 $d(x, x) = \varnothing$.

定理 6 设 f_A 是 U 上的软集, (U, A, V, g) 是由 U 上的软集 f_A 诱导的 2 值信息系统, $B \subseteq A$, 则对于任意的 $x, y \in U$, 有

$$R_A = R_B \Leftrightarrow B \bigcap d(x, y) \neq \varnothing.$$

证明 "$\Longrightarrow$"假设存在 $d(x_0, y_0) \neq \varnothing$, 使得 $B \bigcap d(x_0, y_0) = \varnothing$, 则对于任意的 $a \in B$, 有 $g(x_0, a) = g(y_0, a)$, 于是 $(x_0, y_0) \in R_B$. 因为 $d(x_0, y_0) \neq \varnothing$, 所以存在 $a_0 \in A$, 使得 $g(x_0, a_0) \neq g(y_0, a_0)$, 即 $(x_0, y_0) \notin R_A$. 因此 $R_A \neq R_B$, 产生矛盾.

"$\Longleftarrow$"假设 $R_A \neq R_B$, 由定理 2 得 $R_A \subseteq R_B$, 则 $R_A \nsupseteq R_B$. 这意味着 $R_B - R_A \neq \varnothing$. 取 $(x_0, y_0) \in R_B - R_A$, 则 $(x_0, y_0) \in R_B$, $(x_0, y_0) \notin R_A$. 这意味着 $A - B \supseteq d(x_0, y_0) \neq \varnothing$. 因此 $B \bigcap d(x_0, y_0) = \varnothing$, 产生矛盾. □

定理 7 设 f_A 是 U 上的软集, 则 $B \subseteq A$ 是 f_A 的参数约简当且仅当对于任意的 $x, y \in U$, 有 $B \bigcap d(x, y) \neq \varnothing$, 并且对于任意的 $a \in B$, 存在 $x_a, y_a \in U$, 使得 $(B - \{a\}) \bigcap d(x_a, y_a) = \varnothing$.

证明同定理 6, 此略.

定理 8 设 f_A 是 U 上的软集, 则

$$\mathrm{core}(f_A) = \{a \in A : d(x, y) = \{a\}(x, y \in U)\}.$$

证明 记 $D = \{a \in A : d(x, y) = \{a\}(x, y \in U)\}$, $\mathrm{pr}(f_A) = \{B_k : k \leqslant q\}$. 只需证明 $\mathrm{core}(f_A) = D$.

1) 设 $a \in D$, 存在 $x_0, y_0 \in U$ 使得 $d(x_0, y_0) = \{a\}$. 既然 B_k 是 f_A 的参数约简, 于是 $B_k \bigcap d(x_0, y_0) \neq \varnothing$. 这意味着对于任意的 $1 \leqslant k \leqslant q$, 有 $a \in B_k$, $a \in \bigcap\limits_{k=1}^{q} B_k = \mathrm{core}(f_A)$. 因此 $\mathrm{core}(f_A) \supseteq D$.

2) 假设 $a \in \mathrm{core}(f_A)$, 并假设不存在 $x, y \in U$ 使得 $d(x, y) = \{a\}$. 则有以下几种情况:

① 对于任意的 $x, y \in U$, $d(x, y) = \varnothing$.

由 $a \in \mathrm{core}(f_A)$, 对于任意的 $k \leqslant q$, 有 $a \in B_k$. 由定理 6, $B_k \bigcap d(x, y) \neq \varnothing$, 得出矛盾.

② 存在 $x_0, y_0 \in U$ 使得 $|d(x_0, y_0)| = 1$, $d(x, y) \neq \{a\}$. 假设 $d(x, y) = \{b\}(b \neq a)$.

类似于 1) 的证明, 可得到 $b \in \mathrm{core}(f_A)$. 所以 $b = a$, 得出矛盾.

③ 对于任意的 $a \in d(x, y)$, $|d(x, y)| \geqslant 2$.

令 $B = \bigcup(d(x, y) - \{a\})$, 有 $B \bigcap d(x, y) \neq \varnothing$. 由定理 6 可知, $R_A = R_B$, 所以存在 $C \subseteq B$ 使得 C 是 f_A 的一个参数约简, 但是 $a \notin C$, 矛盾. 因此, $\mathrm{core}(f_A) \subseteq D$. □

2.3 软集的辨识函数

如果一个软集有很多参数, 则用辨识函数计算软集的参数约简和核会更方便一些.

