

需求依赖于价格情境下基于 Copula-CVaR 的报童决策

许民利, 李 展

(中南大学 商学院, 长沙 410083)

摘 要: 探讨价格不确定下, 需求-价格相关性与风险态度对决策行为的影响. 建立随机需求与随机价格相关情境下基于 Copula-CVaR 的报童决策模型, Copula 函数描述相关性, 条件风险价值 (CVaR) 反映风险态度, 证明了模型解的存在性和惟一性. 蒙特卡罗模拟发现, 需求与价格的相关性与风险态度对决策的交互作用使决策行为发生规律性变化, 决策者对价格波动有一定容忍度, 需求与价格相关性趋于不相关与完全负相关时市场趋于同质性.

关键词: Copula 函数; 条件风险价值; 风险态度; 随机需求与随机价格相关; 蒙特卡罗模拟

中图分类号: F224; F274

文献标志码: A

News vendor decision based on Copula-CVaR with price-dependent demand

XU Min-li, LI Zhan

(School of Business, Central South University, Changsha 410083, China. Correspondent: XU Min-li, E-mail: 13487316039@163.com)

Abstract: In order to discuss how the price-dependent demand and the risk attitude impact the decision behavior under price uncertainty, a news vendor decision model based on Copula functions and conditional value-at-risk (CVaR) with the stochastic-price-dependent demand is founded. The correlation is described by the Copula functions and the risk attitude is measured by CVaR. The solution to the model is verified to be existent and exclusive. By Monte Carlo simulation, it is found that the mutual effect between the price-dependent demand and the risk attitude induces the decision behavior to change regularly. The decision maker can tolerate the fluctuation of price partially, and the market tends to be homogenous when the correlation between price and demand closes to no correlation or perfect negative correlation.

Key words: Copula function; conditional value-at-risk; risk attitude; stochastic-price-dependent demand; Monte Carlo simulation

0 引 言

报童模型是供应链研究中的基础模型之一, 并衍生出众多基于报童问题的模型和理论, Qin 等^[1]对此作了详细探讨. 学者们在进行报童研究时, 越来越倾向于将价格由外生变量转为内生变量, 以此反映需求与价格之间的关系. Jamernegg 等^[2]同时建立了需求独立于价格和需求依赖于价格的报童模型, 并且在基于服务约束和损失约束下探讨了两种模型解的存在性. Tang 等^[3]研究了产出不确定情况下的动态定价策略, 通过后期定价影响需求, 从而降低产出不确定风险. Ferrer 等^[4]考虑了决策者风险规避和需求估计不确定性对决策行为的影响, 建立了确定性鲁棒价格模

型. Arcelus 等^[5]研究了不同目标函数下, 不同风险态度的需求依赖于价格的报童决策. 这些研究往往通过线性、加法原则或乘法原则等反映需求与价格的关系, 大多假定价格为决策变量, 通过价格制定影响需求变化. 但在现实中, 竞争的存在使决策者往往是价格接受者, 竞争市场的价格多由市场决定, 而且价格是随机波动变化的.

Yao 等^[6]讨论了报童模型在没有特定分布函数而是基于随机需求依赖价格时如何获得最优的定价和库存联合策略. Tapiero 等^[7]考虑了竞争市场下价格随机的风险规避者的订单决策, 假定价格是完全竞争市场下的结果, 但是, 完全竞争市场是一种理想状态,

收稿日期: 2013-04-23; 修回日期: 2013-09-28.

基金项目: 教育部人文社科基金项目(09YJC630230); 湖南省自然科学基金项目(10JJ3023); 湖南省软科学重点基金项目(2009ZK2024).

作者简介: 许民利(1969—), 男, 副教授, 博士, 从事供应链管理的研究; 李展(1986—), 男, 硕士生, 从事供应链风险管理的研究.

实际很难实现.

由于决策者风险偏好的不同,越来越多的学者开始研究风险态度对决策行为的影响,采用均值方差、条件风险价值(CVaR)、下行风险等作为风险度量工具,其中Chen等^[8]将金融领域中的CVaR引进报童模型,研究了需求依赖于价格时风险规避者的决策行为.由于CVaR具有次可加性、易求解等特性,该方法已广泛应用于报童领域.柳键等^[9]将一级CVaR报童模型扩展到二级报童模型.Zhou等^[10]将CVaR理论运用到多产品报童模型中,并考虑了现实约束对报童决策的影响.这些研究很少涉及价格与需求的关系,也未考虑竞争市场价格的随机性.

由上可见,目前报童问题研究的不足包括:1)描述需求与价格相关形式的手段单一,现实世界中需求与价格相关形式较丰富,当前对相关性的描述方法局限性大;2)对竞争市场中需求依赖于价格的报童研究较少,很少涉及随机波动价格与随机需求的相关性,而这在竞争市场中较为常见.制约上述研究的一个主要原因是,构建具有相关性的随机需求与随机价格决策模型时需要需求和价格的联合分布函数,实际中,这种联合分布函数难以获得,模型缺乏适用性.

从目前查找到的有限文献来看,很少有学者将Copula函数运用到报童领域,而CVaR与Copula的结合在供应链领域内的研究也极为罕见,只发现Aydin等^[11]成功地将Copula函数运用到库存管理的研究,体现出Copula函数在报童领域的可行性.Copula函数在金融领域运用较多^[12].

