

具有随机采样特性的网络化系统 H_∞ 滤波

俞立, 凌荣耀, 张丹

(浙江工业大学 a. 信息工程学院, b. 浙江省嵌入式系统联合重点实验室, 杭州 310023)

摘要: 研究一类具有随机采样特性的网络化系统 H_∞ 滤波问题. 通过将传感器的随机采样过程建模成马尔可夫链, 将数据量化作用转化为模型的参数不确定性, 并用二值随机变量描述丢包过程, 从而用一个多随机变量的马尔可夫不确定性模型来描述滤波误差系统. 应用 Lyapunov 稳定性理论和随机系统分析方法, 导出了滤波误差系统随机稳定且具有给定 H_∞ 性能的充分条件, 并给出了滤波器的设计方法. 仿真结果验证了所提出方法的有效性.

关键词: H_∞ 滤波; 网络化系统; 随机采样; 马尔可夫系统; 量化; 随机丢包

中图分类号: TP273

文献标志码: A

H_∞ filtering for a class of networked systems with stochastic sampling

YU Li, LING Rong-yao, ZHANG Dan

(a. College of Information Engineering, b. Zhejiang Provincial United Key Laboratory of Embedded Systems, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310023, China. Correspondent: YU Li, E-mail: lyu@zjut.edu.cn)

Abstract: The H_∞ filtering problem is considered for a class of networked systems with stochastic sampling. The stochastic sampling process of sensors is described as a Markov chain, the effect of signal quantization is transformed into the parameter uncertainty of the model, then a set of binary variables are introduced to model the random packet loss process, thus a uncertain Markovian model with multiple random variables is obtained to describe the resulting filtering error system. Based on the Lyapunov stability theory and stochastic analysis method, some conditions are derived such that the filtering error system is stochastic stable and achieves a prescribed H_∞ performance, the design procedure of the filter is also provided. A simulation is given to demonstrate the effectiveness of the proposed results.

Key words: H_∞ filtering; networked systems; stochastic sampling; Markovian systems; quantization; packet dropouts

0 引言

近年来, 由控制对象和各子系统通过网络连接构成的网络化控制系统以其成本低、设计灵活、易于扩展和维护等优点受到了广泛关注, 逐步成为当前学术界及工业界研究的热点. 在过去的 10 余年里, 已经出现了许多有效的网络化控制系统分析与设计方法, 如时滞系统方法、切换系统方法、随机系统方法等^[1-3].

除了控制问题, 网络化系统的滤波问题也越来越受到人们的重视. 目前, 国内外学者已经提出了许多网络环境下的滤波器设计结果, 包括 Kalman 滤波^[4]、 H_∞ 滤波等^[5-7]. 但现有的研究普遍假设系统的采样周期是固定的, 而在实际的网络化系统中, 采用固定的采样周期无法使系统的性能达到最优^[8]. 另一方面, 网络环境的随机性使得许多学者开始关注具有随机采样特性的网络化系统分析与设计问题, 但这方

面的研究成果有限^[9-10]. 文献 [10] 研究了一类具有随机采样策略的 H_∞ 滤波问题, 其中假设不同采样周期发生的概率恒定且服从伯努利分布, 进而将具有随机采样特性的滤波系统建模成一个具有多个随机变量的随机时滞系统. 最后, 基于 Lyapunov 稳定性理论和时滞系统方法, 给出了滤波器的设计算法. 虽然在文献 [9-10] 中已经考虑了随机采样问题, 但仍有许多极具挑战性的问题有待解决. 例如, 上述研究采用的输入时滞处理方法只适用于采样周期个数较少的情况, 当这种方法被推广到更具一般性的情形时, 将产生大量的随机变量和时延因子, 使得系统稳定性分析和滤波器设计过程变得非常复杂. 因此, 如何寻求一种更具一般性的方法仍需进一步研究, 这也是本文研究的动机之一. 此外, 网络的引入也不可避免地带来一些新的问题, 如有限的带宽资源使得信号在发送前必须

收稿日期: 2013-04-22; 修回日期: 2013-10-28.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61273117); 浙江省自然科学基金项目(Q14F030015).

作者简介: 俞立(1961—), 男, 教授, 博士生导师, 从事鲁棒控制、时滞系统、分布式控制、网络化控制系统等研究; 凌荣耀(1989—), 男, 硕士生, 从事网络化控制系统的研究.

经过量化处理,而通信链路的不可靠导致了随机丢包问题^[11-14].但上述问题尚未被综合研究,主要难点在于当采用文献[9-10]中的输入时滞方法来研究随机采样问题时,若进一步考虑随机丢包和量化等问题,所得到的滤波误差系统将是一个非常复杂的动态系统,其分析更加困难.

