第 29 卷 第 7 期
Vol. 29 No. 7

控 制 与 决 策
Control and Decision

2014 年 7 月
Jul. 2014

文章编号: 1001-0920 (2014) 07-1226-06 **DOI:** 10.13195/j.kzyjc.2013.0600

风险资产收益序列相关的多阶段均值-方差投资组合选择

姚海祥[1], 姜灵敏[1], 马庆华[1], 简旻捷[2]

(1. 广东外语外贸大学 信息学院，广州 510006；2. 华南农业大学 理学院，广州 510642)

摘 要: 基于多阶段均值-方差框架, 研究任意多种风险资产存在一般收益序列相关时的投资组合选择问题. 首先, 采用 Lagrange 对偶原理与动态规划相结合的方法对模型进行求解, 得到多阶段均值-方差模型的有效投资策略和有效边界的解析表达式; 然后, 证明在含有无风险资产的情形下有效边界仍为均值-标准差平面上的一条射线; 最后, 应用所得结论给出一个具体的实例分析.

关键词: 收益序列相关；多阶段均值-方差模型；Lagrange 对偶原理；动态规划

中图分类号: F830；F224 **文献标志码:** A

Mult-period mean-variance portfolio selection with serially correlated returns of risky assets

YAO Hai-xiang[1], *JIANG Ling-min*[1], *MA Qing-hua*[1], *JIAN Min-jie*[2]

(1. School of Informatics，Guangdong University of Foreign Studies，Guangzhou 510006，China；2. College of Science，South China Agricultural University，Guangzhou 510642，China．Correspondent：YAO Hai-xiang，E-mail: yaohaixiang@mail.gdufs.edu.cn)

Abstract: Based on the multi-period mean-variance framework, a portfolio selection problem with serially correlated returns of multiple risky assets is studied. Firstly, by using the Lagrange duality principle and the dynamic programming approach, the model is solved explicitly, and closed-form expressions for the efficient investment strategy and mean-variance efficient frontier are obtained. Then, it is further showed that when the market includes a risk-free asset, the efficient frontier is still a straight line in the standard derivation-mean plane. Finally, by utilizing these results, a specific example is provided.

Key words: serially correlated returns；multi-period mean-variance model；Lagrange duality principle；dynamic programming

0 引 言

Markowitz[1]利用方差度量风险, 建立了著名的均值-方差框架, 用以研究投资选择问题, 带动了现代金融理论的创新和发展. 但是, Markowitz 只考虑了单阶段静态的情形, 为此, 近年来已有很多学者致力于将它推广到多阶段或连续时间的动态情形[2-8]. 目前, 多数关于多阶段均值-方差投资组合选择问题的研究都是在各期资产收益率是统计独立的假设下进行的. 序列相关性是金融资产收益率的一个显著特征, 许多文献通过实证分析证明了这一点[9-11]. 为了研究金融资产收益率序列相关的特征, 人们在计量经济学领域发展了时间序列分析这一重要分支. 目前, 关于收益序列相关性的多阶段投资选择问题的研究并不多见. 基于多阶段期望效用最大化框架, 文献 [12-13] 在效用函数具有某种特殊形式下, 研究了收益率序列具有某种特殊相关性, 如 ARMA(1,1) 的投资选择问题. 文献 [14] 基于多阶段均值-方差框架, 研究了由马尔可夫机制转移市场环境所引起的收益序列相关性的投资选择问题. 文献 [15] 利用多阶段均值-方差模型研究了风险资产具有一般的收益序列相关性的投资选择问题, 但只考虑了市场含有一个无风险资产的特殊情形. 当市场存在多个风险资产且不存在无风险资产时, 收益序列相关的多阶段均值-方差投资组合问题如何求解, 此时的有效投资策略和有效边界如

收稿日期: 2013-05-09；**修回日期:** 2013-11-27.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61104138, 71271061)；广东省自然科学基金项目(S2011010005503)；广东省高等院校(学科建设专项资金)科技创新项目(2012KJCX0050)；全国统计科学研究计划项目(2013LY101)；国家社科基金项目(11CGL051)；广东省科技计划项目(2012B040305009, 2012B091100192).

作者简介: 姚海祥(1978−), 男, 副教授, 博士, 从事投资决策与风险控制的研究；姜灵敏(1956−), 男, 教授, 博士, 从事控制理论与风险管理等研究.

何? 这些都值得进一步研究.

本文在文献 [15] 的基础上, 基于多阶段均值-方差模型进一步研究了多种风险资产存在收益序列相关的投资组合选择问题, 并表明存在无风险资产只是本文的特殊情形. 利用 Lagrange 对偶方法与动态规划技术相结合的方法, 得到了模型的有效投资策略和有效边界的解析式. 在市场含有一种无风险资产情形下进一步简化了有效策略及有效边界的表达式. 最后通过具体实例表明了所得到的研究结果具有可应用性.