为了解决以上问题,本文引进Copula函数^[13],通过Copula函数间接获得联合分布函数,并借鉴金融中Copula-CVaR模型建立价格不确定情境下,随机需求与随机价格具有相关性的报童决策模型.通过CVaR度量风险态度,利用Copula函数反映随机需求与随机价格的不同形式相关关系.

1 Copula-CVaR原理

Copula函数和CVaR是金融风险度量中常用的两种工具,而且它们之间具有一种天然的依赖性,所以,近年来Copula-CVaR在金融领域的研究比较热门,而且具有较强的通用性,但是在供应链领域还未展开研究.

1.1 Copula函数基本理论

Copula函数又称连接函数,其主要作用是连接联合分布函数与它们各自的边缘分布函数,反应它们之间的数量关系和相关性.Copula函数主要应用于多随机变量研究,根据Nelson^[14]的思想, n 元Copula函数 $C(\cdot, \cdot, \dots, \cdot)$ 可以定义为: $C(\cdot, \cdot, \dots, \cdot)$ 是定义域

为 $[0,1]$ 的有零基面的 n 维递增函数,设 $C(\cdot, \cdot, \dots, \cdot)$ 第 i 个随机变量的边缘分布为 $C_i(x_i)$,则 $C_i(x_i)$ 满足

$$C_i(x_i) = C(1, 1, \dots, 1, x_i, 1, \dots, 1) = x_i,$$

其中 $x_i \in [0, 1], i = 1, 2, \dots, n$.根据Sklar定理^[15],如果 $F(\cdot, \cdot, \dots, \cdot)$ 是具有边缘分布为 $F_1(\cdot), F_2(\cdot), \dots, F_n(\cdot)$ 的联合分布函数,且各边缘分布函数连续,则存在惟一Copula函数 $C(\cdot, \cdot, \dots, \cdot)$ 满足

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)).$$

由上可知,只要知道各变量的边缘分布和相应的Copula函数,且各边缘分布函数连续,则可以确定随机变量的联合分布函数.边缘分布函数比较容易获得,Copula函数种类丰富,也容易获得,所以,通过Copula函数容易得出多随机变量的联合分布函数,这是本文引入Copula函数的原因.

1.2 CVaR的基本理论

在金融领域,CVaR是一种优良的风险度量工具.如果将收益作为测量对象,则CVaR是低于VaR部分的收益期望值,表达式为

$$\text{CVaR}_\beta(\Pi(l, x)) = E(\Pi(l, x) | \Pi(l, x) \leq \text{VaR}_\beta(\Pi(l, x))), \quad (1)$$

$$G(\alpha, l) = \alpha + \frac{1}{1-\beta} E\left(\prod(l, x) - \alpha\right)^-. \quad (2)$$

其中: β 为置信水平, $\beta \in [0, 1]$; $\Pi(i, x)$ 为收益函数, i 为决策变量, x 为随机变量; $t^- = \min\{t, 0\}$.

由于式(1)计算复杂,Rockafellar等^[16]发现,对于式(2),当 $G(\alpha, x)$ 关于 α 是连续的凹函数时,CVaR可以转化为

$$\text{CVaR}_\beta(l) = \max_{\alpha \in R} G(\alpha, l). \quad (3)$$

$G(\alpha, x)$ 关于 α 是连续的凹函数可以保证式(3)存在关于 α 的最优解.

2 Copula-CVaR模型

竞争市场下的报童模型与传统报童模型的不同主要表现为未来市场价格不确定,报童主体是价格接受者,市场需求与市场价格负相关.决策主体一般不考虑产品供应、关注未来价格与需求,针对这种情形,建立相应的报童决策模型.

2.1 模型建立

模型基本假设如下:

- 1) 单产品、单周期报童问题,只发生一次订货,单件订货成本为 w ,订货量为 q ;
- 2) 决策者订货前可以预测未来市场需求分布;
- 3) 决策者是价格接受者,价格是随机变量,订货决策后价格才能实现,决策者决策前能够预测未来市

场价格分布函数;

4) 未来需求与价格存在负相关关系, 且需求与价格同时实现;

5) 没有缺货损失, 期末未销售的商品单件残值为 s , 售价大于 s , 否则, 决策者不会出售商品。

设实际市场价格为 p , 实际需求为 d , $H(x, y)$ 为价格与需求的联合分布函数, x 为价格, y 为需求, $h(x, y)$ 为联合概率密度; $H_1(x)$ 为价格的边缘分布函数, $H_2(y)$ 为需求的边缘分布函数, 相应概率密度分别为 $h_1(x), h_2(y)$; $\Pi(q, x, y)$ 为决策主体的收益函数, q 为决策变量, x, y 为随机变量。

报童模型的 CVaR 值可以通过式 (1) 计算, 但是该方法在计算上可行性较低。本文借鉴 Rockafellar 的方法, 给出间接辅助函数的方法。

定理 1 如果随机需求与随机价格的联合概率密度为连续函数, 则报童模型的 CVaR 值可以通过以下函数间接得出:

$$\text{CVaR}_\beta(\alpha, q) = \max_{\alpha \in \mathbb{R}} \left\{ \alpha + \frac{1}{1-\beta} E(\pi(q, x, y) - \alpha)^- \right\}. \quad (4)$$