本文研究了一类具有随机采样特性的网络化系统 H_∞ 滤波问题,同时考虑了数据量化及随机丢包等网络诱导因素,更符合实际的网络化系统.对象的量测信息通过传感器采样后经由网络传输到滤波器,定义采样间隔的取值范围是一个给定的有限集合,不同采样间隔之间的切换过程可视为具有有限模态的随机系统.基于 Lyapunov 稳定性理论和 LMI 方法,导出了滤波误差系统随机稳定且具有给定 H_∞ 性能的充分条件,并给出了滤波器的设计方法.最后通过仿真算例验证了所述设计方法的有效性.

1 问题描述

本文考虑的滤波策略如图 1 所示,对象由如下的线性时不变模型描述:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bw(t), \\ z(t) = Lx(t). \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x(t) \in \mathbf{R}^{n_1}$ 为系统的状态向量; $w(t) \in \mathbf{R}^{n_2}$ 为能量有界的外部扰动信号,属于 $L_2[0, \infty)$; $z(t) \in \mathbf{R}^{n_3}$ 为需要估计的信号; A, B 和 L 分别为维数适当的已知矩阵.

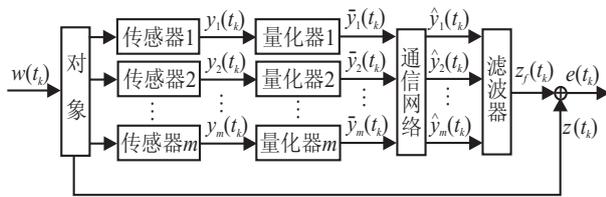


图 1 滤波系统的结构示意图

对象的量测输出 $y(t_k) \in \mathbf{R}^m$ 通过 m 个传感器节点在离散时刻 t_k 采样并传输, $k = 0, 1, \dots$. 定义采样间隔 $h_k = t_{k+1} - t_k = m_k T_0$, 其中 T_0 为系统的基本采样周期, $m_k \in \{i_1, i_2, \dots, i_s\}$, 故 $h_k \in \{i_1 T_0, i_2 T_0, \dots, i_s T_0\}$. 经采样后系统 (1) 的离散化模型为

$$\begin{cases} x(t_{k+1}) = A_k x(t_k) + B_k w(t_k), \\ y(t_k) = Cx(t_k) + Dw(t_k), \\ z(t_k) = Lx(t_k). \end{cases} \quad (2)$$

其中: $A_k = e^{Ah_k}$, $B_k = B \int_0^{h_k} e^{A\tau} d\tau$. 记 $A_0 = e^{AT_0}$, $B_0 = B \int_0^{T_0} e^{A\tau} d\tau$, 可得 $A_k = A_0^{m_k}$, $B_k = \sum_{i=0}^{m_k-1} A_0^i B_0$. 可见系统 (2) 中参数矩阵 A_k 和 B_k 的取值与采样间隔 h_k 相关. 假设不同采样周期的切换过程满足马尔可夫性, 并以一个马尔可夫链 $\sigma(k) \in \Gamma = \{1, 2, \dots, s\}$ 描

述, 相应的概率转移矩阵 $\Pi = [\sigma_{ij}]$ 如下:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \text{Prob}\{\sigma(k+1) = j | \sigma(k) = i\}, \\ \sum_{j=1}^s \sigma_{ij} &= 1, \quad \forall i, j \in \Gamma. \end{aligned} \quad (3)$$

进而系统 (2) 可表示为

$$\begin{cases} x(t_{k+1}) = A_{\sigma(k)} x(t_k) + B_{\sigma(k)} w(t_k), \\ y(t_k) = Cx(t_k) + Dw(t_k), \\ z(t_k) = Lx(t_k). \end{cases} \quad (4)$$

注 1 不同于文献 [9-10] 中将随机采样过程转化为具有多个随机变量和时延因子的随机时滞系统, 本文采用马尔可夫链描述随机采样过程, 这种方法更简单, 且适用于采样间隔个数较多的情况.

为估计信号 $z(t_k)$, 考虑如下结构的滤波器:

$$\begin{cases} x_f(t_{k+1}) = A_f x_f(t_k) + B_f \hat{y}(t_k), \\ z_f(t_k) = C_f x_f(t_k). \end{cases} \quad (5)$$

其中: $x_f(t_k) \in \mathbf{R}^{n_1}$ 为滤波器的状态; $\hat{y}(t_k) \in \mathbf{R}^m$ 为滤波器的输入; $z_f(t_k) \in \mathbf{R}^{n_3}$ 为信号 $z(t_k)$ 的估计值; A_f, B_f, C_f 为待设计的滤波器参数矩阵.