1　多阶段均值-方差模型构建

设市场上有 $n+1$ 种风险资产 (记为资产 $0,1,\cdots,n$), 在时刻 $k\,(k=0,1,\cdots,T-1)$ 时的收益率向量为 $e_k=[e_k^0,e_k^1,\cdots,e_k^n]^{\mathrm{T}}$. 设有一位初始财富为 x_0 的投资者从时刻 0 进入市场, 并在时刻 T 离开市场, x_k 和 u_k^i 分别表示在时刻 k 时拥有的财富和持有第 i 种资产的价值, $i=1,2,\cdots,n$, 则他持有第 0 种资产的价值为 $x_k-\sum\limits_{i=1}^n u_k^i$. 假定投资者在每个阶段初都能进行交易且不考虑交易成本, 财富的动态过程为

$$\begin{aligned}&x_{k+1}=\Big(x_k-\sum_{i=1}^n u_k^i\Big)e_k^0+\sum_{i=1}^n u_k^ie_k^i=x_ke_k^0+P_k^{\mathrm{T}}u_k,\\&P_k=[e_k^1-e_k^0,e_k^2-e_k^0,\cdots,e_k^n-e_k^0]^{\mathrm{T}},\\&u_k=[u_k^1,u_k^2,\cdots,u_k^n]^{\mathrm{T}}.\end{aligned}\tag{1}$$

设 $\wp_k$ 是虑子族, 表示到时刻 k 为止的所有市场信息集, 如果 u_k 是 $\wp_k$ 适应的, 则称投资策略 $u=\{u_k;k=0,1,\cdots,T-1\}$ 是可行的. 令 $E_k[\cdot]=E[\cdot|\wp_k]$ 表示时刻 k 的信息集 $\wp_k$ 下的期望算子, 本文作如下假设.

假设 1　$E_k[e_ke_k^{\mathrm{T}}]>0$ 为正定矩阵, $k=0,1,\cdots,T-1$.

假设 2　$E_k[P_k]\neq\mathbf{0}$, 其中 $\mathbf{0}$ 为 n 维零向量, 即 $E_k[e_k^0],E_k[e_k^1],\cdots,E_k[e_k^n]$ 不全相等.

多阶段的均值-方差投资组合选择问题可由以下最优问题得到:

$$\begin{aligned}&\min_{u_k}\mathrm{Var}_0[x_T]=\min_{u_k}E_0[x_T-d]^2;\\&\text{s.t. }E_0[x_T]=d,x_{k+1}=x_ke_k^0+P_k^{\mathrm{T}}u_k.\end{aligned}\tag{2}$$

注意到, 本文并不假定各期收益率 e_k 是统计独立的. 将最优问题 (2) 的最优解 $u_k^*(k=0,1,\cdots,T-1)$ 称为有效投资策略, 设 $\mathrm{Var}_0[x_T]$ 为最优问题 (2) 中相应于终端财富期望为 d 的最优值, 则点 $(\mathrm{Var}_0[x_T],d)$ 为有效点. 在坐标平面 Var-E 上, 所有有效点的集合为有效边界.

2　问题转化与求解

为了求解优问题 (2), 可先固定 Lagrange 乘子 λ, 求解如下最优问题:

$$\begin{aligned}&\min_{u_k}E_0\{[x_T-d]^2+2\lambda[E_0[x_T]-d]\},\\&\text{s.t. }x_{k+1}=x_ke_k^0+P_k^{\mathrm{T}}u_k.\end{aligned}\tag{3}$$

令 $a=\lambda-d$, 显然, 最优问题 (3) 等价于

$$\begin{aligned}&\min_{u_k}E_0[x_T^2+2ax_T-d^2-2ad],\\&\text{s.t. }x_{k+1}=x_ke_k^0+P_k^{\mathrm{T}}u_k.\end{aligned}\tag{4}$$

用 $f_k(x_k)$ 表示从第 k 阶段状态 x_k 出发的剩余过程的最优值函数, 则由动态规划的理论可得最优问题 (4) 的 Bellman 方程为

$$\begin{aligned}&f_k(x_k)=\min_{u_k}E_k[f_{k+1}(x_ke_k^0+P_k^{\mathrm{T}}u_k)],\\&f_T(x_T)=x_T^2+2ax_T-d^2-2ad.\end{aligned}\tag{5}$$

当 $k=0$ 时, $f_0(x_0)$ 即为最优问题 (3) 的最优值.

为了研究和表达方便, 令 $x=x_k,V(k,x)=f_k(x)$, 则 Bellman 方程 (5) 可改写为

$$\begin{aligned}&V(k,x)=\min_{u_k}E_k[V(k+1,xe_k^0+P_k^{\mathrm{T}}u_k)],\\&V(T,x)=x^2+2ax-d^2-2ad.\end{aligned}\tag{6}$$

显然, 只要求解出 $V(k,x)$ 的表达式, 并令 $k=0$, $V(0,x_0)=f_0(x_0)$ 即为最优问题 (3) 的最优值. 为了研究方便, 首先给出以下引理.

引理 1　若 $\xi=[\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n]^{\mathrm{T}}$ 为一随机向量, 则 $|E[\xi\xi^{\mathrm{T}}]|=0$ 的充要条件是, 存在非零向量 $\alpha=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]^{\mathrm{T}}$, 使得 $\alpha^{\mathrm{T}}\xi=a_1\xi_1+a_2\xi_2+\cdots+a_n\xi_n=0$ 以概率 1 成立, 其中 $|\cdot|$ 表示对方阵取行列式, 下同.

证明　由于 $E[\xi\xi^{\mathrm{T}}]$ 为半正定矩阵, $|E[\xi\xi^{\mathrm{T}}]|=0$ 等价于存在非零向量 $\alpha=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]^{\mathrm{T}}$, 使得

$$\alpha^{\mathrm{T}}E[\xi\xi^{\mathrm{T}}]\alpha=E[\alpha^{\mathrm{T}}\xi\xi^{\mathrm{T}}\alpha]=E[(\alpha^{\mathrm{T}}\xi)^2]=0.$$

另外, 由于 $(\alpha^{\mathrm{T}}\xi)^2\geqslant 0$, $E[(\alpha^{\mathrm{T}}\xi)^2]=0$ 等价于 $\alpha^{\mathrm{T}}\xi=0$ 以概率 1 成立. □

引理 2　若 $\boldsymbol{\xi}=[\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n]^{\mathrm{T}}$ 为一随机向量, 满足 $E[\xi\xi^{\mathrm{T}}]$ 为正定矩阵, η 为另一正的随机变量, 则 $E[\eta\xi\xi^{\mathrm{T}}]$ 也为正定矩阵.