证明 模型的收益函数为

$$\Pi = (p-w)q - (p-s)(q-d)^+.$$

由式 (2) 得到 G 的表达式为

$$\begin{aligned} G(\alpha, q) = & \alpha + \frac{1}{1-\beta} \int_s^q \int_0^\infty ((s-w)q + (x-s)y - \alpha)^- \times \\ & h(x, y) dx dy + \\ & \frac{1}{1-\beta} \int_s^\infty \int_q^\infty (xq - wq - \alpha)^- h(x, y) dx dy. \end{aligned} \quad (5)$$

令

$$\begin{aligned} g_1(\alpha) = & \int_s^\infty \int_0^q ((s-w)q + (x-s)y - \alpha)^- h(x, y) dx dy, \\ g_2(\alpha) = & \int_s^\infty \int_q^\infty (xq - wq - \alpha)^- h(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

$g_1(\alpha)$ 和 $g_2(\alpha)$ 的属性如下:

1) 当 $(s-w)q + (x-s)y - \alpha < 0$ 时, 有

$$\begin{aligned} g_1(\alpha) = & \int_0^q dy \int_s^{\frac{\alpha - (s-w)q + s}{y}} ((s-w)q + \\ & (x-s)y - \alpha) h(x, y) dx. \end{aligned} \quad (6)$$

要使式 (6) 成立, 必须有

$$\frac{\alpha - (s-w)q}{y} + s > s,$$

又因为 $y > 0$, 必须有 $\alpha > sq - wq$, 否则 $g_1(\alpha) = 0$ 。

2) 当 $xq - wq - \alpha < 0$ 时, 有

$$g_2(\alpha) = \int_s^{\alpha + wq} dx \int_q^\infty ((x-w)q - \alpha) h(x, y) dy. \quad (7)$$

要使式 (7) 成立, 必须有 $(wq + \alpha)/q > s$, 即 $\alpha > sq - wq$, 否则, $g_2(\alpha) = 0$ 。

综上所述: 1) 当 $\alpha > sq - wq$ 时, G 函数可以表示为

$$\begin{aligned} G(\alpha, q) = & \alpha + \frac{1}{1-\beta} \int_0^q dy \int_s^{\frac{\alpha - (s-w)q + s}{y}} ((s-w)q + \\ & (x-s)y - \alpha) h(x, y) dx + \\ & \frac{1}{1-\beta} \int_s^{\frac{\alpha + wq}{q}} dx \int_q^\infty (xq - wq - \alpha) h(x, y) dy. \end{aligned}$$

根据杨士林等^[17]关于二重积分定义的函数求导法则可以得出

$$\begin{aligned} \frac{dG(\alpha, q)}{d\alpha} = & 1 - \frac{1}{1-\beta} \left(\int_0^q dy \int_s^{\frac{\alpha - (s-w)q + s}{y}} h(x, y) dx + \right. \\ & \left. \int_s^{\frac{\alpha + wq}{q}} dx \int_q^\infty h(x, y) dy \right) = \\ & 1 - \frac{1}{1-\beta} H_1\left(\frac{\alpha + wq}{q}\right). \end{aligned}$$

$H_1((\alpha + wq)/q)$ 在 α 上单调递增, 当 α 趋于无穷时, $H_1((\alpha + wq)/q)$ 趋于 1, 当 α 从左侧趋向 $sq - wq$ 时, $H_1((\alpha + wq)/q)$ 趋于 0。即当 α 左侧趋近 $sq - wq$ 时, $dG(\alpha, q)/d\alpha$ 趋近 1, 随着 α 增大, $dG(\alpha, q)/d\alpha$ 单调递减, 当 α 趋于无穷时, $dG(\alpha, q)/d\alpha$ 趋于 $1 - \frac{1}{1-\beta} < 0$ 。

2) 当 $\alpha < sq - wq$ 时, G 函数可以表示为

$$G(\alpha, q) = \alpha, \quad \frac{dG(\alpha, q)}{d\alpha} = 1 > 0.$$

因此, 可以绘出 $G(\alpha, q)$ 关于 α 的变化曲线如图 1 所示。

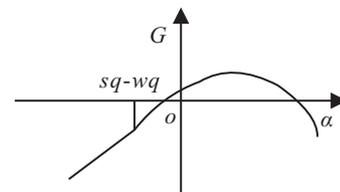


图 1 关于 α 的 G 函数曲线

由以上推导过程和图 1 可见, $G(\alpha, q)$ 关于 α 有且仅有一个最优解使 $G(\alpha)$ 达到最大化。□

由定理 1 的证明过程和图 1 可知, 只有当 $\alpha > sq - wq$ 时, $G(\alpha)$ 达到最大化, 此时最优解满足

$$\frac{dG(\alpha, q)}{d\alpha} = 1 - \frac{1}{1-\beta} H_1\left(\frac{\alpha + wq}{q}\right) = 0,$$

解得 $\alpha = qH_1^{-1}(1-\beta) - wq$, 进一步得到推论 1。

推论 1 如果随机需求与随机价格的联合概率密度函数为连续函数, 则对于给定 q , 一定存在唯一的 $\alpha^* = qH_1^{-1}(1-\beta) - wq$ 使得 $G(\alpha, q)$ 达到最大。

下面引进 Copula 函数探讨 Copula-CVaR 的求解与应用. 设 $C(\cdot, \dots, \cdot)$ 为相应的 Copula 函数, 由 Copula 相关理论可知 $H(x, y) = C(H_1(x), H_2(y))$. 如果

$$c(\mu_1, \mu_2) = \delta C(\mu_1, \mu_2) / \delta \mu_1 \delta \mu_2,$$

则有

$$h(x, y) = c(H_1(x), H_2(y))h_1(x)h_2(y). \quad (8)$$

由式 (8) 可见, 只要知道需求与价格的 Copula 函数及各自的边缘分布函数即可得出需求与价格的联合分布函数和联合概率密度. 根据产品的收益函数和联合概率密度可以利用式 (4) 求出 CVaR.