由于传感器与滤波器之间的信号通过网络进行传输, 有限的带宽资源使得信号在发送前必须经过量化处理, 而通信链路的不可靠导致了随机丢包问题. 以下考虑量化及丢包等网络诱导因素对系统性能的影响. 首先考虑量化问题, 本文采用的对数量化器可由如下分段函数表示:

$$Q(v) = \begin{cases} \rho^i u_0, & \frac{u_i}{1+\delta} < v \leq \frac{u_i}{1-\delta}, v > 0; \\ 0, & v = 0; \\ -Q(-v), & v < 0. \end{cases} \quad (6)$$

对应的量化误差可表示为^[15]

$$e_{Q(v)} = Q(v) - v = \Delta v, \quad \Delta \in [-\delta, \delta]. \quad (7)$$

其中: $\delta = \frac{1-\rho}{1+\rho}$ 为量化器的最大误差系数, ρ 为量化密度, 量化密度越大, 量化精度越高. 由式 (6) 可得各个量化器的输出 $\bar{y}_i(t_k) = Q(y_i(t_k))$, $i = 1, 2, \dots, m$. 基于式 (7), 量化器输出亦可表示为

$$\bar{y}(t_k) = (I + \Delta(t_k))y(t_k). \quad (8)$$

其中

$$\begin{aligned} \Delta(t_k) &= \text{diag}\{\Delta_1(t_k), \Delta_2(t_k), \dots, \Delta_m(t_k)\}, \\ \Delta_i(t_k) &\in [-\delta_i, \delta_i], \quad \delta_i = \frac{1-\rho_i}{1+\rho_i}, \quad i = 1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

通信链路的不可靠将导致数据包丢失, 因此, 引入随机二进制切换序列 $\alpha_i(t_k)$ 描述各信道丢包过程, 并作如下定义: $\alpha_i(t_k) \in \{0, 1\}$, $\text{Prob}\{\alpha_i(t_k) = 1\} = \bar{\alpha}_i$, $\forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$. $\alpha_i(t_k) = 1$ 表示 t_k 时刻传感器 i 的数据成功送达, 滤波器输入 $\hat{y}_i(t_k) = \bar{y}_i(t_k)$, 反之, 表示发生丢包, 滤波器采用上一时刻成功接收到的数

据进行状态更新, 即 $\hat{y}_i(t_k) = \hat{y}_i(t_{k-1})$, 易知各信道丢包率 $\beta_i = 1 - \bar{\alpha}_i$. 综合以上分析, 滤波器输入为

$$\hat{y}(t_k) = \Lambda(t_k)(I + \Delta(t_k))y(t_k) + (I - \Lambda(t_k))\hat{y}(t_{k-1}), \quad (9)$$

其中

$$\Lambda(t_k) = \text{diag}\{\alpha_1(t_k), \alpha_2(t_k), \dots, \alpha_m(t_k)\}.$$

定义 $\eta(t_k) = [x^T(t_k) \ x_f^T(t_k) \ \hat{y}^T(t_{k-1})]^T$, 根据式 (4), (5) 和 (9), 可得滤波误差系统

$$\begin{cases} \eta(t_{k+1}) = \bar{A}_{\sigma(k)}\eta(t_k) + \bar{B}_{\sigma(k)}w(t_k), \\ e(t_k) = \bar{C}\eta(t_k). \end{cases} \quad (10)$$

其中

$$\bar{A}_{\sigma(k)} = \begin{bmatrix} A_{\sigma(k)} & 0 & 0 \\ B_f\Lambda(t_k)(I + \Delta(t_k))C & A_f & B_f(I - \Lambda(t_k)) \\ \Lambda(t_k)(I + \Delta(t_k))C & 0 & I - \Lambda(t_k) \end{bmatrix},$$

$$\bar{B}_{\sigma(k)} = \begin{bmatrix} B_{\sigma(k)} \\ B_f\Lambda(t_k)(I + \Delta(t_k))D \\ \Lambda(t_k)(I + \Delta(t_k))D \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = \begin{bmatrix} -L^T \\ C_f^T \\ 0 \end{bmatrix}^T.$$

本文针对随机系统 (4), 设计滤波器 (5) 中的参数矩阵, 使得系统 (10) 满足给定的性能要求. 为此, 首先引入以下定义及引理.

定义 1^[16] 若对于任意的初始条件 $x_0 \in \mathbf{R}^{n_1}$, $\sigma_0 \in \Gamma$, 当外部扰动信号 $w(t_k) \equiv 0$ 时, 有

$$E\left\{\sum_{k=0}^{\infty} \|\eta(t_k)\|^2 | x_0, \sigma_0\right\} < \infty, \quad (11)$$

则称滤波误差系统 (10) 是随机稳定的.

定义 2^[16] 若滤波误差系统 (10) 随机稳定, 且在零初始条件下对于任意给定的标量 $\gamma > 0$, 有

$$E\left\{\sum_{k=0}^{\infty} \|e(t_k)\|^2\right\} \leq \gamma^2 \sum_{k=0}^{\infty} \|w(t_k)\|^2, \quad (12)$$

则称滤波误差系统 (10) 具有给定的 H_∞ 性能 γ .