在这一部分, "$\bigvee$"(析取), "$\bigwedge$"(合取), "$\rightarrow$"(蕴含), "$\leftrightarrow$"(逻辑等价) 代表数理逻辑中的命题连接词, 它们分别读作"或", "且", "若-则", "当且仅当".

对于任意的 $a \in A$, 指定布尔变量"a". 假如 $d(x,$

$y) = \{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$, 则指定布尔表达式 $a_1 \bigvee a_2 \bigvee \cdots \bigvee a_k$.

对于任意的 $\{a_1, a_2, \cdots, a_k\} \subseteq A$, 记

$$\bigvee\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}\Big(\text{或} \bigvee_{i=1}^{k} a_k\Big) = a_1 \bigvee a_2 \bigvee \cdots \bigvee a_k,$$

$$\bigwedge\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}\Big(\text{或} \bigwedge_{i=1}^{k} a_k\Big) = a_1 \bigwedge a_2 \bigwedge \cdots \bigwedge a_k.$$

规定 $\bigvee \varnothing = 1$, $\bigwedge \varnothing = 0$, 其中 0 和 1 是两个布尔常量.

定义 13　设 $U = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, f_A 是 U 上的软集, 并且 $\mathfrak{D}(f_A) = (d_{ij})_{n\times n}$ 是 f_A 的辨识矩阵. 定义 f_A 的辨识函数为

$$\Delta(f_A) = \bigwedge(\bigvee d_{ij}).$$

定义 14　设 f_A 是 U 上的软集, 并且 $\Delta(f_A)$ 是 f_A 的辨识函数. 若 $\Delta(f_A) = \bigvee\limits_{k=1}^{q} \Big(\bigwedge\limits_{l=1}^{p_k} a_{kl}\Big)$, 并且每个 $B_k = \{a_{kl} : l \leqslant p_k\} \subseteq A$ 没有重复元素, 则称 $\bigvee\limits_{k=1}^{q} \Big(\bigwedge\limits_{l=1}^{p_k} a_{kl}\Big)$ 是 $\Delta(f_A)$ 的最小标准式, 记为

$$\Delta^*(f_A) = \bigvee_{k=1}^{q} \Big(\bigwedge_{l=1}^{p_k} a_{kl}\Big).$$

2.4　软集参数约简的新方法

定理 9　设 f_A 是 U 上的软集, $\Delta(f_A)$ 是 f_A 的辨识函数, 并且 $\Delta^*(f_A) = \bigvee\limits_{k=1}^{q} \Big(\bigwedge\limits_{l=1}^{p_k} a_{kl}\Big)$ 是 $\Delta(f_A)$ 的最小标准式, 则 $B_k = \{a_{kl} : l \leqslant p_k\}$ $(k \leqslant q)$ 是 f_A 的所有参数约简.

证明　1) 设 $B_{k_0} \in \{B_k : k \leqslant q\}$.

① 显然

$$\Delta^*(f_A) = \bigvee_{k=1}^{q} \Big(\bigwedge_{l=1}^{p_k} a_{kl}\Big) = \bigvee_{k=1}^{q} (\bigwedge B_k),$$

故 $\bigwedge B_{k_0} \to \Delta^*(f_A)$. 由于 $\Delta^*(f_A) = \Delta(f_A) = \bigwedge(\bigvee d_{ij})$, 对于任意的 $x, y \in U$, $\Delta^*(f_A) \leftrightarrow \bigvee d(x, y)$. 故 $\bigwedge B_{k_0} \longrightarrow \bigvee d(x, y)$.

对于任意的 $l \leqslant p_{k_0}$, 有 $\bigwedge B_{k_0} \leftrightarrow a_{k_0 l}$, 并且存在 $a \in d(x, y)$ 使得 $\bigvee d(x, y) \leftrightarrow a$. 对于任意的 $l \leqslant p_{k_0}$, 存在 $a \in d(x, y)$, 使得 $a_{k_0 l} \to a$, 所以对于任意的 $x, y \in U$, 存在 $l_0 \leqslant p_{k_0}$, 使得 $a = a_{k_0 l_0}$, 即 $a \in B_{k_0} \bigcap d(x, y)$. 因此, 对于任意的 $x, y \in U$, $B_{k_0} \bigcap d(x, y) \neq \varnothing$.