通过式 (8), 可以利用 Copula 函数将传统 CVaR 表达式转换为 Copula-CVaR 模型, 将式 (8) 代入 (4), 可得到 Copula-CVaR 如下:

$$\begin{aligned} \text{CopulaCVaR}_\beta = & \max_{\alpha \in \mathbb{R}} \left\{ \alpha + \frac{1}{1-\beta} \int_0^\infty \int_0^\infty ((x-w)q - \right. \\ & (x-s)(q-y)^+ - \alpha)^- c(H_1(x), H_2(y)) \times \\ & \left. h_1(x)h_2(y) dx dy \right\}. \end{aligned} \quad (9)$$

根据推论 1, 将 α^* 代入式 (9) 可以得到 Copula-CVaR 决策模型为

$$\begin{aligned} \text{M1 : } \max \text{ CopulaCVaR}_\beta(q) = & \max_{q \geq 0} \left\{ qH_1^{-1}(1-\beta) + \right. \\ & \frac{1}{1-\beta} \int_0^q dy \int_s^{\frac{qH_1^{-1}(1-\beta)-sq}{y}+s} (sq - \\ & qH_1^{-1}(1-\beta) + (x-s)y) \times \\ & c(H_1(x), H_2(y))h_1(x)h_2(y) dx + \\ & \left. \frac{q}{1-\beta} \int_s^{H_1^{-1}(1-\beta)} dx \int_q^\infty (x - H_1^{-1}(1-\beta)) \times \right. \\ & \left. c(H_1(x), H_2(y))h_1(x)h_2(y) dy - wq \right\}. \end{aligned}$$

M1 即为利用 Copula 和 CVaR 建立的报童决策模型, 上述模型是关于订单量 q 的函数.

定理 2 如果 Copula 函数、需求和价格边缘分布函数均为连续函数, 则模型 M1 一定存在最优解, 有且仅有一个最优解, 最优解满足一阶条件.

证明 根据杨士林等^[17]的二重积分定义函数求导法则对 M1 进行一阶求导, 得

$$\begin{aligned} \frac{d \text{ CopulaCVaR}_\beta(q)}{dq} = & H_1^{-1}(1-\beta) - w + \\ & \frac{1}{1-\beta} \left(\int_0^q dy \int_s^{\frac{qH_1^{-1}(1-\beta)-sq}{y}+s} (s - \right. \\ & \left. H_1^{-1}(1-\beta)) c(H_1(x), H_2(y)) h_1(x) h_2(y) dx + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left. \int_s^{H_1^{-1}(1-\beta)} dx \int_q^\infty (x - H_1^{-1}(1-\beta)) \times \right. \\ & \left. c(H_1(x), H_2(y)) h_1(x) h_2(y) dy \right). \end{aligned}$$

对 M1 进行二阶求导, 可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \text{ CopulaCVaR}_\beta(q)}{\partial q^2} = & \frac{1}{1-\beta} \left(\int_s^{H_1^{-1}(1-\beta)} (s - H_1^{-1}(1-\beta)) \times \right. \\ & c(H_1(x), H_2(q)) h_1(x) h_2(q) dx - \\ & \int_s^{H_1^{-1}(1-\beta)} (x - H_1^{-1}(1-\beta)) \times \\ & c(H_1(x), H_2(q)) h_1(x) h_2(q) dx - \\ & (s - H_1^{-1}(1-\beta))^2 \int_0^q \frac{1}{y} c \left(H_1 \left(\frac{qH_1^{-1}(1-\beta) - sq}{y} + \right. \right. \\ & \left. \left. s \right), H_2(y) \right) h_1 \left(\frac{qH_1^{-1}(1-\beta) - sq}{y} + s \right) h_2(y) dy \right). \end{aligned}$$

由于 $x > s$, 有

$$\begin{aligned} & \int_s^{H_1^{-1}(1-\beta)} (s - H_1^{-1}(1-\beta)) c(H_1(x), H_2(q)) \times \\ & h_1(x) h_2(q) dx - \int_s^{H_1^{-1}(1-\beta)} (x - H_1^{-1}(1- \\ & \beta)) c(H_1(x), H_2(q)) h_1(x) h_2(q) dx < 0, \end{aligned}$$

进而得到

$$\frac{\partial^2 \text{ CopulaCVaR}_\beta(q)}{\partial q^2} < 0.$$

因此, M1 一定存在最优解, 而且有且仅有一个最优解, 最优解满足一阶条件. \square

Copula 函数的种类较多, 不同 Copula 函数可以描述不同的相关形式和相关强度, Roberto^[18]详细介绍了利用假设检验和参数估计选择合适 Copula 函数的方法, 任仙玲等^[19]给出了基于非参数核密度估计的 Copula 函数选择原理, 这些方法具有普遍适用性, 在此不再赘述.