引理 1^[17] 给定适当维数的矩阵 X_1, X_2, X_3 , X_1 满足 $X_1 = X_1^T$, 则

$$X_1 + X_2\Delta X_3 + X_3^T\Delta^T X_2^T < 0, \quad (13)$$

对于任意满足 $\Delta^T\Delta < I$ 的 Δ 成立, 当且仅当存在标量 $\varepsilon > 0$, 使得

$$X_1 + \varepsilon^{-1}X_2X_2^T + \varepsilon X_3^T X_3 < 0. \quad (14)$$

2 主要结果

本节将导出使得滤波误差系统 (10) 随机稳定且具有给定 H_∞ 性能的充分条件, 并给出滤波器的设计方法.

定理 1 对于给定的概率转移矩阵 Π 及标量 $\gamma > 0$, 若存在矩阵 $P_i > 0$ 及标量 $\varepsilon > 0$, 使得对于任意 $i \in \Gamma$, 不等式

$$\begin{bmatrix} -P_i & 0 & \hat{A}_i^T(N^T - R^T)\hat{\Phi} & \bar{C}^T & \varepsilon N^T \Xi & 0 \\ * & -\gamma^2 I & \hat{B}_i^T & D^T \hat{\Phi} & 0 & \varepsilon D^T \Xi & 0 \\ * & * & -\bar{P}_i^{-1} & 0 & 0 & 0 & M\bar{\Lambda} \\ * & * & * & \hat{P}_i & 0 & 0 & \hat{\Phi}^T \\ * & * & * & * & -I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\varepsilon I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\varepsilon I \end{bmatrix} < 0 \quad (15)$$

成立, 则滤波误差系统 (10) 是随机稳定的, 同时具有给定的 H_∞ 性能 γ . 其中

$$\bar{P}_i = \sum_{j=1}^s \sigma_{ij} P_j, \quad \hat{A}_i = \begin{bmatrix} A_i & 0 & 0 \\ B_f \bar{\Lambda} C & A_f & B_f(I - \bar{\Lambda}) \\ \bar{\Lambda} C & 0 & I - \bar{\Lambda} \end{bmatrix},$$

$$\hat{B}_i = \begin{bmatrix} B_i \\ B_f \bar{\Lambda} D \\ \bar{\Lambda} D \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 0 \\ B_f \\ I \end{bmatrix}, \quad N = [C \ 0 \ 0],$$

$$R = [0 \ 0 \ I], \quad \hat{\Phi} = [\theta_1 \Phi_1 M^T \ \dots \ \theta_m \Phi_m M^T],$$

$$\theta_i = \sqrt{\bar{\alpha}_i - \bar{\alpha}_i^2}, \quad \Phi_i = \text{diag}\{\underbrace{0, \dots, 0}_{i-1}, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{m-i}\},$$

$$\bar{\Lambda} = \text{diag}\{\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_m\}, \quad \Xi = \text{diag}\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m\},$$

$$\bar{P}_i = \text{diag}\{\underbrace{-\bar{P}_i^{-1}, -\bar{P}_i^{-1}, \dots, -\bar{P}_i^{-1}}_m\}.$$

证明 首先, 考虑系统 (10) 的随机稳定性. 外部扰动信号 $w(t_k) \equiv 0$ 时, 选取 Lyapunov 函数

$$V(t_k) = \eta^T(t_k) P_{\sigma(k)} \eta(t_k). \quad (16)$$

假设随机系统 (4) 在 t_k 时刻处于状态 i , t_{k+1} 时刻切换至状态 j , $i, j \in \Gamma$, 由式 (16) 可得

$$E[\Delta V(t_k)] = E[V(t_{k+1}) - V(t_k)] = E\left\{\eta^T(t_k) \left[\sum_{j=1}^s \sigma_{ij} \bar{A}_i^T P_j \bar{A}_i - P_i \right] \eta(t_k)\right\}. \quad (17)$$

记 $\bar{P}_i = \sum_{j=1}^s \sigma_{ij} P_j$, 可将式 (17) 改写为

$$E[\Delta V(t_k)] = E\{\eta^T(t_k) [\bar{A}_i^T \bar{P}_i \bar{A}_i - P_i] \eta(t_k)\}. \quad (18)$$

分别记

$$\Lambda(t_k) - \bar{\Lambda} = \sum_{i=1}^m (\alpha_i(t_k) - \bar{\alpha}_i) \Phi_i,$$

$$\Omega_{1i} = \hat{A}_i + M\bar{\Lambda}\Delta(t_k)N,$$

$$\Omega_{2j} = M\Phi_j((I + \Delta(t_k))N - R),$$

由式 (18) 可得

$$E[\Delta V(t_k)] = \eta^T(t_k) \Psi_i \eta(t_k). \quad (19)$$

其中

$$\Psi_i = \Omega_{1i}^T \bar{P}_i \Omega_{1i} + \sum_{j=1}^m \theta_j^2 \Omega_{2j}^T \bar{P}_i \Omega_{2j} - P_i.$$

