

范数有界型参数不确定性系统的概率鲁棒 H_∞ 控制方法

谢 蓉, 王新民, 巩建英

(西北工业大学 自动化学院, 西安 710072)

摘 要: 利用确定性鲁棒控制方法对参数摄动的最坏情况进行研究, 设计出的控制器具有较大的保守性和较高的控制成本. 针对这一问题, 建立范数有界型参数不确定性系统模型, 分析系统性能的置信概率与参数不确定性随机向量的范数边界之间的关系, 提出一种基于概率估计的鲁棒 H_∞ 控制方法, 该方法能以有限的迭代步数给出一个与系统性能置信概率相关的鲁棒 H_∞ 控制器的可行解. 最后通过仿真实例验证了所提出方法的有效性.

关键词: 范数有界; 参数不确定性; 置信概率; H_∞ 控制; 概率鲁棒性

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Probabilistic robust H_∞ control method of norm-bounded parameter uncertainty system

XIE Rong, WANG Xin-min, GONG Jian-ying

(School of Automation, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China. Correspondent: XIE Rong, E-mail: xierong@nwpu.edu.cn)

Abstract: The deterministic robust control method is used to analyze the worst case of parameter perturbation, which leads to overly conservativeness and high control effort of the designed controller. By considering these problems, the model of norm-bounded parameter uncertainty system is established; the relationship between the confidence probability of system performance and the norm-bound of parameter uncertainty random vector is analyzed; the robust H_∞ control method based on probability estimation is proposed, which can provide a feasible solution of robust H_∞ controller with related confidence probability of system performance in a finite number of steps. Finally, the simulation example validates the effectiveness of the proposed method.

Key words: norm-bounded; parameter uncertainties; confidence probability; H_∞ control; probabilistic robustness

0 引 言

鲁棒控制方法可以分为两类: 一类是确定性鲁棒控制方法, 另一类是概率鲁棒控制方法. 确定性鲁棒控制方法主要研究参数摄动的最坏情况, 计算对应于最坏情况的系统性能指标上界, 设计出的控制器能够保证广义反馈系统内部稳定, 具有较强的鲁棒性, 但也具有较大的保守性和较高的控制成本, 并且无法判断超出性能指标上界后系统的鲁棒稳定性. 国内外学者对确定性鲁棒控制方法进行了深入的研究, 求解该鲁棒控制问题的技术也比较成熟. Zhou 等^[1]提出了 Riccati 解法, 简化了求解确定性鲁棒控制问题的复杂度. Gahinet 等^[2]提出了线性矩阵不等式 (LMI) 解法, 开发出基于 Matlab 的 LMI 工具箱, 极大地方便了确定性鲁棒控制器的计算. 概率鲁棒控制方法^[3-6]首先假设系统中存在的参数不确定性具有概率特性, 并

将其转换为独立同分布的随机变量; 然后使用随机算法分析系统性能或设计控制器; 最后从概率置信水平的角度阐明所设计控制器的可用性. 区别于确定性鲁棒控制方法, 应用概率鲁棒控制方法进行设计, 不需要在整个参数不确定性集合上保证广义反馈系统的稳定性, 而是在随机性和鲁棒性之间取得平衡, 给出一个基于概率估计的结论, 这样能够在很大程度上减小控制器设计的保守性. 近年来, 概率鲁棒控制方法得到了广泛的研究和应用. 文献 [3] 应用随机化策略研究了最优化问题的概率可行解, 并给出了所需采集样本数与概率设置精度之间的关系. 文献 [4] 给出了基于不确定性随机化和凸优化理论的概率鲁棒控制器设计方法. 文献 [5] 研究了线性参数变化系统控制的概率设计方法. 文献 [6-7] 介绍了基于 Matlab 开发的 RACT 工具箱及其指令语句, 为定义结构化不确

收稿日期: 2013-04-29; 修回日期: 2013-07-20.