实际运作中, 需求与价格往往不是连续变量, 根据文献 [15], 如果需求与价格为离散变量, 则 CVaR 近似表示为

$$\begin{aligned} \widetilde{\text{CopulaCVaR}}_\beta = & \max_{\alpha \in \mathbb{R}, q \geq 0} \left\{ \alpha + \frac{1}{(1-\beta)m} \sum_{j=1}^m ((p_j - w)q - \right. \\ & \left. (p_j - s)(q - d_j)^+ - \alpha)^- \right\}. \end{aligned} \quad (10)$$

其中: \sim 为近似, m 为数据个数, p_j 为第 j 次观测实际价格, d_j 为第 j 次观测实际需求.

形如 $(a-b)^+$ 的表达式可以采取如下等价处理: 引入辅助变量 y , 令 $y = (a-b)^+$, 增加线性约束

$$\begin{cases} a - b \leq y, \\ y \geq 0. \end{cases} \quad (11)$$

根据上述处理方式, 引入变量 z_j 和 k_j , 令

$$z_j = (q - d_j)^+,$$

$$k_j = ((p_j - w)q - (p_j - s)(q - d_j)^+ - \alpha)^-.$$

具有离散需求与价格的 Copula-CVaR 模型可以近似转化为

$$\begin{aligned} M2 : \max \text{CopulaCVaR}_\beta = \\ \max \left\{ \alpha + \frac{1}{(1-\beta)m} \sum_{j=1}^m k_j \right\}; \\ \text{s.t. } q - d_j \leq z_j, \\ (p_j - w)q - (p_j - s)z_j - \alpha \geq k_j; \\ w \geq 0, z_j \geq 0, q \geq 0, k_j \leq 0, \alpha \in R, \\ j = 1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

实际研究中, 往往通过蒙特卡罗模拟获得 p_j 和 d_j , 这也是 M2 的现实意义. 下一节将详细介绍如何基于 Copula 函数通过蒙特卡罗模拟获得 p_j 和 d_j , 从而进行模型的求解.

2.2 基于 Copula 函数的仿真方法

基于蒙特卡罗模拟求解 M2 前, 需要通过 Copula 函数模拟未来价格 p_j 和需求 d_j , 模拟的方法与过程如下.

Step 1: 在常用 Copula 族中选出较好描述产品需求和价格相关结构的 Copula 模型. 一般先根据经验选取, 然后进行检验, 检验通过即可, 文献 [18-19] 等已给出具体选取方法.

Step 2: 利用各产品需求和价格的历史数据估计 Copula 模型参数, 设 Copula 函数为 $C(\cdot, \dots, \cdot)$.

Step 3: 确定市场需求和价格分布类型, 通过历史数据估计分布参数, 若无法确定分布类型可以采用经验分布. 设 $H_1(\cdot)$ 为估计的市场价格分布函数, $H_2(\cdot)$ 为市场需求分布函数.

Step 4: 生成 2 个服从 (0,1) 均匀分布的独立随机数 t, v .

Step 5: 根据以下递推式生成二元 Copula 随机数 u :

$$u = C_v^{-1}(t),$$

其中 $C_v^{-1}(t)$ 为 $C_v^{-1}(\mu)$ 的逆函数, 且有

$$C_v(u) = \frac{\partial C(u, v)}{\partial v}.$$

Step 6: 模拟 Copula 随机需求和随机价格, 有

$$p = H_1^{-1}(u), d = H_2^{-1}(v).$$

其中: H^{-1} 为 H 的逆函数, p 和 d 为模拟的价格和需求.

重复 Step 4 ~ Step 6 直至产生足够组数的服从相应分布的 Copula 随机需求和随机价格, 这些随机需求和随机价格通过事先估计的 Copula 参数反映它们之间的相关结构.

3 算例分析

为了描述需求与价格的负相关特性, 本文采用二元正态 Copula 函数、阿基米德族的二元 Frank 函数和二元 Plackett Copula 函数模拟未来市场上需求与价格的相关结构. 这 3 种函数可以体现出不同需求与价格相关结构的市场对决策行为产生的不同影响, 突破了以往对单一市场研究的局限. 下面对这 3 种函数和相关性测度进行简单介绍.

1) 二元正态 Copula 函数为

$$\begin{aligned} C(u, v) = \\ \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\theta^2}} \times \\ \exp\left(\frac{2\rho rs - s^2 - r^2}{2(1-\theta^2)}\right) dr ds, \end{aligned} \quad (12)$$

其中 $\phi^{-1}(\cdot)$ 为标准一元正态分布函数 $\phi(\cdot)$ 的逆函数. Copula 参数即为线性相关系数 θ , 二元正态 Copula 函数用线性相关系数测度相关性.

2) 二元 Frank 函数为

$$C(u, v) = \frac{e^{-\theta u}(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1 + (e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}. \quad (13)$$

Copula 参数为 θ , Frank 函数相关性测度采用秩相关系数, 秩相关系数在非线性单调变化下保持不变, 具有良好的统计特性, 比线性相关系数应用范围更广. 秩相关系数为 -1 时表示完全负相关, 为 0 时表示不相关, 为 1 时表示完全正相关. θ 与秩相关系数的关系为

$$\text{秩相关系数} = 1 + 4[D_k(\theta) - 1]/\theta,$$

其中 $D_k(\theta)$ 为德拜函数, k 一般取 1.

