

## 一类离散混沌系统的脉冲时滞反馈控制

李 宁<sup>1a,1b</sup>, 袁惠群<sup>1b</sup>, 孙海义<sup>2</sup>, 张庆灵<sup>1a</sup>

(1. 东北大学 a. 系统科学研究所, b. 理学院, 沈阳 110004; 2. 沈阳建筑大学 理学院, 沈阳 110168)

**摘 要:** 为了镇定一类离散混沌系统的不稳定周期轨道, 提出脉冲时滞反馈控制方法. 系统地研究了脉冲时滞反馈控制方法在一类离散小世界网络模型中的应用问题. 数值仿真结果表明, 小世界网络模型中的倍周期分岔及其导致的混沌可以被延后, 镶嵌在混沌吸引子内部的不稳定周期轨道可以被镇定. 与已有相关控制方法相比, 所提出的脉冲时滞反馈控制方法具有适用范围广泛、实现过程简单方便且灵活等优势.

**关键词:** 脉冲时滞反馈控制; 分岔; 混沌; 小世界网络

**中图分类号:** TP273

**文献标志码:** A

### Impulsive delayed feedback control for a class of discrete chaotic system

LI Ning<sup>1a,1b</sup>, YUAN Hui-qun<sup>1b</sup>, SUN Hai-yi<sup>2</sup>, ZHANG Qing-ling<sup>1a</sup>

(1a. Institute of Systems Science, 1b. College of Science, Northeastern University, Shenyang 110004, China; 2. College of Science, Shenyang Jianzhu University, Shenyang 110168, China. Correspondent: YUAN Hui-qun, E-mail: yuan\_hq@163.com)

**Abstract:** To stabilize the unstable periodic orbits of a class of discrete chaotic system, an impulsive delayed feedback control method is proposed. Then the application of the control method in a class of discrete small-world network model is studied systematically. Numerical simulations show that the period-doubling bifurcations and the resulting chaos can be delayed, and the periodic orbits embedded in the chaotic attractor can be stabilized. Compared with the existed related methods, the proposed control method has wider applications, and the implementation of the proposed control method is easy, convenient and flexible.

**Key words:** impulsive delayed feedback control; bifurcation; chaos; small-world network

## 0 引 言

1992年, Pyragas<sup>[1]</sup>提出时滞反馈控制(DFC)方法, 由于在工程中简单、易于实现, 且具有节约能源等优势, DFC方法引起了学术界的广泛关注. 关于DFC方法, 有两个问题有待深入探讨: 1) 研究表明, DFC方法在实现过程中具有一定局限性<sup>[2-4]</sup>, 一些不稳定周期轨道不能通过DFC方法镇定, 如何克服这些局限性成为进一步研究DFC方法的关键问题, 目前已经取得了一些有意义的成果, 学者们先后提出了DFC方法的一些改进方法<sup>[5-8]</sup>; 2) 在深入探讨DFC方法改进问题的过程中, 控制器的实现是需要考虑的因素, 目的是设计出实现简单方便、灵活的控制器. 脉冲控制方法只需在固定时刻对系统施加控制, 实现方便, 但文献[8]中脉冲间隔被固定, 因此, 根据周期解稳定的

解析表达式, 按照实际需要选取适当的脉冲间隔和反馈增益等控制参数是需要考虑的问题.

本文提出一类脉冲时滞反馈控制方法, 用以控制一类离散系统中的倍周期分岔及其导致的混沌, 镇定嵌入在混沌吸引子内部的不稳定周期轨道.

## 1 脉冲时滞反馈控制

考虑离散非线性系统

$$x_{n+1} = f(x_n). \quad (1)$$

其中:  $x \in R$  为状态变量,  $f: R \rightarrow R$  为可导函数. 假设系统(1)有一周期  $T(T \geq 1)$  轨道, 记为  $\Sigma_T = \{x_1^*, x_2^*, \dots, x_T^*\}$ . 对系统(1)施加控制, 得到

$$x_{n+1} = f(x_n) + u_n, \quad (2)$$

其中  $u_n$  为控制输入.

收稿日期: 2013-05-13; 修回日期: 2013-10-21.