作者简介: 谢蓉(1982-), 女, 讲师, 博士, 从事鲁棒控制、飞行控制等研究; 王新民(1951-), 男, 教授, 博士生导师, 从事系统过程控制、飞行控制等研究.

定性和从概率观点分析鲁棒性问题提供了便捷的途径. 文献 [8-10] 应用随机化策略中的蒙特卡洛算法设计了飞机的控制器. 文献 [11] 给出了先进驾驶员辅助系统的概率设计方法. 文献 [12] 研究了受控离散混合系统的概率可达性.

本文针对参数不确定性系统的概率鲁棒 H_∞ 控制问题, 建立了范数有界型系统模型, 并分析了系统性能的置信概率与参数不确定性随机变量的范数边界之间的关系. 定义了控制器的鲁棒性置信概率与鲁棒性边界概率, 提出了一种基于概率估计的鲁棒 H_∞ 控制器设计方法. 最后通过仿真实例验证了所提出方法的有效性.

1 预备知识和问题描述

考虑如下参数不确定性系统:

$$\begin{cases} \dot{x} = A(q)x + B(q)u, \\ y = C(q)x + D(q)u. \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x \in \mathbf{R}^n$ 为状态变量; $u \in \mathbf{R}^p$ 为输入变量; $y \in \mathbf{R}^q$ 为输出变量; $A(q), B(q), C(q), D(q)$ 为含有参数不确定性 $q \in \mathbf{R}^m$ 的系数矩阵.

将 $A(q), B(q), C(q), D(q)$ 表示为如下形式:

$$\begin{cases} A(q) = A + E_A \Delta_A F_A, \\ B(q) = B + E_B \Delta_B F_B, \\ C(q) = C + E_C \Delta_C F_C, \\ D(q) = D + E_D \Delta_D F_D. \end{cases} \quad (2)$$

其中: $\Delta_A, \Delta_B, \Delta_C, \Delta_D$ 为不确定参数矩阵, 且满足 $\|\Delta_A\|_2 \leq 1, \|\Delta_B\|_2 \leq 1, \|\Delta_C\|_2 \leq 1, \|\Delta_D\|_2 \leq 1$; E_A, E_B, E_C, E_D 和 F_A, F_B, F_C, F_D 分别为具有适当维数的加权矩阵. 令分块对角矩阵 $\Delta = \text{diag}(\Delta_A, \Delta_B, \Delta_C, \Delta_D)$, $\|\Delta\|_2 \leq 1$. 则系统 (1) 可以变换为

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + B_1(\Delta C_1 x + \Delta D_{12} u), \\ y = Cx + Du + D_{21}(\Delta C_1 x + \Delta D_{12} u). \end{cases} \quad (3)$$

令 $z = C_1 x + D_{12} u$, $w = \Delta z$, 可得到如下具有标准形式的范数有界型参数不确定性系统模型:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u, \\ z = C_1 x + D_{12} u, \\ y = C_2 x + D_{21} w + D_{22} u, \\ w = \Delta z, \|\Delta\|_2 \leq 1. \end{cases} \quad (4)$$

在式 (3) 和 (4) 中, 有

$$\begin{aligned} B_1 &= [E_A \ E_B \ 0 \ 0], \quad C_1 = [F_A \ 0 \ F_C \ 0]^T, \\ D_{21} &= [0 \ 0 \ E_C \ E_D], \quad D_{12} = [0 \ F_B \ 0 \ F_D]^T, \\ B_2 &= B, \quad C_2 = C. \end{aligned}$$

对不确定参数 $q_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 作标准化处理

$$q_i = c_i + w_i \delta_i, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (5)$$

其中: c_i 为 q_i 的标称点; w_i 为 q_i 摄动的最大模值, 即 $w_i = \max(|q_{i \min}|, |q_{i \max}|)$; δ_i 为标准化后的参数不确定性随机变量 (简称随机变量), 满足 $|\delta_i| \leq 1$.