3) 二元 Plackett 函数为

$$\begin{aligned} C(u, v) = \\ \frac{(1 + (\theta - 1)(u + v))}{2(\theta - 1)} - \\ \frac{\sqrt{(1 + (\theta - 1)(u + v))^2 - 4uv\theta(\theta - 1)}}{2(\theta - 1)}. \end{aligned} \quad (14)$$

Plackett 函数的相关性测度为交叉乘积比, Copula 参数 θ 即为交叉乘积比, 且 $\theta > 0$. 当 θ 趋近 0 时, 表示趋近于完全负相关, $\theta = 1$ 表示不相关, $\theta > 1$ 表示正相关.

首先, 由上述 3 种 Copula 函数建立 3 个 Copula-CVaR 模型, 模型参数取值如下: 产品的订货成本 $w = 20$, 期末未销售出产品残值 $s = 5$, 未来销售价格 p 服从正态分布 $N(30, 10^2)$, 未来市场需求服从正态分布

$N(1000, 100^2)$. 通过 Matlab 7.0 对模型进行模拟, 每次模拟 6000 次, 获取足够的的数据点后进行曲线拟合.

3.1 风险水平和相关性对决策行为的影响

图 2~图 4 为不同 Copula 函数、不同风险水平下相关性 with 最优订单量的关系.

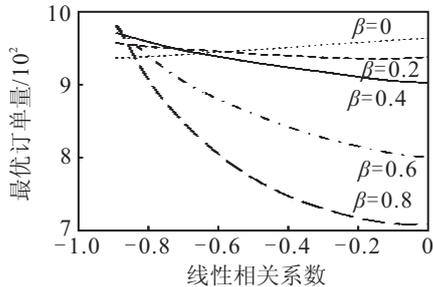


图 2 正态 Copula 函数线性相关系数—最优订单量关系

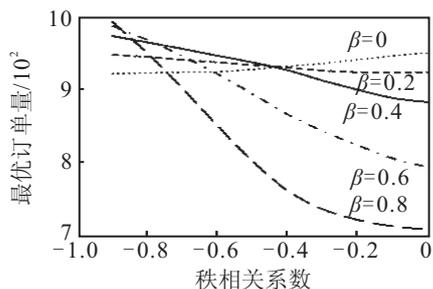


图 3 Frank 函数秩相关系数—最优订单量关系

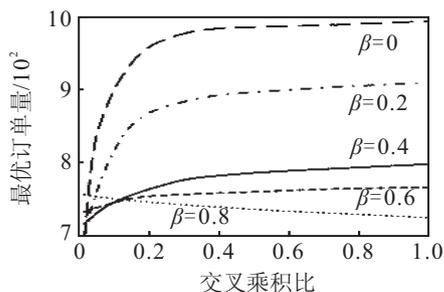


图 4 Plackett 函数交叉乘积比—最优订单量关系

由图 2~图 4 可见, 在不同风险水平下, 相关性 with 最优决策的变化方向不一致. 当风险中性 ($\beta = 0$) 时, 需求与价格的负相关性增强使最优订单量降低; 当决策者为风险规避时, 需求与价格的负相关性增强使最优订单量升高, 风险规避程度越大, 最优订单量随相关性变化而变化的幅度越大. 不同相关性水平下, 风险水平与最优订单量的单调关系并不一致. 当负相关性水平较高时, 风险规避程度与最优订单量不存在明显单调关系; 当负相关性较低时, 风险规避程度越高, 订单量越低, 这种趋势随需求与价格趋近于独立而演变的更加明显. 根据 Chen 等^[8]的研究, 当价格作为外生变量时, 风险规避者的最优订单量要低于风险中性者最优订单量, 当价格作为决策变量、需求依赖于价格时, 在加法原则下, 风险态度与最优订

单量可能不存在某种单调关系, 这表明 Chen 等基于价格与需求完全独立或完全负相关的研究结论反映的是 Copula-CVaR 模型的两种特殊情况. 实际上, 随着相关性的改变, 风险水平与最优订单量的变化趋势将发生变化, 但是, 这种变化趋势的拐点因市场类型变化而变化. 由图中可见, 随着需求与价格负相关性的增强, Frank 函数下, 风险水平与最优订单量的单调性最先发生改变, 然后是正态 Copula 函数, 最后是 Plackett 函数, 这与不同 Copula 函数的不同相关类型有关.

通过上述分析可见, 需求与价格的相关性水平和风险水平的双重效应促使报童主体的决策行为不断发生变化, 这些变化规律反映出不同风险态度决策主体面对不同市场环境下的决策行为. 通过风险水平和相关性水平对决策行为影响的方向可以看出, 需求与价格的负相关性对决策主体行为的影响因风险态度的变化而变化, 风险态度决定了影响的方向和强度, 而这种方向和强度又与需求和价格的相关类型相关, 相关类型由 Copula 函数决定.

3.2 波动性对决策行为的影响

波动性或者不确定性是影响决策行为的一种重要因素. 不同于以往的模型, 本文模型中产品市场的波动性受价格波动性和需求波动性的双重影响, 叠加效应使决策行为变化更大. 为了进行不同 Copula 函数的比较, 在进行波动性分析时均选取风险水平为 0.4、皮尔逊相关系数为 0.5 的样本数据.