证明　因为 η 为正的随机变量, 令 $\zeta=\sqrt{\eta}>0$, 即 $\eta=\zeta^2$, 有 $E[\eta\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}]=E[(\varsigma\boldsymbol{\xi})(\varsigma\boldsymbol{\xi})^{\mathrm{T}}]$ 为半正定矩阵. 若 $E[\eta\xi\xi^{\mathrm{T}}]$ 不是正定矩阵, 则必有 $|E[\eta\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}]|=|E[(\varsigma\boldsymbol{\xi})(\varsigma\boldsymbol{\xi})^{\mathrm{T}}]|=0$. 由引理 1 可知, 存在非零向量 $\alpha=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]^{\mathrm{T}}$, 使得 $\alpha^{\mathrm{T}}(\varsigma\boldsymbol{\xi})=\varsigma(\alpha^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi})=0$ 以概率 1 成立. 由于 $\zeta>0$, $\alpha^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}=0$ 以概率 1 成立, 由引理 1 可得 $|E[\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}]|=0$, 这与 $E[\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}]$ 为正定矩阵相矛盾, 所以 $E[\eta\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}]$ 为正定矩阵. □

猜测 $V(k,x)$ 的形式为

$$V(k,x)=w_kx^2+\lambda_kx+\alpha_k,\tag{7}$$

其中 w_k,λ_k,α_k 为关于 $\wp_k$ 适应的待定数列. 先假设 $w_k>0$, $k=0,1,\cdots,T$, 随后进行验证. 将式 (7) 代入

Bellman 方程 (6) 的第 1 式, 得

$$\begin{aligned}&w_kx^2+\lambda_kx+\alpha_k=\\&\min_{u_k}E_k\{w_{k+1}(xe_k^0+P_k^{\mathrm T}u_k)^2+\\&\lambda_{k+1}(xe_k^0+P_k^{\mathrm T}u_k)+\alpha_{k+1}\}=\\&E_k[w_{k+1}(e_k^0)^2]x^2+E_k[\lambda_{k+1}e_k^0]x+\\&E_k[\alpha_{k+1}]+\min_{u_k}\{u_k^{\mathrm T}E_k[w_{k+1}P_kP_k^{\mathrm T}]u_k+\\&(2E_k[w_{k+1}e_k^0P_k^{\mathrm T}]x+E_k[\lambda_{k+1}P_k^{\mathrm T}])u_k\}.\end{aligned}\tag{8}$$

由文献 [2] 可知, 在假设 1 下, $E_k[P_kP_k^{\mathrm T}]$ 也为正定矩阵. 又由 $w_{k+1}>0$ 和引理 2 可知, $E_k[w_{k+1}P_kP_k^{\mathrm T}]$ 也为正定矩阵. 从而式 (8) 大括号中内容关于 u_k 是严格凸函数, 其一阶条件 (也为充分条件) 的最优策略为

$$\begin{aligned}u_k^*=&-E_k^{-1}[w_{k+1}P_kP_k^{\mathrm T}](E_k[w_{k+1}e_k^0P_k]x+\\&E_k[\lambda_{k+1}P_k]/2).\end{aligned}\tag{9}$$

将式 (9) 代入 (8) 得到

$$\begin{aligned}&w_kx^2+\lambda_kx+\alpha_k=\\&E_k[w_{k+1}(e_k^0)^2]x^2+E_k[\lambda_{k+1}e_k^0]x+E_k[\alpha_{k+1}]-\\&\Big(E_k[w_{k+1}e_k^0P_k^{\mathrm T}]x+\frac12E_k[\lambda_{k+1}P_k^{\mathrm T}]\Big)\times\\&E_k^{-1}[w_{k+1}P_kP_k^{\mathrm T}]\Big(E_k[w_{k+1}e_k^0P_k]x+\frac12E_k[\lambda_{k+1}P_k]\Big)=\\&(E_k[w_{k+1}(e_k^0)^2]-E_k[w_{k+1}e_k^0P_k^{\mathrm T}]E_k^{-1}[w_{k+1}P_kP_k^{\mathrm T}]\times\\&E_k[w_{k+1}e_k^0P_k])x^2+(E_k[\lambda_{k+1}e_k^0]-E_k[w_{k+1}e_k^0P_k^{\mathrm T}]\times\\&E_k^{-1}[w_{k+1}P_kP_k^{\mathrm T}]E_k[\lambda_{k+1}P_k])x+E_k[\alpha_{k+1}]-\\&\frac14E_k[\lambda_{k+1}P_k^{\mathrm T}]E_k^{-1}[w_{k+1}P_kP_k^{\mathrm T}]E_k[\lambda_{k+1}P_k].\end{aligned}$$

从而数列 w_k, λ_k, α_k 满足如下递推关系和边界条件:

$$\begin{aligned}w_k=&E_k[w_{k+1}(e_k^0)^2]-E_k[w_{k+1}e_k^0P_k^{\mathrm T}]\times\\&E_k^{-1}[w_{k+1}P_kP_k^{\mathrm T}]E_k[w_{k+1}e_k^0P_k],\\\lambda_k=&E_k[\lambda_{k+1}e_k^0]-E_k[w_{k+1}e_k^0P_k^{\mathrm T}]\times\\&E_k^{-1}[w_{k+1}P_kP_k^{\mathrm T}]E_k[\lambda_{k+1}P_k],\\\alpha_k=&E_k[\alpha_{k+1}]-\frac14E_k[\lambda_{k+1}P_k^{\mathrm T}]\times\\&E_k^{-1}[w_{k+1}P_kP_k^{\mathrm T}]E_k[\lambda_{k+1}P_k],\\w_T=&1,\ \lambda_T=2a,\alpha_T=-d^2-2ad.\end{aligned}\tag{10}$$