根据式 (5), 将 $q = [q_1, q_2, \dots, q_m] \in \mathbf{R}^m$ 描述为

$$q = c + w \circ X. \quad (6)$$

其中: $c = [c_1, c_2, \dots, c_m] \in \mathbf{R}^m$ 为标称点向量; $w = [w_1, w_2, \dots, w_m] \in \mathbf{R}^m$ 为最大模值向量, 即加权向量; $X = [\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m] \in \mathbf{R}^m$ 为标准化后的参数不确定性随机向量 (简称随机向量), 且满足 $\|X\|_\infty \leq 1$.

注 1 对角矩阵 Δ 中可能含有重复的随机变量 δ_i , 为了简化推导, 下文针对随机向量 X 进行分析和设计. X 包含了 Δ 中所有的随机变量 δ_i , 各个随机变量之间相互独立, 且 $\|X\|_\infty = \|\Delta\|_\infty$.

当 $\sup \|X\|_\infty = 1$ 时, 对应着参数摄动的最坏情况, 此时设计的控制器具有较大的保守性和较高的控制成本. 本文通过缩小随机向量 X 的范数边界 $\sup \|X\|_\infty$ 设计出保守性较小的控制器, 再使用随机算法 (RA) 估计所设计控制器的鲁棒置信概率.

设 $r = \sup \|X\|_\infty (0 < r < 1)$ 为随机向量 X 的范数边界, 集合 $D = \{X : \|X\|_\infty \leq 1\}$, 集合 $B_r = \{X : \|X\|_\infty \leq r, 0 < r < 1\}$, 集合 $B_r^c = D - B_r$. 当随机向量 $X \in B_r \subset D$ 时, 对应的系统模型 (4) 中的 Δ 为

$$w = \Delta z, \|\Delta\|_2 \leq r, 0 < r < 1. \quad (7)$$

设对角矩阵为 $\Xi, \|\Xi\|_2 \leq 1$, 且 Δ 与 Ξ 的关系为

$$\Delta = r\Xi, 0 < r < 1. \quad (8)$$

将式 (8) 代入 (3) 中, 可得

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + rB_1(\Xi C_1 x + \Xi D_{12} u), \\ y = Cx + Du + rD_{21}(\Xi C_1 x + \Xi D_{12} u). \end{cases} \quad (9)$$

令 $z = C_1 x + D_{12} u$, $w = \Xi z$, 可得到标准形式的范数有界型参数不确定性系统模型

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + rB_1 w + B_2 u, \\ z = C_1 x + D_{12} u, \\ y = C_2 x + rD_{21} w + D_{22} u, \\ w = \Xi z, \|\Xi\|_2 \leq 1. \end{cases} \quad (10)$$

本文关于概率鲁棒 H_∞ 控制方法的研究均针对系统模型 (10) 展开.

2 主要结论

定理 1 设 $G(s)$ 满足 (A, B_2) 可稳定, (C_2, A) 可检测, 当 $X \in B_r \subset D$ 时, 存在控制器 K_r 使得系统 (10) 内部稳定并满足 $\|T_{zw}\|_\infty < 1$ 的充要条件是, 以下 LMIs 有正定解 R, S :

$$N_R^T \begin{bmatrix} AR + RA^T & RC_1^T & rB_1 \\ C_1 R & -\gamma I & 0 \\ rB_1^T & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} N_R < 0, \quad (11)$$

$$N_S^T \begin{bmatrix} SA + A^T S & rSB_1 & C_1^T \\ rB_1^T S & -\gamma I & 0 \\ C_1 & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} N_S < 0, \quad (12)$$

$$\begin{bmatrix} R & I \\ I & S \end{bmatrix} \geq 0, \text{rank} \begin{bmatrix} R & I \\ I & S \end{bmatrix} \leq n + n_K. \quad (13)$$

其中: $N_R = [B_2^T \ D_{12}^T \ 0]_\perp$, $N_S = [C_2 \ rD_{21} \ 0]_\perp$, n 和 n_K 分别为 $G(s)$ 和 $K(s)$ 的阶次.