图 5 为不同 Copula 函数下价格波动性对最优订单量的影响. 由图 5 可见, 价格标准差在一定范围内订单量较稳定, 当高于一定限值后订单量开始急速下滑, Frank 函数模型下滑程度最大, Plackett 函数模型次之, 正态 Copula 函数模型弱于前两者. 这表明, 在这 3 种产品市场中, 决策者均可以容忍一定程度的价格波动, 但是容忍限度并不一致, Frank 函数和 Plackett 函数市场容忍能力较差, 正态 Copula 函数市场决策相对稳定, 对价格波动性容忍力较强. 3 种市场对价格波动容忍能力均是有一定限度的, 超过此限度后决策主体将大幅度地降低订单量.

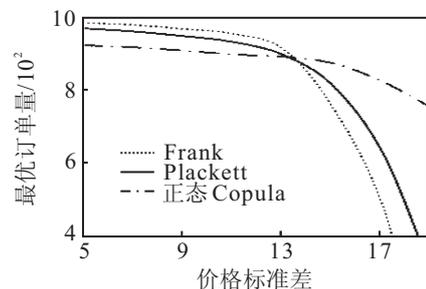


图 5 不同 Copula 函数价格标准差与最优订单量关系

图6为不同 Copula 函数需求标准差与最优订单量的关系. 由图6可见, 与价格标准差不同, 3种市场需求标准差与最优订单量呈一定线性相关, 相同需求标准差下3种市场的最优订单量始终保持一致的差量. 这表明, 需求波动对决策行为的影响力具有一定的稳定性, 同时也验证了不同 Copula 函数模拟的产品市场下决策者的决策行为有一定的差别.

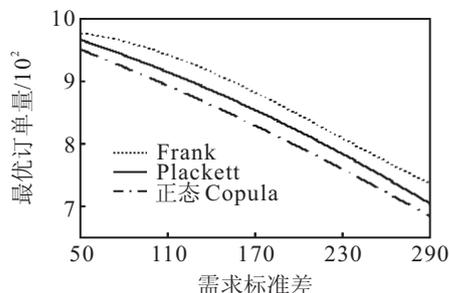


图6 不同 Copula 函数需求标准差与最优订单量关系

以上分别讨论了 Copula 函数、风险态度、相关性和波动性对决策行为的影响. 可以发现, 相关性对决策行为的影响与风险态度有关, 风险态度调节这种影响的方向和强度, 而这种方向和强度又与需求和价格的相关类型相关, 相关类型由 Copula 函数模拟的市场决定, 这些影响规律拓宽了以往基于风险态度和相关性报童研究的范围. 通过波动性的比较静态分析, 发现需求波动、价格波动和 Copula 函数类型对决策行为的不同影响规律, 这些规律为具体决策提供了一定的借鉴意义.

4 结 论

本文将 Copula 函数与 CVaR 结合, 建立了随机需求与随机价格相关的报童决策模型, 证明了模型解的存在性和惟一性, 并给出了模型求解的具体方法. 通过蒙特卡罗模拟分析了不同 Copula 函数、风险态度、相关性水平、需求与价格波动性对报童决策的影响. 主要结论与管理借鉴如下:

1) 随机需求与随机价格的负相关性对决策行为的影响因决策者风险态度的不同而不同, 当决策者为风险中性时, 需求与价格的负相关性增强使最优订单量降低; 当决策者为风险规避时, 需求与价格的负相关性增强使最优订单量升高, 风险规避程度越大, 最优订单量的提高幅度越大.

需求与价格在不同相关性水平下, 风险水平与最优订单量的单调关系并不一致, 当负相关性水平较高时, 风险规避程度与最优订单量不存在明显单调关系, 当负相关性较低时, 风险规避程度越高, 订单量越低, 这种趋势随需求与价格趋近于独立而演变得更加明显.

这表明一个企业的最佳经营策略不仅受风险水平的影响, 还受到需求与价格的相关性的影响, 两者的交互影响不存在某种固定的单调关系. 所以, 当市场环境或者企业自身发生变化时, 企业将面临较高的经营风险, 掌握这种变化规律是企业降低风险的有效方法.

2) 随着需求与价格相关性水平的改变, 风险水平与最优订单量的变化趋势将发生变化, 但是, 这种变化趋势的拐点因市场类型变化而变化. 随着需求与价格负相关性的增强, Frank 函数下, 风险水平和最优订单量的单调性最先发生改变, 然后是正态 Copula 函数, 最后是 Plackett 函数, 这与不同 Copula 函数的不同相关类型有关. 当需求与价格相关性趋于完全负相关或者趋于不相关时, 不同 Copula 函数下具有相同风险水平决策者的决策行为趋于同质性.

企业进行决策时不仅要预测未来的市场需求, 而且要挖掘市场需求与未来价格的相关类型, 这种相关类型不仅是相关程度的度量, 也包括分布状态的探索, 这些探索不仅限于本文给出的3种市场形式. 通过这些信息的挖掘和探索, 企业可以作出更符合自身利益的决策.