基金项目: 国家自然科学基金项目(51275081); 国家863计划项目(2012AA040104); 辽宁省教育厅科学研究一般项目(L2012208); 住房和城乡建设部科技计划项目(2013-K5-2).

作者简介: 李宁(1980-), 女, 讲师, 博士, 从事广义系统、复杂网络混沌控制的研究; 袁惠群(1954-), 男, 教授, 博士生导师, 从事机电系统非线性振动与混沌控制等研究.

为了镇定周期 1 轨道  $x_1^*$ , 即当  $T = 1$  时, 脉冲时滞反馈控制器  $u_n$  采取以下形式:

$$u_n = \varepsilon_n(x_n - x_{n-m+1}). \quad (3)$$

其中:  $m$  为脉冲间隔;  $\varepsilon_n$  定义为

$$\varepsilon_n = \begin{cases} K, & n|m = 0; \\ 0, & n|m \neq 0. \end{cases} \quad (4)$$

$K$  为控制增益.

首先讨论周期 1 轨道  $x_1^*$  的局部稳定性. 定义误差  $e_n = x_n - x_1^*$ , 对由方程(2)~(4)构成的闭环系统进行局部线性化后, 可以得到

$$\begin{cases} e_2 = ae_1, \\ e_3 = ae_2 = a^2e_1, \\ \vdots \\ e_m = a^{m-1}e_1, \\ e_{m+1} = [a^m + K(a^{m-1} - 1)]e_1, \end{cases} \quad (5)$$

其中  $a = f'(x_1^*)$ .

应用数学归纳法, 可以得到

$$e_{km+1} = [a^m + K(a^{m-1} - 1)]^k e_1. \quad (6)$$

由式(5)可见, 当  $k = 1$  时, 式(6)显然成立. 假设当取  $k - 1$  时, 式(6)成立, 即

$$e_{(k-1)m+1} = [a^m + K(a^{m-1} - 1)]^{k-1} e_1. \quad (7)$$

经过类似的推导, 可以得到

$$\begin{cases} e_{(k-1)m+2} = ae_{(k-1)m+1}, \\ e_{(k-1)m+3} = ae_{(k-1)m+2} = a^2e_{(k-1)m+1}, \\ \vdots \\ e_{(k-1)m+m} = a^{m-1}e_{(k-1)m+1}, \\ e_{(k-1)m+m+1} = [a^m + K(a^{m-1} - 1)]e_{(k-1)m+1}. \end{cases} \quad (8)$$

结合式(7), 可以看到式(6)对于任意的  $k$  均成立. 根据文献[9]的定理, 线性化后的闭环系统(5)与闭环系统(2)有相同的稳定性. 因此, 提出如下定理.

**定理 1** 对于由方程(2)~(4)构成的闭环系统, 周期 1 轨道  $x_1^*$  局部稳定当且仅当

$$|a^m + K(a^{m-1} - 1)| < 1, \quad (9)$$

其中  $a = f'(x_1^*)$ .

事实上, 由于施加了控制器, 由方程(2)~(4)构成的闭环系统改变了原系统(1)的倍周期分岔值. 以  $m = 2$  为例, 当  $n|2 = 0$  时, 闭环系统变为

$$x_{n+1} = f(x_n) + K(x_n - x_{n-1}). \quad (10)$$

作变量代换, 令

$$y_n = x_n, z_n = x_{n-1}, \quad (11)$$

则系统变为

$$\begin{cases} y_{n+1} = f(y_n) + K(y_n - z_n), \\ z_{n+1} = y_n. \end{cases} \quad (12)$$

若系统特征值  $\lambda_1 = -1, |\lambda_2| \neq 1$ , 则系统(12)可能发生倍周期分岔, 当且仅当  $1 + f'(y^*) + 2K = 0$ , 且  $K \neq -f'(y^*), K \neq -(f'(y^*) + 2)^{[10]}$ . 显然, 在闭环系统(10)中, 原系统(1)的倍周期分岔值发生改变.