证明 设范数有界型参数不确定性系统(11)的动态输出反馈控制器为

$$K_r \begin{cases} \dot{x}_{K_r} = A_{K_r} x_{K_r} + B_{K_r} y, \\ u = C_{K_r} x_{K_r} + D_{K_r} y. \end{cases} \quad (14)$$

LFT 联结时, $F_l(G_r, K_r)$ 的状态空间实现为

$$\left[\begin{array}{c|c} A_c & B_c \\ \hline C_c & D_c \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} A + B_2 D_K C_2 & B_2 C_K & rB_1 + rB_2 D_K D_{21} \\ B_K C_2 & A_K & rB_1 + rB_K D_{21} \\ \hline C_1 + D_{12} D_K C_2 & D_{12} C_K & rD_{12} D_K D_{21} \end{array} \right]. \quad (15)$$

考察闭环系统系数矩阵 A_C, B_C, C_C, D_C 与控制器系数矩阵 \mathcal{K} 之间的关系, 有

$$\left[\begin{array}{c|c} A_C & B_C \\ \hline C_C & D_C \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \bar{A} & \bar{B}_1 \\ \hline \bar{C}_1 & 0 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c|c} \bar{B}_2 \\ \hline \bar{D}_{12} \end{array} \right] \mathcal{K} \left[\begin{array}{c} \bar{C}_2 \\ \hline \bar{D}_{21} \end{array} \right]^T. \quad (16)$$

其中

$$\mathcal{K} = \begin{bmatrix} D_K & C_K \\ B_K & A_K \end{bmatrix},$$

$$\left[\begin{array}{c|c|c} \bar{A} & \bar{B}_1 & \bar{B}_2 \\ \hline \bar{C}_1 & 0 & \bar{D}_{12} \\ \hline \bar{C}_2 & \bar{D}_{21} & \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} A & 0 & rB_1 & B_2 \ 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ I \\ \hline C_1 & 0 & 0 & D_{12} \ 0 \\ \hline C_2 & 0 & rD_{12} & \\ 0 & I & 0 & \end{array} \right].$$

根据有界实引理, H_∞ 控制问题有解的充要条件是存在满足如下不等式的正定矩阵 P :

$$\begin{bmatrix} A_C^T P + P A_C & P B_C & C_C^T \\ B_C^T P & -\gamma I & D_C^T \\ C_C & D_C & -\gamma I \end{bmatrix} < 0. \quad (17)$$

将式(16)代入(17), 得到

$$E^T \mathcal{K} F + F^T \mathcal{K}^T E + Q < 0, \quad (18)$$

其中

$$\left[\begin{array}{c|c} Q & E^T \\ \hline F & \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} \bar{A}^T P + P \bar{A} & P \bar{B}_1 & \bar{C}_1^T & P \bar{B}_2 \\ \hline \bar{B}_1^T P & -\gamma I & 0 & 0 \\ \hline \bar{C}_1 & 0 & -\gamma I & P \bar{D}_{12} \\ \hline \bar{C}_2 & P \bar{D}_{21} & 0 & \end{array} \right].$$

根据文献[2]中的引理3.1, 存在满足不等式(18)

的矩阵 \mathcal{K} 的充要条件是, 以下两个不等式同时成立:

$$E_\perp^T Q E_\perp < 0, \quad F_\perp^T Q F_\perp < 0. \quad (19)$$

可将 E_\perp 和 F_\perp 表达为

$$E_\perp = \begin{bmatrix} P^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_R \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$F_\perp = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_Y & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

将上述 E_\perp 和 F_\perp 的表达式代入式(19)可求得

$$E_\perp^T Q E_\perp = N_R^T \begin{bmatrix} AR + RA^T & RC_1^T & rB_1 \\ C_1 R & -\gamma I & 0 \\ rB_1^T & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} N_R,$$

$$F_\perp^T Q F_\perp = N_S^T \begin{bmatrix} SA + A^T S & rSB_1 & C_1^T \\ rB_1^T S & -\gamma I & 0 \\ C_1 & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} N_S.$$

结合式(19), 则定理1中的式(11)和(12)成立.