根据 Schur 引理, $E[\Delta V(t_k)] < 0$ 等价于

$$\Omega_{3i} + \Omega_4 \Xi^{-1} \Delta(t_k) \Omega_5 + \Omega_5^T [\Xi^{-1} \Delta(t_k)]^T \Omega_4^T < 0. \quad (20)$$

其中

$$\Omega_4 = [\Xi^T N \ 0 \ 0]^T, \quad \Omega_5 = [0 \ \bar{\Lambda} M^T \ \hat{\Phi}],$$

$$\Omega_{3i} = \begin{bmatrix} -P_i & \hat{A}_i^T & (N^T - R^T) \hat{\Phi} \\ * & -\bar{P}_i^{-1} & 0 \\ * & * & \hat{P}_i \end{bmatrix}.$$

注意到式 (20) 中 $[\Xi^{-1} \Delta(t_k)]^T \Xi^{-1} \Delta(t_k) < I$, 根据引理 1 及 Schur 引理, 式 (20) 成立当且仅当下式成立:

$$\begin{bmatrix} -P_i & \hat{A}_i^T & (N^T - R^T) \hat{\Phi} & \varepsilon N^T \Xi & 0 \\ * & -\bar{P}_i^{-1} & 0 & 0 & M \bar{\Lambda} \\ * & * & \hat{P}_i & 0 & \hat{\Phi}^T \\ * & * & * & -\varepsilon I & 0 \\ * & * & * & * & -\varepsilon I \end{bmatrix} < 0. \quad (21)$$

由式 (15) 可推出式 (21), 即 $E[\Delta V(t_k)] < 0$, 因此 $E[V(t_{k+1})|x_{t_k}, \sigma_{t_k}] < V(t_k)$. 进而, 存在标量 $0 < \mu < 1$, 使得 $E[V(t_{k+1})|x_{t_k}, \sigma_{t_k}] < \mu V(t_k)$, 递推可得 $E[V(t_k)|x_{t_0}, \sigma_{t_0}] < \mu^k V(t_0)$, 从而

$$E \left[\sum_{k=0}^h V(t_k) | x_{t_0}, \sigma_{t_0} \right] \leq 1 + \mu + \dots + \mu^h V(t_0) = \frac{1 - \mu^{h+1}}{1 - \mu} V(t_0). \quad (22)$$

设 $\chi = \min_{i \in \Gamma} \lambda_{\min}(P_i)$, 并对式 (22) 两边分别取极限 $h \rightarrow \infty$, 可得

$$E \left[\sum_{k=0}^{\infty} \|\eta(t_k)\|^2 | x_{t_0}, \sigma_{t_0} \right] \leq \frac{1}{(1 - \mu)\chi} V(t_0) < \infty. \quad (23)$$

根据定义 1, 滤波误差系统 (10) 是随机稳定的.

进一步考虑如下性能指标:

$$J \triangleq E \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} [e^T(t_k) e(t_k) - \gamma^2 w^T(t_k) w(t_k)] \right\}, \quad (24)$$

在零初始条件下, 由式 (24) 及 $E[\Delta V(t_k)] < 0$ 可得

$$J \leq E \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} [e^T(t_k) e(t_k) - \gamma^2 w^T(t_k) w(t_k) + \Delta V] \right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\eta}^T(t_k) \tilde{\Psi}_i \tilde{\eta}(t_k). \quad (25)$$

其中

$$\tilde{\Psi}_i = \Omega_{6i} + \Omega_7^T \Delta(t_k) \Omega_8^T + \Omega_8 \Delta(t_k) \Omega_7,$$

$$\tilde{\eta}(t_k) = [\eta^T(t_k) \ w^T(t_k)]^T,$$

$$\Omega_7 = [N \ D \ 0 \ 0 \ 0],$$

$$\Omega_8 = [0 \ 0 \ \bar{\Lambda}^T M^T \ \hat{\Phi} \ 0]^T,$$

$$\Omega_{6i} = \begin{bmatrix} -P_i & 0 & \hat{A}_i^T & (N^T - R^T) \hat{\Phi} & \bar{C}^T \\ * & -\gamma^2 I & \hat{B}_i^T & D^T \hat{\Phi} & 0 \\ * & * & -\bar{P}_i^{-1} & 0 & 0 \\ * & * & * & \hat{P}_i & 0 \\ * & * & * & * & -I \end{bmatrix}.$$

由引理 1、Schur 引理和式 (15), 可得 $\tilde{\Psi}_i < 0$, 即 $J < 0$. 因此, 由定义 2 可知, 滤波误差系统 (10) 具有给定的 H_∞ 性能 γ . \square

定理 1 中存在滤波器参数和未知矩阵的耦合现象, 无法直接求得滤波器增益. 下面将给出滤波器参数矩阵的求解方法.