由式 (10) 关于 w_k 的递推公式和边界条件, 通过反复迭代, 理论上可以得到 $w_k(k=T,T-1,\cdots,0)$ 的值. 之后, 通过 λ_k 的递推公式和边界条件可以得到 λ_k 的值, 再由 α_k 的递推公式和边界条件可以得到 α_k. 因为 w_k 的边界条件和递推公式都不含有参数 a 和 d, 所以对于所有的 k, w_k 也不含有 a 和 d. 但 λ_k 和 α_k 的边界条件含有参数 a 和 d, 从而 λ_k 和 α_k 的表达式中也可能含有 a 和 d, 为此作如下变换:

$$\lambda_k=am_k,\ \alpha_k=a^2n_k-d^2-2ad.\tag{11}$$

代入 λ_k 和 α_k 的递推公式和边界条件 (10) 可以得到关于 m_k 和 n_k 的递推公式和边界条件为

$$\begin{aligned}m_k=&E_k[m_{k+1}e_k^0]-E_k[w_{k+1}e_k^0P_k^{\mathrm T}]\times\\&E_k^{-1}[w_{k+1}P_kP_k^{\mathrm T}]E_k[m_{k+1}P_k],\\n_k=&E_k[n_{k+1}]-\frac14E_k[m_{k+1}P_k^{\mathrm T}]\times\\&E_k^{-1}[w_{k+1}P_kP_k^{\mathrm T}]E_k[m_{k+1}P_k],\\m_T=&2,\ n_T=0.\end{aligned}\tag{12}$$

由前面分析可知, w_k 不含有 a 和 d, 从而 m_k 和 n_k 的递推公式和边界条件都不含有参数 a 和 d, 因此 m_k 和 n_k 表达式里也不含有 a 和 d, Bellman 方程 (6) 的解为

$$V(k,x)=w_kx^2+am_kx+a^2n_k-d^2-2ad.\tag{13}$$

将 $\lambda_k=am_k$ 代入式 (9), 注意到 $x=x_k$, 最优策略为

$$\begin{aligned}u_k^*=&-E_k^{-1}[w_{k+1}P_kP_k^{\mathrm T}](E_k[w_{k+1}e_k^0P_k]x_k+\\&aE_k[m_{k+1}P_k]/2).\end{aligned}\tag{14}$$

为了数学上的严谨性 (后面求解需要), 并回应前面关于 $w_k>0$ 的假设, 给出关于 w_k 和 n_k 的命题.

命题 1 当 $k=0,1,\cdots,T$ 时, 有 $w_k>0$.

证明 用数学归纳法证明. 当 $k=T$ 时, 由式 (10) 可知 $w_T=2$, 显然 $w_T>0$ 成立.

假定 $w_{k+1}>0$, 证明 $w_k>0$. 令 $Q_k=[e_k^0\ \ P_k]^{\mathrm T}$, 首先证明 $E[Q_kQ_k^{\mathrm T}]$ 为正定矩阵. 若 $E[Q_kQ_k^{\mathrm T}]$ 不是正定矩阵, 则有 $|E[Q_kQ_k^{\mathrm T}]|=0$, 由引理 1 可知, 存在非零向量 $\beta=[\beta_0,\beta_1,\cdots,\beta_n]^{\mathrm T}$, 使得 $\beta^{\mathrm T}Q_k=0$ 以概率 1 成立, 即

$$\begin{aligned}&\beta^{\mathrm T}Q_k=\beta^{\mathrm T}[e_k^0\ \ P_k]^{\mathrm T}=\beta_0e_k^0+\sum_{i=1}^n\beta_i(e_k^i-e_k^0)=\\&\Big(\beta_0-\sum_{i=1}^n\beta_i\Big)e_k^0+\sum_{i=1}^n\beta_ie_k^i=0\end{aligned}$$

以概率 1 成立. 容易验证, 当 $\beta_0,\beta_1,\cdots,\beta_n$ 不全为零时, $\Big(\beta_0-\sum\limits_{i=1}^n\beta_i\Big),\beta_1,\cdots,\beta_n$ 也不全零. 从而由引理 1 可知, $|E_k[e_ke_k^{\mathrm T}]|=0$, 这与假设 1 即 $E_k[e_ke_k^{\mathrm T}]$ 为正定矩阵相矛盾, 所以 $E_k[Q_kQ_k^{\mathrm T}]$ 为正定矩阵. 注意到式 (10) 和

$$E_k[w_{k+1}Q_kQ_k^{\mathrm T}]=\begin{bmatrix}E_k[w_{k+1}(e_k^0)^2]&E_k[w_{k+1}e_k^0P_k^{\mathrm T}]\\E_k[w_{k+1}e_k^0P_k]&E_k[w_{k+1}P_kP_k^{\mathrm T}]\end{bmatrix},$$

从而有

$$\begin{aligned}&E_k[w_{k+1}Q_kQ_k^{\mathrm T}]\begin{bmatrix}1&0\\-E_k^{-1}[w_{k+1}P_kP_k^{\mathrm T}]E_k[w_{k+1}e_k^0P_k]&I_n\end{bmatrix}=\\&\begin{bmatrix}w_k&E_k[w_{k+1}e_k^0P_k^{\mathrm T}]\\0&E_k[w_{k+1}P_kP_k^{\mathrm T}]\end{bmatrix},\end{aligned}\tag{15}$$