对正定矩阵 P 进行如下分解:

$$P = \begin{bmatrix} S & * \\ * & * \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} R & * \\ * & * \end{bmatrix}, \quad (20)$$

其中 R 和 S 为正定矩阵. 由文献[2], 存在满足上述分解的正定对称阵 $P \in \mathbf{R}^{(n+n_K) \times (n+n_K)}$ 的充要条件是

$$\begin{bmatrix} R & I \\ I & S \end{bmatrix} \geq 0, \text{rank} \begin{bmatrix} R & I \\ I & S \end{bmatrix} \leq n + n_K. \quad (21)$$

综上, 定理1中的式(13)成立. \square

为求解概率鲁棒控制器 K_r , 给出下面几个定义.

定义1(采样次数) 设 $\varepsilon \in (0, 1)$, $\delta \in (0, 1)$, 给定系统的性能指标函数 $J(X)$ 、性能指标上界 γ 和随机向量 X 的概率分布函数 $f(X)$, 则估计 $X \in B_r$ 满足 $J(X) \leq \gamma$ 的概率所需要的样本数为 $p_r N$, 估计 $X \in B_r^c$ 满足 $J(X) \leq \gamma$ 的概率所需要的样本数为 $(1 - p_r)N$. 其中: $p_r = \int_{B_r} f(X) dX$ 和 $p_r^c = 1 - p_r$ 分别为 $X \in B_r$ 和 $X \in B_r^c$ 的概率, $N = \frac{1}{2\varepsilon^2} \ln \frac{2}{\delta}$ 为 Chernoff 边界.

定义2(鲁棒性边界概率)^[6] 设 $\varepsilon \in (0, 1)$, $\delta \in (0, 1)$, 给定系统的性能指标上界 γ , RA 将以大于等于 $(1 - \delta)$ 的概率估计出 $X \in B_r^c$ 满足 $J(X) \leq \gamma$ 的概率, 即控制器 K_r 的鲁棒性边界概率 $p_{B_r}^c$, 有

$$\text{Prob}\{|p_{B_r}^c - p_{B_r, \text{est}}^c| \leq \varepsilon\} \geq 1 - \delta. \quad (22)$$

$p_{B_r}^c$ 的估计值 $p_{B_r, \text{est}}^c$ 由蒙特卡罗算法计算得出

$$p_{B_r, \text{est}}^c = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{I}[J(X^{(i)}) \leq \gamma]. \quad (23)$$

当不等式 $J(X^{(i)}) \leq \gamma$ 成立时, 函数 $\mathbb{I}[\cdot] = 1$; 反之,

$\Pi[\cdot] = 0, \bar{N} = (1 - P_r)N.$

定义3(鲁棒性置信概率) 对于范数有界型系统(10), 控制器 K_r 的鲁棒性置信概率 p_{K_r} 为

$$p_{K_r} = p_r p_{B_r} + (1 - p_r) p_{B_r^c}. \quad (24)$$

其中: p_r 为随机向量 $X \in B_r$ 的概率, $p_{B_r} = 1$ 为 $X \in B_r$ 满足 $J(X) \leq \gamma$ 的概率, $p_{B_r^c}$ 为 $X \in B_r^c$ 满足 $J(X) \leq \gamma$ 的概率.