② 为证明 B_{k_0} 是 f_A 的一个参数约简, 由定理 7, 只需证明对于任意的 $a \in B_{k_0}$, 存在 $x_a, y_a \in U$ 使得 $(B_{k_0} - \{a\}) \bigcap d(x_a, y_a) = \varnothing$.

假设存在 $a_0 \in B_{k_0}$ 使得对于任意的 $x, y \in U$, 有 $(B_{k_0} - \{a_0\}) \bigcap d(x, y) \neq \varnothing$. 取 $b_{xy} \in (B_{k_0} - \{a_0\}) \bigcap d(x, y)$, 则 $\bigwedge(B_{k_0} - \{a_0\}) \to b_{xy}$, 且 $b_{xy} \to \bigvee d(x, y)$. 因此, 对于任意的 $x, y \in U$, $\bigwedge(B_{k_0} - \{a_0\}) \to \bigvee d(x, y)$.

因为 $\Delta^*(f_A)$ 包含 $\Delta(f_A)$ 的所有真解释, $B_{k_0} - \{a_0\} \in \{B_k : k \leqslant q\}$, 所以

$$\begin{aligned}
&(\bigwedge B_{k_0}) \bigvee (\bigwedge(B_{k_0} - \{a_0\})) = \\
&((\bigwedge(B_{k_0} - \{a_0\})) \bigwedge \{a_0\}) \bigvee \\
&((\bigwedge(B_{k_0} - \{a_0\})) \bigwedge 1) = \\
&(\bigwedge(B_{k_0} - \{a_0\})) \bigwedge (\{a_0\} \bigvee 1) = \\
&(\bigwedge(B_{k_0} - \{a_0\})) \bigwedge 1 = \\
&\bigwedge(B_{k_0} - \{a_0\}).
\end{aligned}$$

这意味着 $B_{k_0} \notin \{B_k : k \leqslant q\}$, 矛盾. 因此, 每个 B_{k_0} 是 f_A 的参数约简.

2) 为证明 $B_k = \{a_{kl} : l \leqslant p_k\}$ $(k \leqslant q)$ 是 f_A 的所有参数约简, 只需证明: 若 B 是 f_A 的参数约简, 则存在 $B_{k_1} \in \{B_k : k \leqslant q\}$ 使得 $B = B_{k_1}$.

因 B 是 f_A 的参数约简, 故 $R_A = R_B$. 由定理 6 可得, 对于任意的 $x, y \in U$, 有 $B \bigcap d(x, y) \neq \varnothing$. 类似于 1) 中 ② 的证明, 可得 $B \in \{B_k : k \leqslant q\}$. 因此, 存在 $B_{k_1} \in \{B_k : k \leqslant q\}$ 使得 $B = B_{k_1}$.

综合 1) 和 2), $B_k = \{a_{kl} : l \leqslant p_k\}$ $(k \leqslant q)$ 是 f_A 的所有参数约简. □

3　算例分析

设 f_A 是 U 上的软集. 使用软集参数约简的新方法, 计算 f_A 的参数约简和核的步骤如下.

Step 1: 输入软集 f_A;

Step 2: 计算出 f_A 的辨识矩阵 $\mathfrak{D}(f_A)$;

Step 3: 给出 f_A 的辨识函数 $\Delta(f_A)$;

Step 4: 计算出 $\Delta(f_A)$ 的最小标准式 $\Delta^*(f_A)$;

Step 5: 输出 f_A 的所有参数约简和核.

例 3　考虑例 1 中的软集, 求其所有参数约简和核.

Step 1: 输入例 1 中的软集 f_A.

Step 2: 得到 f_A 的辨识矩阵如下:

$$\left[\begin{array}{ccc}
\varnothing & \{a_2\} & A \\
\{a_2\} & \varnothing & \{a_1, a_3, a_4\} \\
A & \{a_1, a_3, a_4\} & \varnothing \\
A & \{a_1, a_3, a_4\} & \varnothing \\
\{a_2\} & \varnothing & \{a_1, a_3, a_4\} \\
\{a_1, a_4\} & \{a_1, a_2, a_4\} & \{a_2, a_3\}
\end{array}\right. \rightarrow$$

$$
\leftarrow \left.\begin{matrix} A & \{a_2\} & \{a_1,a_4\} \\ \{a_1,a_3,a_4\} & \varnothing & \{a_1,a_2,a_4\} \\ \varnothing & \{a_1,a_3,a_4\} & \{a_2,a_3\} \\ \varnothing & \{a_1,a_3,a_4\} & \{a_2,a_3\} \\ \{a_1,a_3,a_4\} & \varnothing & \{a_1,a_2,a_4\} \\ \{a_2,a_3\} & \{a_1,a_2,a_4\} & \varnothing \end{matrix}\right].
$$