其中 I_n 为 n 阶单位矩阵. 对式 (15) 两边取行列式得

$$|E_k[w_{k+1}Q_kQ_k^{\mathrm T}]|=w_k|E_k[w_{k+1}P_kP_k^{\mathrm T}]|.$$

由文献 [2] 可知, 在假设 1 下, $E_k[P_kP_k^{\mathrm{T}}]$ 也为正定矩阵, 由前面分析和归纳假设可知, $E_k[Q_kQ_k^{\mathrm{T}}]$ 为正定矩阵且 $w_{k+1} > 0$, 故由引理 2 得 $E_k[w_{k+1}Q_kQ_k^{\mathrm{T}}]$ 和 $E_k[w_{k+1}P_kP_k^{\mathrm{T}}]$ 都为正定矩阵, $w_k > 0$. □

命题 2　在假设 1 和假设 2 下, 当 $k = 0, 1, \cdots, T-1$ 时, 均有 $n_k < 0$.

证明　用数学归纳法证明. 当 $k = T-1$ 时, 由式 (12) 和边界条件 $w_T = 1$ 可知

$$n_{T-1} = -E_{T-1}[P_{T-1}^{\mathrm{T}}]E_{T-1}^{-1}[P_{T-1}P_{T-1}^{\mathrm{T}}]E_{T-1}[P_{T-1}].$$

由文献 [2] 可知, 在假设 1 下, $E_{T-1}^{-1}[P_{T-1}P_{T-1}^{\mathrm{T}}]$ 也为正定矩阵. 又由假设 2 可知, $E_{T-1}[P_{T-1}] \neq \mathbf{0}$, 从而 $n_{T-1} < 0$.

假定 $n_{k+1} < 0$, 下面证明 $n_k < 0$. 因为 $E_k[P_kP_k^{\mathrm{T}}]$ 为正定矩阵. 由命题 1 可知 $w_{k+1} > 0$, 故由引理 2 可得 $E_k[w_{k+1}P_kP_k^{\mathrm{T}}]$ 为正定矩阵, 从而 $E_k^{-1}[w_{k+1}P_kP_k^{\mathrm{T}}]$ 也为正定矩阵, 且

$$E_k[(m_{k+1}P_k)^{\mathrm{T}}]E_k^{-1}[w_{k+1}P_kP_k^{\mathrm{T}}]E_k[(m_{k+1}P_k)] \geqslant 0.$$

归纳假设 $n_{k+1} < 0$, 从而 $E_k[n_{k+1}] < 0$, 由式 (12) 有

$$n_k = E_k[n_{k+1}] - E_k[m_{k+1}P_k^{\mathrm{T}}]E_k^{-1}[w_{k+1}P_kP_k^{\mathrm{T}}] \times E_k[m_{k+1}P_k]/4 \leqslant E_k[n_{k+1}] < 0.$$

□

3　有效投资策略及有效边界

由第 2 节的分析可知, 令 $k = 0$, 则 $V(0, x_0)$ 即为最优问题 (3) 的最优值, 由式 (13) 有

$$L(x_0, \lambda) = w_0x_0^2 + am_0x_0 + a^2n_0 - d^2 - 2ad. \quad (16)$$

由 Lagrange 对偶原理[16]可知, 最优化问题 (2) 的最优值可由最优问题 (3) 的最优值 $L = L(x_0, \lambda)$ 关于 λ 求最大值得到. 由于 $\lambda = a + d$, 显然 L 关于 λ 最大化等价关于 a 最大化, 有

$$\mathrm{Var}_0[x_T] = \max_a L(x_0, a+d) = \max_a\{a^2n_0 + a(m_0x_0 - 2d) + w_0x_0^2 - d^2\}. \quad (17)$$

由命题 2 可知, $n_0 < 0$, 故最优问题 (17) 存在最大值, 且由其一阶条件可得最大值点为

$$a^* = (2d - m_0x_0)/(2n_0). \quad (18)$$

将式 (18) 代入 (14) 可得多阶段均值-模型 (2) 的有效投资策略为

$$u_k^* = -E_k^{-1}[w_{k+1}P_kP_k^{\mathrm{T}}]\Big(E_k[w_{k+1}e_k^0P_k]x_k + \frac{2d - m_0x_0}{4n_0}E_k[m_{k+1}P_k]\Big). \quad (19)$$

将式 (19) 代入 (18) 得到最优化问题 (2) 的最小方差为

$$\mathrm{Var}_0[x_T] = -\frac{1+n_0}{n_0}\Big(d - \frac{m_0x_0}{2(1+n_0)}\Big)^2 + \Big(w_0 - \frac{m_0^2}{4(1+n_0)}\Big)x_0^2. \quad (20)$$

显然, 投资者不会取期望 d 小于 $\dfrac{m_0x_0}{2(1+n_0)}$. 综上所述, 最优问题 (2) 即多阶段均值-方差模型的解由如下定理给出.

定理 1　给定终端财富期望水平 d, 则收益序列相关多阶段均值-方差模型 (2) 的有效投资策略由式 (19)给出, 有效边界由式 (20) 给出, 其中 $d \geqslant \dfrac{m_0x_0}{2(1+n_0)}$.