综上可知, X 的范数边界 r 关系到 K_r 的设计及其鲁棒概率 p_{K_r} 的估计. 给定期望的鲁棒置信概率 p_e , 求解相关控制器 K_r , 应从确定 X 的范数边界 r 入手. 根据定义3, 可将搜索范数边界 r 的目标函数写为

$$\phi(r) = \min(|p_{K_r} - p_e|). \quad (25)$$

基于二分法的设计思路, 求解控制器 K_r 的算法如下.

Step 1: 设置搜索初值 $\varepsilon \in (0, 1), \delta \in (0, 1), k = 1, [a_1, b_1] = [0, 1],$ 令 $r_1 = (a_1 + b_1)/2.$

Step 2: 根据定理1, 求解 H_∞ 鲁棒控制器 $K_{r,k}.$

Step 3: 计算 $p_r.$

Step 4: 计算采样个数 $N,$ 从集合 $B_{r,k}^c$ 中抽取 \bar{N} 个独立样本 $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(\bar{N})},$ 根据式(23)计算控制器 K_r 的鲁棒边界概率 $p_{B_{r,k}^c},$ 再根据式(24)和(25)计算 $\phi(r).$

Step 5: 若 $\phi(r) \leq \varepsilon,$ 则令 $K_r = K_{r,k},$ 算法中止; 否则, 转至 Step 6.

Step 6: 如果 $p_{K_r} < p_e,$ 则令 $a_{k+1} = r_k, b_{k+1} = b_k;$ 否则, 令 $a_{k+1} = a_k, b_{k+1} = r_k. k = k + 1, r_{k+1} = (a_k + b_k)/2,$ 转至 Step 2.

通过算法1可以求得参数 r 的取值及其对应的控制器 $K_r.$

3 仿真示例

飞机侧向运动的状态空间方程为^[13]

$$\begin{cases} \dot{x} = A(q)x + Bu, \\ y = Cx + Du. \end{cases} \quad (26)$$

其中: $x = [\varphi \ p \ \beta \ r]^T$ 为状态量; $u = [\delta_r \ \delta_a]^T$ 为输入量; 且有

$$A(q) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & L_p & L_\beta & L_r \\ 0.086 & 0 & Y_\beta & -1 \\ 0.1 & N_p & 2.601 + 0.1Y_\beta & N_r - 0.1 \end{bmatrix};$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.035 & -2.53 \\ 0 & -3.91 & 0 & -2.53 \end{bmatrix}^T; C = I_4, D = 0;$$

$q = [L_p, L_\beta, L_r, Y_\beta, N_p, N_r]$ 为不确定参数向量, 且 $q = c + w \circ X, c = [-2.93, -4.75, -0.78, -0.11, -0.042, -0.29]$ 为标称向量, 除 w_4 的摄动为标称点的150%

外, 其他变量的摄动都为标称值的15%, $X = [\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_6]$ 为随机向量, $\delta_i (i = 1, 2, \dots, 6)$ 之间相互独立且均服从均匀分布.

将系统(26)用模型(10)表达, 可求得其控制器为:

1) 当随机矩阵范数半径 $r = 1$ 时, 求得 H_∞ 鲁棒控制器 $K_1 = (A_{K1}, B_{K1}, C_{K1}, D_{K1})$ 为

$$A_{K1} = \begin{bmatrix} -10.5516 & 0.0139 & 0.7517 & 69.2943 \\ -0.8261 & -5.6906 & 4.5121 & -0.3396 \\ 2.3521 & 4.1587 & -11.5301 & 4.6329 \\ 11.1106 & -5.0676 & -4.5174 & -505.9211 \end{bmatrix},$$

$$B_{K1} = \begin{bmatrix} 0.0771 & -1.8792 & 1.3035 & 1.9302 \\ 1.0160 & -3.4820 & -0.3480 & -0.8951 \\ 3.7095 & 9.4987 & -1.3544 & 1.0758 \\ 77.180 & 8.5391 & 180.7855 & -29.2963 \end{bmatrix},$$