定理 2 给定概率转移矩阵 Π 及标量 $\gamma > 0$, 若存在矩阵 $G_i, A_F = G_f^T A_f, B_F = G_f^T B_f, C_F = C_f^T, P_i > 0$ 和标量 $\varepsilon > 0$, 对于任意 $i \in \Gamma$, 不等式

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{1i} & \Sigma_{2i} \\ * & \Sigma_{3i} \end{bmatrix} < 0, \quad (26)$$

$$P_i = \begin{bmatrix} P_{i11} & P_{i12} & P_{i13} \\ * & P_{i22} & P_{i23} \\ * & * & P_{i33} \end{bmatrix} > 0 \quad (27)$$

成立, 则系统 (10) 随机稳定且具有给定的 H_∞ 性能 γ , 相应的滤波器参数矩阵为

$$\begin{cases} A_f = G_f^{-T} A_F, \\ B_f = G_f^{-T} B_F, \\ C_f = C_F^T. \end{cases} \quad (28)$$

其中

$$\Sigma_{2i} = \begin{bmatrix} (N^T - R^T) \tilde{\Phi}_i & \bar{C}^T & \varepsilon N^T \Xi & 0 \\ D^T \tilde{\Phi} & 0 & \varepsilon D^T \Xi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_i^T M \bar{\Lambda} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\Phi}_i = \begin{bmatrix} \theta_1 G_i^T M \Phi_1 \\ \vdots \\ \theta_m G_i^T M \Phi_m \end{bmatrix}, \quad G_i = \begin{bmatrix} G_{i11} & G_{i12} & G_{i13} \\ G_f & G_f & 0 \\ G_{i31} & G_{i32} & G_{i33} \end{bmatrix},$$

$$\Sigma_{1i} = \begin{bmatrix} -P_i & 0 & \hat{A}_i^T G_i \\ * & -\gamma^2 I & \hat{B}_i^T G_i \\ * & * & \bar{P}_i - G_i - G_i^T \end{bmatrix},$$

$$\Sigma_{3i} = \begin{bmatrix} \bar{P}_i & 0 & 0 & \tilde{\Phi}^T \\ * & -I & 0 & 0 \\ * & * & -\varepsilon I & 0 \\ * & * & * & -\varepsilon I \end{bmatrix},$$

$$\bar{P}_i = \text{diag} \{ \underbrace{\bar{P} - G_i - G_i^T, \dots, \bar{P} - G_i - G_i^T}_m \}.$$

证明 由式 (26) 可知 $\bar{P}_i - G_i - G_i^T < 0$, 而 $\bar{P}_i > 0$, 故 $G_i + G_i^T > 0$, 根据 $(\bar{P}_i - G_i)^T \bar{P}_i^{-1} (\bar{P}_i - G_i) \geq 0$, 可得 $\bar{P}_i - G_i - G_i^T \geq -G_i^T \bar{P}_i^{-1} G_i$. 由式 (26) 可得

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{4i} & \Sigma_{5i} \\ * & \Sigma_6 \end{bmatrix} < 0. \quad (29)$$

其中

$$\Sigma_{4i} = \begin{bmatrix} -P_i & 0 & \hat{A}_i^T G_i & (N^T - R^T) \tilde{\Phi} \\ * & -\gamma^2 I & \hat{B}_i^T G_i & D^T \tilde{\Phi} \\ * & * & -G_i^T \bar{P}_i^{-1} G_i & 0 \\ * & * & * & P'_i \end{bmatrix},$$

$$\Sigma_{5i} = \begin{bmatrix} \bar{C}^T & \varepsilon N^T \Xi & 0 \\ 0 & \varepsilon D^T \Xi & 0 \\ 0 & 0 & G_i^T M \bar{A} \\ 0 & 0 & \tilde{\Phi}^T \end{bmatrix}, \quad \Sigma_6 = \begin{bmatrix} -I & 0 \\ 0 & -\varepsilon I \end{bmatrix},$$

$$P'_i = \text{diag}\{-G_i^T \bar{P}_i^{-1} G_i, \dots, -G_i^T \bar{P}_i^{-1} G_i\}.$$

分别对式(29)左乘 $\text{diag}\{I, I, \underbrace{G_i^{-T}, G_i^{-T}}_{m+1}, I, I, I\}$,

并右乘其转置, 可得式(15), 因此滤波误差系统(10)随机稳定且具有给定 H_∞ 性能 γ . \square

注 2 式(26)和(27)中的 LMIs 关于未知矩阵和标量 γ^2 都是线性的, 因此, 使系统(10)性能最优的滤波器参数可通过如下具有 LMIs 约束的优化问题来求解:

$$\begin{aligned} & \min \gamma^2, \\ & \text{s.t. 式(26) and (27)}. \end{aligned} \quad (30)$$

若优化问题(30)有解, 则滤波误差系统(10)的最优 H_∞ 性能 $\gamma^* = \sqrt{\gamma^2_{\min}}$, 且滤波器参数矩阵由式(28)给出.