4　存在无风险资产情形

假定市场上存在一种无风险资产, 不失一般性, 设为第 0 种资产, 此时 e_k^0 为非随机常数, 且设 $e_k^0 > 0$, $k = 0, 1, \cdots, T-1$. 令

$$\bar{w}_T = w_T,\ \bar{w}_k = w_k\Big(\prod_{i=k}^{T-1}(e_i^0)^2\Big)^{-1},$$
$$\bar{m}_T = m_T,\ \bar{m}_k = m_k\Big(\prod_{i=k}^{T-1}e_i^0\Big)^{-1}, \quad (21)$$

代入 w_k 和 m_k 的递推公式和边界条件 (式 (10) 和 (12)), 可得到关于 $\bar{w}_k$、$\bar{m}_k$ 的递推公式和边界条件为

$$\begin{aligned}\bar{w}_k &= E_k[\bar{w}_{k+1}] - E_k[\bar{w}_{k+1}P_k^{\mathrm{T}}]\times E_k^{-1}[\bar{w}_{k+1}P_kP_k^{\mathrm{T}}]E_k[\bar{w}_{k+1}P_k],\\ \bar{m}_k &= E_k[\bar{m}_{k+1}] - E_k[\bar{w}_{k+1}P_k^{\mathrm{T}}]\times E_k^{-1}[\bar{w}_{k+1}P_kP_k^{\mathrm{T}}]E_k[\bar{m}_{k+1}P_k],\\ \bar{w}_T &= 1,\ \bar{m}_T = 2.\end{aligned} \quad (22)$$

命题 3　对于任意 $k = 0, 1, \cdots, T$, 有 $\bar{m}_k = 2\bar{w}_k$.

根据式 (22), 由逆向数学归纳法可证得命题 3.

命题 4　对于任意 $k = 0, 1, \cdots, T$, 有 $\bar{w}_k - n_k = 1$, 即 $n_k = \bar{w}_k - 1$.

证明　将式 (21) 代入 (12) 关于 n_k 的迭代公式和边界条件, 可得

$$n_k = E_k[n_{k+1}] - \frac{1}{4}E_k[\bar{m}_{k+1}P_k^{\mathrm{T}}]E_k^{-1}\times[\bar{w}_{k+1}P_kP_k^{\mathrm{T}}]E_k[\bar{m}_{k+1}P_k]. \quad (23)$$

由命题 3 可知, $\bar{m}_k = 2\bar{w}_k$, 从而有

$$n_k = E_k[n_{k+1}] - E_k[\bar{w}_{k+1}P_k^{\mathrm{T}}]E_k^{-1}[\bar{w}_{k+1}P_kP_k^{\mathrm{T}}]E_k[\bar{w}_{k+1}P_k].$$

又由式 (22) 关于 $\bar{w}_k$ 迭代公式, 可得

$$-E_k[\bar{w}_{k+1}P_k^{\mathrm{T}}]E_k^{-1}[\bar{w}_{k+1}P_kP_k^{\mathrm{T}}]E_k[\bar{w}_{k+1}P_k] = \bar{w}_k - E_k[\bar{w}_{k+1}],$$

代入式 (23) 得 $n_k = E_k[n_{k+1}] + \bar{w}_k - E_k[\bar{w}_{k+1}]$, 从而有 $\bar{w}_k - n_k$ 满足以下迭代公式和边界条件:

$$\bar{w}_k - n_k = E_k[\bar{w}_{k+1} - n_{k+1}],\ \bar{w}_T - n_T = 1 - 0 = 1.$$

通过边界条件倒向反复迭代易得对于任意 $k = 0, 1, \cdots, T$, 均有 $\bar{w}_k - n_k = 1$, 即 $n_k = \bar{w}_k - 1$. □

命题 5　在假设 1 和假设 2 下, 对于任意 $k = 0, 1,$

$\cdots, T-1$, 均有 $0<\bar{w}_k<1$.

证明 由命题1可知

$$\bar{w}_k = w_k\Big(\prod_{i=k}^{T-1}(e_i^0)^2\Big)^{-1} > 0.$$

下面用数学归纳法证明 $\bar{w}_k < 1$, $k=0,1,\cdots,T-1$. 当 $k=T-1$ 时, 由式(22)和边界条件 $w_T=1$ 可知

$$\bar{w}_{T-1} = 1 - E_{T-1}[P_{T-1}^{\mathrm{T}}]E_{T-1}^{-1}\times [P_{T-1}P_{T-1}^{\mathrm{T}}]E_{T-1}[P_{T-1}] < 1.$$

假定 $\bar{w}_{k+1}<1$, 根据式(22)关于 $\bar{w}_k$ 的递推关系, 有

$$\bar{w}_k = E_k[\bar{w}_{k+1}] - E_k[\bar{w}_{k+1}P_k^{\mathrm{T}}]E_k^{-1}[\bar{w}_{k+1}P_kP_k^{\mathrm{T}}]\times E_k[\bar{w}_{k+1}P_k] < E_k[\bar{w}_{k+1}] < 1.$$

由数学归纳原理, 当 $k=0,1,\cdots,T-1$ 时, 均有 $0<\bar{w}_k<1$. □

定理2 当市场上存在一种无风险资产(设为第0种资产), 但多风险资产收益仍存在序列相关时, 多阶段均值-方差模型相应于期望终端财富 $E_0[x_T]=d$ 的有效投资策略可简化为

$$u_k^* = -\Bigg(e_k^0x_k + \frac{d-\bar{w}_0x_0\prod\limits_{i=0}^{T-1}e_i^0}{(\bar{w}_0-1)\prod\limits_{i=k+1}^{T-1}e_i^0}\Bigg)\times E_k^{-1}[\bar{w}_{k+1}P_kP_k^{\mathrm{T}}]E_k[\bar{w}_{k+1}P_k], \tag{24}$$

有效边界简化为

$$\mathrm{Var}_0[x_T] = \frac{\bar{w}_0}{1-\bar{w}_0}\Big(d - x_0\prod_{i=0}^{T-1}e_i^0\Big)^2, \quad d \geqslant x_0\prod_{i=0}^{T-1}e_i^0. \tag{25}$$