Step 3: 得到 f_A 的辨识函数

$\varDelta(f_A) =$

$a_2 \bigwedge(a_2 \bigvee a_3) \bigwedge(a_1 \bigvee a_4) \bigwedge(a_1 \bigvee a_2 \bigvee a_4) \bigwedge$

$(a_1 \bigvee a_3 \bigvee a_4) \bigwedge(a_1 \bigvee a_2 \bigvee a_3 \bigvee a_4) =$

$a_2 \bigwedge(a_1 \bigvee a_4)$.

Step 4: 得到 $\varDelta(f_A)$ 的最小标准式

$$\varDelta^*(f_A) = (a_1 \bigwedge a_2) \bigvee(a_2 \bigwedge a_4).$$

Step 5: 得到 f_A 的所有参数约简为 $\{a_1, a_2\}$ 和 $\{a_2, a_4\}$, 并得到 f_A 的核为 $\mathrm{core}(f_A) = \{a_2\}$.

4 结 论

本文介绍了软集的辨识矩阵和辨识函数, 给出了软集参数约简方法. 所提出的方法是借助信息系统的属性约简得到的, 而其他软集参数约简方法则不涉及信息系统, 且往往是考虑特定条件下的软集参数约简. 算例分析表明, 所提出的方法简便、好用.

参考文献(References)

[1] Pawlak Z. Rough sets[J]. Int J of Computer Information Science, 1982, 11(5): 341-356.

[2] Zadeh L A. Fuzzy sets[J]. Information and Control, 1965, 8: 338-353.

[3] Molodtsov D. Soft set theory-first result[J]. Computer and Mathematics with Applications, 1999, 37(4/5): 19-31.

[4] Molodtsov D. The theory of soft sets[M]. Moscow: URSS Publishers, 2004.

[5] 邹艳, 肖智, 龚科. 基于最优选择对象不变的软集合参数约简[J]. 系统工程学报, 2009, 24(4): 457-461.
(Zou Y, Xiao Z, Gong K. Parameters reduction of soft sets based on invariability of optimal choice objects[J]. J of Systems Engineering, 2009, 24(4): 457-461.)

[6] Maji P K, Biswas R, Roy A R. Soft set theory[J]. Computer and Mathematics with Applications, 2003, 45(4/5): 555-562.

[7] Pei D, Miao D. From soft sets to information systems[J]. Proc of Granular Computing, IEEE, 2005, 2: 617-621.

[8] Jiang Y, Tang Y, Chen Q, et al. Extending soft sets with description logics[J]. Computer and Mathematics with Applications, 2010, 59(6): 2087-2096.

[9] Maji P K, Roy A R. An application of soft sets in a decision making problem[J]. Computer and Mathematics with Applications, 2002, 44(8/9): 1077-1083.

[10] Chen D, Tsang E C C, Yeung D S, et al. The parameterization reduction of soft sets and its applications[J]. Computer and Mathematics with Applications, 2005, 49(5/6): 757-763.

[11] Kong Z, Gao L, Wang L, et al. The normal parameter reduction of soft sets and its algorithm[J]. Computer and Mathematics with Applications, 2008, 56(12): 3029-3037.

[12] Ma X, Sulaiman N, Qin H, et al. A new efficient normal parameter reduction algorithm of soft sets[J]. Computer and Mathematics with Applications, 2011, 62(2): 588-598.

[13] 肖智, 龚科, 李丹. 基于双射软集合决策系统的参数约简[J]. 系统工程理论与实践, 2011, 31(2): 308-314.
(Xiao Z, Gong K, Li D. Bijective soft set decision system based parameters reduction[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2011, 31(2): 308-314.)

[14] 张文修, 吴伟志, 梁吉业, 等. 粗糙集的理论与方法[M]. 北京: 科学出版社, 2001.
(Zhang W X, Wu W Z, Liang J Y, et al. Rough sets theory and methods[M]. Beijing: Science Publishers, 2001.)

(责任编辑: 孙艺红)