$$C_{K1} = \begin{bmatrix} 3.3121 & -0.7604 & 0.5736 & -29.657 \\ -0.6302 & -0.0911 & 2.0999 & 6.3506 \end{bmatrix},$$

$$D_{K1} = 0.$$

系统的性能指标 $J(X) \leq 0.9662.$

2) 当随机矩阵范数半径 $r < 1$ 时, 给定 $p_e = 0.99, \delta = 0.01, \varepsilon = 0.001, \gamma = 0.9662,$ 经过5次迭代, 求得 H_∞ 概率鲁棒控制器 $K_2 = (A_{K2}, B_{K2}, C_{K2}, D_{K2})$ 为

$$A_{K2} = \begin{bmatrix} -21.9752 & -0.1051 & -1.6840 & 72.6122 \\ 0.2243 & -22.8163 & 10.6035 & -5.6571 \\ 0.4393 & 2.5606 & -29.5666 & -5.5401 \\ 11.7384 & 0.2799 & 3.3637 & -290.280 \end{bmatrix},$$

$$B_{K2} = \begin{bmatrix} 0.1079 & -2.4107 & 0.6745 & 8.6764 \\ -4.2452 & 8.5331 & 1.2536 & 2.9672 \\ -9.7069 & -8.2428 & 2.9251 & -2.1547 \\ 20.3629 & 0.8818 & 68.5199 & -14.8734 \end{bmatrix},$$

$$C_{K2} = \begin{bmatrix} 5.3120 & 1.4202 & -0.9919 & -34.9589 \\ -0.7165 & 0.9915 & -3.2313 & 3.2146 \end{bmatrix},$$

$$D_{K2} = 0.$$

求解过程中, 各次迭代的相关计算结果见表1. 由表1可见, 当鲁棒置信概率 $p_r = 0.99$ 时, 概率鲁棒 H_∞ 控制器 K_2 对应的随机向量 X 的范数半径 $r = 0.4063 < 1,$ 表明控制器 K_2 的设计具有更小的保守性; 解得的系统性能指标上界 $\gamma = 0.3976 < 0.9662,$ 表明此时系统具有更好的性能.

表1 计算结果

迭代次数	r	p_r	$p_{B_r}^c$	p_{K_r}	γ
1	0.5000	0.0156	0.9939	0.9940	0.4863
2	0.2500	0.0002	0.9721	0.9721	0.2495
3	0.3750	0.0028	0.9883	0.9883	0.3675
4	0.4375	0.0070	0.9912	0.9913	0.4274
5	0.4063	0.0045	0.9901	0.9902	0.3976

输入阶跃响应, 比较鲁棒 H_∞ 控制器 K_1 和概率鲁棒 H_∞ 控制器 K_2 对干扰的抑制效果, 仿真结果如图1所示. 由图1可见, 概率鲁棒 H_∞ 控制器 K_2 对阶跃响应的抑制效果优于鲁棒 H_∞ 控制器 K_1 , 与上述分析一致.