证明 由式(22)、命题3和命题4可知

$$w_k = \bar{w}_k\prod_{i=k}^{T-1}(e_i^0)^2,\ m_k = 2\bar{w}_k\prod_{i=k}^{T-1}e_i^0,\ n_k = \bar{w}_k - 1,$$

代入式(19)和(20)可得有效投资策略为式(24), 有效边界为式(25). □

注1 定理2表明, 若市场上存在一种无风险资产, 即使风险资产的收益率存在序列相关, 全局最小方差也为0. 若令 $\sigma_0[x_T]=\sqrt{\mathrm{Var}_0[x_T]}$ 为终端财富的标准差, 则此时有效边界

$$E_0[x_T] = \sqrt{\frac{1-\bar{w}_0}{\bar{w}_0}}\sigma_0[x_T] + x_0\prod_{i=0}^{T-1}e_i^0$$

为均值-标准差平面上的一条射线, 起点为 $\Big(0, x_0\prod\limits_{i=0}^{T-1}e_i^0\Big)$, 这与存在无风险资产且风险资产的收益率是统计独立的情形一样[2].

5 实例分析

由式(19)、(20)、(24)和(25)可知, 有效投资策略和有效边界的表达式中含有一些变量(如 $\bar{w}_0$)是通过迭代公式给出的. 一般来说, 这些迭代变量并没有完全显式的计算公式, 但对于某些特殊结构的收益率动态过程(存在序列相关性), 仍可以得到迭代变量完全显式的计算公式. 下面通过一个具体例子说明本文结果的应用.

为了简单起见, 设市场上含有一种无风险资产(记为资产0), 各期风险资产的超额收益率 $P_k=[e_k^1-e_k^0, e_k^2-e_k^0,\cdots,e_k^n-e_k^0]^{\mathrm{T}}$ 服从如下动态过程:

$$\ln(e_{k+1}^i - e_{k+1}^0) = \ln(e_k^i - e_k^0) + \sigma_{k+1}^i\varepsilon_{k+1}. \tag{26}$$

其中: $\sigma_{k+1}^i = (\sigma_{k+1}^{i1}, \sigma_{k+1}^{i2},\cdots,\sigma_{k+1}^{in})$, $\varepsilon_{k+1}\sim N(0,I_n)$ 为 n 维标准正态分布, I_n 为 n 维单位矩阵, 各期的 ε_{k+1} 是统计独立的. 由式(26)有

$$e_{k+1}^i - e_{k+1}^0 = (e_k^i - e_k^0)\mathrm{e}^{\sigma_{k+1}^i\varepsilon_{k+1}}, \tag{27}$$

其中e为自然对数的底数. 记

$$D_{k+1} = [\mathrm{e}^{\sigma_{k+1}^1\varepsilon_{k+1}}, \mathrm{e}^{\sigma_{k+1}^2\varepsilon_{k+1}},\cdots,\mathrm{e}^{\sigma_{k+1}^n\varepsilon_{k+1}}]^{\mathrm{T}},$$

则式(27)可以表示为

$$P_{k+1} = \mathrm{diag}(P_k)D_{k+1}, \tag{28}$$

其中 $\mathrm{diag}(P_k)$ 为以 P_k 的每个分量作为对角线元素的对角矩阵. 为研究需要, 令

$$\sigma_k = [(\sigma_k^1)^{\mathrm{T}}, (\sigma_k^2)^{\mathrm{T}},\cdots,(\sigma_k^n)^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} \in \boldsymbol{R}^{n\times n}.$$

定义函数 $f(\cdot):\boldsymbol{R}^{n\times n}\to\boldsymbol{R}$ 为

$$f(\sigma_k) := 1 - (\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\|\sigma_k^1\|^2},\cdots,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\|\sigma_k^n\|^2})\times \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{2\|\sigma_k^1\|^2} & \cdots & \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\|\sigma_k^1+\sigma_k^n\|^2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\|\sigma_k^n+\sigma_k^1\|^2} & \cdots & \mathrm{e}^{2\|\sigma_k^n\|^2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\|\sigma_k^1\|^2} \\ \vdots \\ \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\|\sigma_k^n\|^2} \end{bmatrix}, \tag{29}$$

其中 $\|\cdot\|$ 表示欧氏模.

首先计算 $\bar{w}_{T-1}$. 由式(22)和(28)有

$$\bar{w}_{T-1} = 1 - E_{T-1}[D_{T-1}^{\mathrm{T}}\mathrm{diag}^{\mathrm{T}}(P_{T-2})]\times E_{T-1}^{-1}[\mathrm{diag}(P_{T-2})D_{T-1}D_{T-1}^{\mathrm{T}}\mathrm{diag}^{\mathrm{T}}(P_{T-2})]\times E_{T-1}[\mathrm{diag}(P_{T-2})D_{T-1}]. \tag{30}$$

由于 $E_{T-1}[\cdot]=E[\cdot|\wp_{T-1}]$, 在 $T-1$ 时刻信息集 $\wp_{T-1}$ 下 P_{T-2} 是已实现的, 从而是非随机的. 由于 $\varepsilon_{T-1}\sim N(0,I_n)$, 由概率理论有

$$E_{T-1}[\mathrm{e}^{\sigma_{T-1}^i\varepsilon_{T-1}}] = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\|\sigma_{T-1}^i\|^2},$$
$$E_{T-1}[\mathrm{e}^{(\sigma_{T-1}^i+\sigma_{T-1}^j)\varepsilon_{T-1}}] = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\|\sigma_{T-1}^i+\sigma_{T-1}^j\|^2}. \tag{31}$$