3 仿真示例

考虑文献[5]中的弹簧系统, 相应系数矩阵如下:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -0.5 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$L = [1 \ 1 \ 0 \ 0], \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}.$$

设基本采样周期 $T_0 = 0.1\text{s}$, 传感器的采样间隔在 $\Gamma = \{T_0, 3T_0\}$ 内切换, 且概率转移矩阵

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}.$$

在所考虑的网络化滤波系统中, 系统的输出 y_1 和 y_2 经由两个传感器测量并通过网络传输至远程的滤波器, 设对应量化器的量化密度分别为 $\rho_1 = 0.9, \rho_2 = 0.8$, 数据成功传输的概率分别为 $\bar{\alpha}_1 = 0.9, \bar{\alpha}_2 = 0.8$. 求解优化问题(30)可得 $\gamma^* = 1.0413$, 对应的滤波器参数矩阵如下:

$$A_f = \begin{bmatrix} 0.0893 & -0.1964 & 0.0635 & 0.0373 \\ -0.0477 & -0.1388 & 0.1579 & -0.0103 \\ -0.3162 & -0.5490 & 0.7595 & -0.0865 \\ 0.7123 & -1.5226 & 0.4638 & 0.3017 \end{bmatrix},$$

$$B_f = \begin{bmatrix} -0.6547 & -0.3522 \\ -0.6141 & -0.6957 \\ -0.4633 & -0.4622 \\ -0.3386 & -0.7802 \end{bmatrix}, \quad C_f = \begin{bmatrix} -1.0017 \\ -0.9989 \\ 0.0079 \\ -0.0059 \end{bmatrix}^T.$$

根据给定概率转移矩阵 Π 随机生成马尔可夫链 $\sigma(k)$ 如图2所示, 其中: $\sigma(k) = 1$ 表示采样间隔为 T_0 , $\sigma(k) = 2$ 表示采样间隔为 $3T_0$. $k \in [0, 30]$ 时, 扰动信号 $w(t_k)$ 在 $[-3, 3]$ 随机分布, 当 $k > 30$ 时恒为零. 图3给出了待估信号 $z(t_k)$ 及其估计值 $z_f(t_k)$ 的状态轨迹, 滤波误差 $e(t_k)$ 及随机噪声 $w(t_k)$ 的轨迹如图4所示, 计算可得

$$\sqrt{\frac{\sum_{k=0}^{\infty} \|e(t_k)\|^2}{\sum_{k=0}^{\infty} \|w(t_k)\|^2}} = 0.2489 < \gamma^*. \quad (31)$$

由此可知本文滤波器设计方法是有效的.

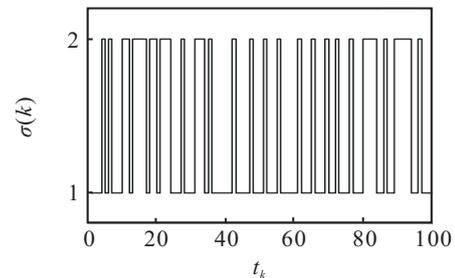


图2 马尔可夫链 $\sigma(k)$

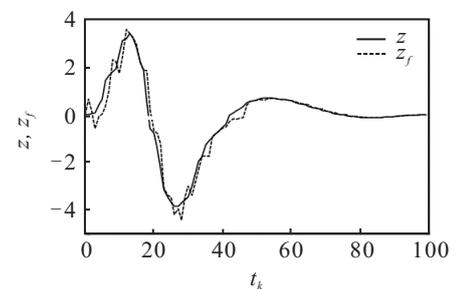


图3 $z(t_k)$ 和 $z_f(t_k)$ 的状态轨迹

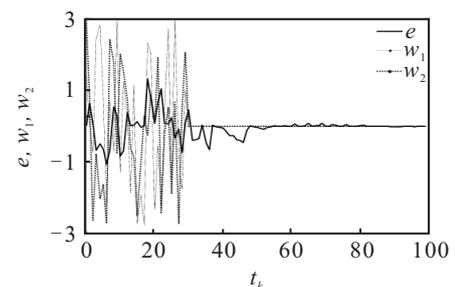


图4 $e(t_k)$ 和 $w(t_k)$ 的状态轨迹

考虑随机丢包及量化误差对系统 H_∞ 性能的影响. 表 1 给出了量化密度 ρ_2 与滤波误差系统 H_∞ 性能的对对应关系, 其中 $\rho_1 = 0.9$, $\bar{\alpha}_i = 0.9$. 由表 1 可知, 系统 H_∞ 性能随单个量化器的量化精度降低而下降. 表 2 给出了丢包率 β_2 与系统 H_∞ 性能的关系, 其中 $\rho_i = 0.9$, $\beta_1 = 0.1$. 可见若某个通信链路丢包率增大, 系统 H_∞ 性能将随之下降.