3) 即使在价格波动的市场, 决策者仍然可以容忍一定限度的价格波动, 容忍程度因需求与价格相关类型的不同而不同. 决策者对正态 Copula 函数描述的市场类型容忍程度较大, 但是, 当价格波动超过一定限度, 最优订单量将急速下滑, 下滑幅度因市场形式的不同而不同. 相比价格波动, 需求的标准差与最优订单量呈一定线性关系, 在特定市场中, 需求标准差对决策行为的影响力具有稳定性.

波动性一直是制约企业决策的关键因素之一, 企业应该分离出不同性质的波动, 有些波动对绩效有较大影响, 有些则影响较小. 企业可以根据波动影响力制定有针对性策略, 减少策略制定的盲目性. 实际中的波动因素远不止需求与价格, 但是, 利用 Copula-CVaR 模型可以扩展融入更多的随机变量, 这也是此模型的优势之一.

利用 Copula 函数可以模拟不同需求与价格相关形式的产品市场, 且通过 CVaR 可以体现决策主体的风险态度, 这表明 Copula-CVaR 模型不仅能够体现更多的现实因素, 而且能够描绘更细致的不同产品市场, 这在供应链领域具有很强的应用性. 虽然 CVaR 在供应链中研究较多, 但是 Copula 与 CVaR 的结合是一种创新, 这种模型对多随机变量研究具有一定的意义, 本文希望通过此模型的引入能为后续研究提供一定的借鉴. 但是研究仍然有一些不足, 如没有考虑需求

与价格分布的变化,没有研究边际贡献对决策的影响,缺乏对一些结论的深层次解释等,后续学者也可以围绕这些方面展开更深入的研究.

参考文献(References)

- [1] Qin Y, Wang R, Vakharia A J, et al. The newsvendor problem: Review and directions for future research[J]. *European J of Operational Research*, 2011, 213(2): 361-374.
- [2] Jamernegg W, Kischka P. The price setting newsvendor with service and loss constraints[J]. *Omega-management Science and Environmental Issues*, 2013, 41(2): 326-335.
- [3] Tang Ou, Nurmaya Musa S, Li Juan. Dynamic pricing in the newsvendor problem with yield risks[J]. *Int J of Production Economics*, 2012, 139(1): 127-134.
- [4] Ferrer J, Oyarzun D, Vera J. Risk averse retail pricing with robust demand forecasting[J]. *Int J of Production Economics*, 2012, 136(1): 151-160.
- [5] Arcelus F J, Kumar S, Srinivasan G. Risk tolerance and a retailer's pricing and ordering policies within a newsvendor framework[J]. *Omega-international J of Management Science*, 2012, 40(2): 188-198.
- [6] Yao L, Chen Y F, Yan H. The newsvendor problem with pricing: Extensions[J]. *Int J of Management Science and Engineering Management*, 2006, 1(1): 3-16.
- [7] Charles S Tapiero, Konstantin Kogan. Risk-averse order policies with random prices in complete market and retailers' private information[J]. *European J of Operational Research*, 2009, 196(2): 594-599.
- [8] Chen X, Sim M, Simchi-Lev D, et al. Risk aversion in inventory management[J]. *Operations Research*, 2007, 55(5): 828-842.
- [9] 柳键, 罗春林. 利润-CVaR 准则下的二级供应链定价与订货策略研究[J]. *控制与决策*, 2010, 25(1): 130-136.
(Liu J, Luo C L. Price and ordering strategies in a two-echelon supply chain under Criterion of profit-CVaR[J]. *Control and decision*, 2010, 25(1): 130-136.)
- [10] Zhou Y J, Chen X H, Wang Z R. Optimal ordering quantities for multi-products with stochastic demand: Return-CVaR model[J]. *Int J of Production Economics*, 2008, 112(2): 782-795.
- [11] Aydin Burcu, Guler Kemal, Kayis Enis. A Copula approach to inventory pooling problems with newsvendor products[C]. *Handbook of newsvendor applications*. New York: Springer, 2012: 81-101.
- [12] He X B, Gong P. Measuring the coupled risks: A copula-based CVaR model[J]. *J of Computational and Applied Mathematics*, 2009, 223(2): 1066-1080.
- [13] Bai M, Sun L J. Application of copula and copula-CVaR in the multivariate portfolio optimization[M]. Berlin: Springer, 2007: 231-242.
- [14] Nelson R B. An introduction to copulas[M]. New York: Springer, 2006: 18-22.
- [15] Sklar A. Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges[J]. *Publication Institute Statistical University Paris*, 1959, 8(2): 229-231.
- [16] Rockafellar R T, Uryasev S. Optimization of conditional value-at-risk[J]. *J of Risk*, 2000, 2(3): 21-41.
- [17] 杨士林, 彭良雪. 二重积分定义的函数求导[J]. *高等数学研究*, 2006, 9(2): 40-41.
(Yang S L, Peng L X. The derivative of functions with double integral definition[J]. *Studies in College Mathematics*, 2006, 9(2): 40-41.)
- [18] Roberto de Matteis. Fitting copulas to data[D]. Zurich: Institute of Mathematics of University of Zurich, 2001.
- [19] 任仙玲, 张世英. 基于非参数核密度估计的 Copula 函数选择原理[J]. *系统工程学报*, 2010, 25(1): 36-42.
(Ren X L, Zhang S Y. Copula function selection criterion based on nonparametric kernel density estimation[J]. *J of System Engineering*, 2010, 25(1): 36-42.)

(责任编辑: 郑晓蕾)