根据式(30)和(31), 有

$$\bar{w}_{T-1} = 1 - E_{T-1}[D_{T-1}^{\mathrm{T}}]E_{T-1}^{-1}[D_{T-1}D_{T-1}^{\mathrm{T}}]\times$$

$$E_{T-1}[D_{T-1}] = f(\sigma_{T-1}), \tag{32}$$

其中 $f(\sigma_{T-1})$ 由式 (29) 定义. 应用逆向数学归纳法, 容易得到

$$\bar{w}_k = \prod_{i=k}^{T-1} f(\sigma_i),\ k = 0, 1, \cdots, T-1. \tag{33}$$

代入式 (24) 和 (25) 得到此时的有效投资策略为

$$u_k^* = -\left(e_k^0 x_k + \frac{d - x_0 \prod\limits_{i=0}^{T-1} (f(\sigma_i) e_i^0)}{\left(\prod\limits_{i=0}^{T-1} f(\sigma_i) - 1\right) \prod\limits_{i=k+1}^{T-1} e_i^0}\right) \times$$

$$E_k^{-1}[P_k P_k^{\mathrm{T}}] E_k[P_k], \tag{34}$$

有效边界为

$$\mathrm{Var}_0[x_T] = \frac{\prod\limits_{i=0}^{T-1} f(\sigma_i)}{1 - \prod\limits_{i=0}^{T-1} f(\sigma_i)} \left(d - x_0 \prod_{i=0}^{T-1} e_i^0\right)^2. \tag{35}$$

6 结　论

本文考虑了任意多种资产可以全是风险资产的更一般金融市场, 研究了当各期风险资产收益存在一般序列相关性时的多阶段均值-方差投资组合选择问题, 得到了模型的有效投资策略和有效边界的解析表达式. 在市场含有一种无风险资产情形下简化了有效投资策略和有效边界的表达式, 表明了此时的全局最小方差仍为 0, 即有效边界仍为均值-标准差平面上的一条射线. 最后给出了一个具体的例子分析. 本文的研究方法具有一般性, 可以进一步用来研究其他现实条件下 (如不确定性投资终止时间和债务管理等) 收益序列相关的多阶段均值-方差投资选择问题.

参考文献(References)

[1] Markowitz H. Portfolio selection[J]. J of Finance, 1952, 7(1): 77-91.

[2] Li D, Ng W L. Optimal dynamic portfolio selection: Multiperiod mean-variance formulation[J]. Mathematical Finance, 2000, 10(3): 387-406.

[3] 郭文旌, 胡奇英. 不确定终止时间的多阶段最优投资组合[J]. 管理科学学报, 2005, 8(2): 13-19.
(Guo W J, Hu Q Y. Multi-period optimization when exit time is uncertain[J]. J of Management Sciences in China, 2005, 8(2), 14-19.)

[4] 闫伟, 李树荣, 孙焕泉. 基于风险价值约束的动态均值-方差投资组合的研究[J]. 控制与决策, 2007, 22(2): 169-173.
(Yan W, Li S R, Sun H Q. Research on dynamic mean-variance portfolio selection under a value at risk constraint[J]. Control and Decision, 2007, 22(2): 169-173.)

[5] Leippold M, Trojani F, Vanini P. Multiperiod mean-variance efficient portfolios with endogenous liabilities[J]. Quantitative Finance, 2011, 11(10): 1535-1546.

[6] Yao H X, Zeng Y, Chen S M. Multi-period mean-variance asset-liability management with uncontrolled cash flow and uncertain time-horizon[J]. Economic Modelling, 2013, 30(1): 492-500.

[7] 姚海祥, 马庆华, 姜灵敏. 带内生负债的不确定终止时间多期均值-方差资产-负债管理[J]. 控制理论与应用, 2013, 30(2): 249-253.
(Yao H X, Ma Q H, Jiang L M. Multi-period mean-variance asset-liability management with endogenous liabilities and uncertain exit time[J]. Control Theory & Applications, 2013, 30(2): 249-253.)

[8] 姚海祥, 姜灵敏, 马庆华, 等. 考虑通货膨胀因素下的连续时间均值-方差投资组合选择[J]. 控制与决策, 2013, 28(1): 43-48.
(Yao H X, Jiang L M, Ma Q H, et al. Continuous-time mean-variance portfolio selection under inflation[J]. Control and Decision, 2013, 28(1): 43-48.)

[9] French K R, Roll R. Stock return variances: The arrival of information and reaction of traders[J]. J of Financial Economics, 1986, 17(1): 5-26.

[10] Jegadeesh N. Evidence of predictable behavior of security returns[J]. J of Finance, 1990, 45(3): 881-898.

[11] Fama E F, French K R. Permanent and temporary components of stock prices[J]. J of Political Economy, 1988, 96(2): 247-273.

[12] Balvers R J, Mitchell D W. Autocorrelated returns and optimal intertemporal portfolio choice[J]. Management Science, 1997, 43(11): 1537-1551.

[13] Dokuchaev N. Discrete time market with serial correlations and myopic optimal strategies[J]. European J of Operational Research, 2007, 177(2): 1090-1104.

[14] Costa O L V, Oliveira A D. Optimal mean-variance control for discrete- time linear systems with Markovian jumps and multiplicative noises[J]. Automatica, 2012, 48(2): 304-315.

[15] 许云辉, 李仲飞. 基于收益序列相关的动态投资组合选择——动态均值-方差模型[J]. 系统工程理论实践, 2008, 28(8): 123-131.
(Xu Y H, Li Z F. Dynamic portfolio selection based on serially correlated return: Dynamic mean-variance formulation[J]. Systems Engineering - Theory & Practice, 2008, 28(8): 123-131.)

[16] Luenberger D G. Optimization by vector space methods[M]. New York: Wiley, 1968: 223-225.

(责任编辑：郑晓蕾)