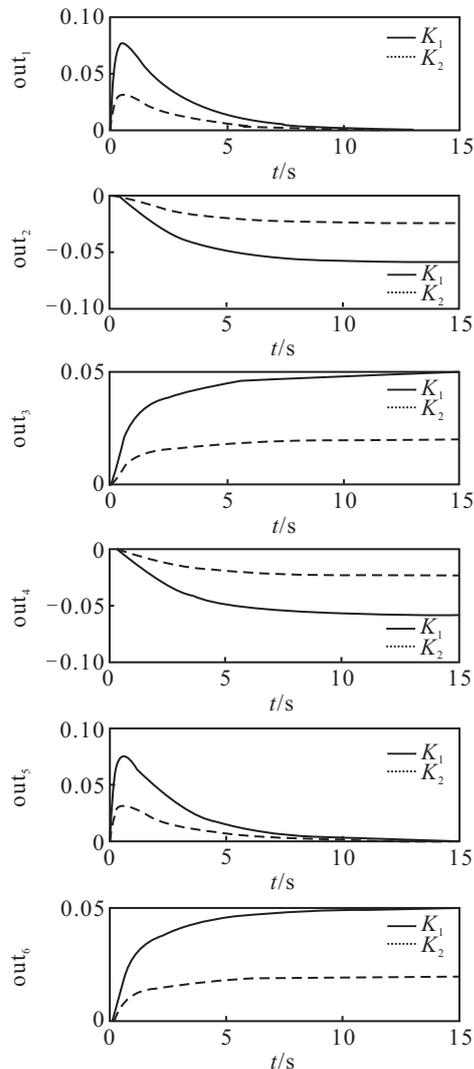


图1 控制器 K_1 与 K_2 对阶跃响应抑制效果对比

为了验证参数不确定性最坏扰动情况下所设计概率鲁棒控制器的性能, 假设上述算例中的随机变量 X 服从均匀分布, 若假设 X 服从正态分布则会获得更理想的控制效果.

4 结论

研究了一种建立在概率估计基础上的范数有界型参数不确定性系统的概率鲁棒 H_∞ 控制方法. 主要创新点如下: 1) 将鲁棒控制器设计与系统性能的置信概率估计相结合, 通过缩小参数不确定性随机向量的范数边界减少鲁棒控制器设计的保守性; 2) 在鲁棒控制器的求解过程中避免了大量的计算, 例如求解同时满足多个线性矩阵不等式的可行解. 最后通过数值仿

真验证了所提出方法的有效性.

参考文献(References)

- [1] Zhou K, Doyle J C. Essentials of robust control[M]. London: Prentice Hall, 1998: 233-246.
- [2] Gahinet P, Apkarian P. A linear matrix inequality approach to H_∞ control[J]. Int J of Robust and Nonlinear Control, 1994, 4(4): 421-448.
- [3] Alamo T, Tempo R. Randomized strategies for probabilistic solutions of uncertain feasibility and optimization problems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2009, 54(11): 2545-2558.
- [4] Calafiore G C, Dabbene F, Tempo R. Research on probabilistic method for control system design[J]. Automatica, 2011, 47(2): 1279-1293.
- [5] Fujisaki Y, Dabbene F, Tempo R. Probabilistic design of LPV control system[J]. Automatica, 2003, 39(3): 1323-1337.
- [6] Tremba A, Calafiore G, Dabbene F, et al. RACT: randomized algorithms control toolbox for Matlab[C]. Proc of the 17th Int Federation of Automatic Control Korea. Seoul, 2010: 390-395.
- [7] Tremba A, Calafiore G, Dabbene F, et al. RACT: Randomized algorithms control toolbox — User's manual[EB/OL]. (2007-11-27)[2012-10-30]. <http://ract.sourceforge.net>.
- [8] Lu B, Wu Fen. Probabilistic robust linear parameter—Varying control of an F-16 aircraft[J]. J of Guidance, Control and Dynamics, 2006, 29(6): 1454-1459.
- [9] Wang Q, Stengel R F. Robust control of nonlinear system with parametric method uncertainty[J]. Automatica, 2002, 38(9): 1591-1599.
- [10] Wang Q, Stengel R F. Robust nonlinear flight control of a high-performance aircraft[J]. IEEE Trans on Control Systems Technology, 2005, 13(1): 15-26.
- [11] Gietelind O J, De Schutter B, Verhaegen M. Probabilistic approach for validation of advanced driver assistance systems[J]. Transportation Research Record, 2005, 1910(3): 20-28.
- [12] Abate A, Prandini M, Lygeros J, et al. Probabilistic reachability and safety for controlled discrete time stochastic hybrid systems[J]. Automatica, 2008, 44(11): 2724-2734.
- [13] Tempo R, Calafiore G C, Dabbene F. Randomized algorithms for analysis and control of uncertain system[M]. London: Springer-Verlag, 2005: 162-163.