表 1 量化密度与 H_∞ 性能之间的关系

ρ_2	0.9	0.7	0.5	0.3	0.1
γ^*	0.8756	1.0748	1.5153	2.2888	3.7866

表 2 丢包率与 H_∞ 性能之间的关系

β_2	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
γ^*	0.8756	0.9913	1.0582	1.0773	1.0822

4 结 论

本文研究了一类具有随机采样特性的网络化系统 H_∞ 滤波问题, 同时考虑了随机采样、数据量化和随机丢包等问题对系统性能的影响, 更符合实际的网络化系统. 将滤波误差系统建模成一个包含随机变量及不确定性参数的马尔可夫模型, 基于 Lyapunov 稳定性理论及 LMI 方法, 导出了滤波误差系统随机稳定且具有给定 H_∞ 性能的充分条件, 并给出了滤波器的设计方法. 最后通过仿真算例验证了本文方法的有效性.

参考文献(References)

- [1] Gao H J, Chen T W, Lam J. A new delay system approach to network-based control[J]. *Automatica*, 2008, 44(1): 39-52.
- [2] 俞立, 张文安. 网络化控制系统分析与设计: 切换系统处理方法[M]. 北京: 科学出版社, 2012: 39-57.
(Yu L, Zhang W A. Analysis and design of networked control system: Switched system method[M]. Beijing: Science Press, 2012: 39-57.)
- [3] 阮玉斌, 杨富文, 王武. 测量丢失概率不确定的网络化系统的鲁棒故障检测[J]. *控制与决策*, 2008, 23(8): 894-904.
(Ruan Y B, Yang F W, Wang W. Robust fault detection for networked systems with uncertain missing measurements probabilities[J]. *Control and Decision*, 2008, 23(8): 894-904.)
- [4] Sinopoli B, Schenato L, Franceschetti M, et al. Kalman filtering with intermittent observations[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2004, 49(9): 1453-1464.
- [5] Gao H J, Chen T W. H_∞ estimation for uncertain systems with limited communication capacity[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2007, 52(11): 2070-2084.
- [6] Sahebsara M, Chen T W, Shah S L. Optimal H_∞ filtering in networked control systems with multiple packet dropouts[J]. *Systems & Control Letters*, 2008, 57(9): 696-702.
- [7] 周佩东, 俞立, 宋洪波, 等. 具有随机协议网络化系统的 H_∞ 滤波[J]. *控制理论与应用*, 2010, 27(12): 1711-1716.
(Zhou P D, Yu L, Song H B, et al. H_∞ filtering for network-based systems with stochastic protocols[J]. *Control Theory & Applications*, 2010, 27(12): 1711-1716.)
- [8] Suplin V, Fridman E, Shaked U. Sampled-data H_∞ control and filtering: Nonuniform uncertain sampling[J]. *Automatica*, 2007, 43(6): 1072-1083.
- [9] Gao H J, Wu J L, Shi P. Robust sampled-data H_∞ control with stochastic sampling[J]. *Automatica*, 2009, 45(7): 1729-1736.
- [10] Wu J L, Chen X M, Gao H J. H_∞ filtering with stochastic sampling[J]. *Signal Processing*, 2010, 90(4): 1131-1145.
- [11] Zhang W A, Yu L. Modelling and control of networked control systems with both network-induced delay and packet-dropout[J]. *Automatica*, 2008, 44(12): 3206-3210.
- [12] Tabbara M, Nesić D. Input-output stability of networked control systems with stochastic protocols and channels[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2008, 53(5): 1160-1175.
- [13] Yue D, Han Q L, Lam J. Network-based robust H_∞ control of systems with uncertainty[J]. *Automatica*, 2005, 41(6): 999-1007.
- [14] 褚红燕, 费树岷, 刘金良, 等. 基于信号量化处理的随机时滞网络化系统的分析与设计[J]. *控制与决策*, 2011, 26(11): 1654-1658.
(Chu H Y, Fei S M, Liu J L, et al. Analysis and design for networked systems with random delay based on signal quantization[J]. *Control and Decision*, 2011, 26(11): 1654-1658.)
- [15] Fu M Y, Xie L H. The sector bound approach to quantized feedback control[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2005, 50(11): 1698-1711.
- [16] Zhang L X, Boukas E. Mode-dependent H_∞ filtering for discrete-time Markovian jump linear systems with partly unknown transition probabilities[J]. *Automatica*, 2009, 45(6): 1462-1467.
- [17] Xie L H. Output feedback H_∞ control of systems with parameter uncertainty[J]. *Int J of Control*, 1996, 63(4): 741-750.

(责任编辑: 孙艺红)