下面讨论  $T > 1$  的情况. 为了镇定周期  $T$  轨道  $\Sigma_T = \{x_1^*, x_2^*, \dots, x_T^*\}$ , 选取控制器

$$u_n = \varepsilon_n(x_{n-T+1} - x_{n-mT+1}). \quad (13)$$

其中:  $m$  为脉冲间隔;  $K$  为控制增益;  $\varepsilon_n$  定义为

$$\varepsilon_n = \begin{cases} K, & n|(mT) = 0; \\ 0, & n|(mT) \neq 0. \end{cases} \quad (14)$$

由式(3)、(4)和(13)、(14)给出控制器之间关系, 定义函数  $F$  为  $F = f^T$ , 则函数  $f$  的周期  $T$  轨道是函数  $F$  的周期 1 轨道, 即  $F(x_i^*) = x_i^*, i = 1, 2, \dots, T$ . 记

$$z_j = x_{(j-1)T+1}, j = 1, 2, \dots. \quad (15)$$

若  $j|m \neq 0$ , 即  $jT|(mT) \neq 0$ , 则有

$$\begin{aligned} x_{jT+1} &= f(x_{jT}) = f^2(x_{jT-1}) = \dots = \\ &= f^T(x_{(j-1)T+1}), \end{aligned} \quad (16)$$

等价于

$$z_{j+1} = F(z_j). \quad (17)$$

否则, 若  $j|m = 0$ , 即  $jT|(mT) = 0$ , 则有

$$\begin{aligned} x_{jT+1} &= \\ &= f^T(x_{(j-1)T+1}) + K(x_{(j-1)T+1} - x_{jT-mT+1}), \end{aligned} \quad (18)$$

等价于

$$z_{j+1} = F(z_j) + K(z_j - z_{j-m+1}). \quad (19)$$

结合式(17)和(19), 得到

$$z_{j+1} = F(z_j) + u_j. \quad (20)$$

其中

$$u_j = \varepsilon_j(z_j - z_{j-m+1}); \quad (21)$$

$$\varepsilon_j = \begin{cases} K, & j|m = 0; \\ 0, & j|m \neq 0. \end{cases} \quad (22)$$

因此, 如果以式(15)定义的变量  $z$  为变量, 则由式(3)、(4)与(13)、(14)给出的脉冲时滞反馈控制器是等价的.

下面讨论系统(1)周期  $T$  轨道  $\Sigma_T = \{x_1^*, x_2^*, \dots, x_T^*\}$  的局部稳定性. 由以上推导可知,  $x_i^* (i = 1, 2, \dots, T)$  是函数  $F$  的不动点, 因此,  $x_i^*$  稳定当且仅当  $|a^m + K(a^{m-1} - 1)| < 1$ , 其中  $a = F'(x_i^*)$ . 又因为  $F = f^T$ , 有  $a = \prod_{j=1}^T a_j, a_j = f'(x_j^*)$ , 进而得到如下定理.

**定理 2** 对于由方程 (2)、(13) 和 (14) 构成的闭环系统, 周期  $T$  轨道  $\Sigma_T = \{x_1^*, x_2^*, \dots, x_T^*\}$  局部稳定, 当且仅当

$$|a^m + K(a^{m-1} - 1)| < 1, \quad (23)$$

其中  $a = \prod_{j=1}^T a_j, a_j = f'(x_j^*)$ .

**注 1** 由式 (9) 和 (23) 可见, 当  $a \neq 1$  时, 不稳定周期轨道总可以由式 (3)、(4) 或 (13)、(14) 给出的脉冲时滞反馈控制器来镇定. 因此, 脉冲时滞反馈控制方法对于所控制的系统具有很弱的条件限制, 与文献 [1] 相比, 拓宽了控制器的适用范围; 同时, 脉冲控制只需在固定的时刻对原系统施加控制, 具有实现简单方便的优势. 为了满足式 (9) 或 (23), 脉冲间隔  $m$  和控制增益  $K$  等控制参数有多种选择, 可以根据实际需要灵活选取控制参数, 推广了文献 [8] 的结果, 且为了得到相同的控制目标, 脉冲间隔和反馈增益等控制参数有多种选择, 因此脉冲时滞反馈控制方法在实现过程中具有一定的灵活性.

**注 2** 本文所提出的脉冲时滞反馈控制方法可以推广至高维系统. 此时, 式 (1) 中的  $f: R^n \rightarrow R^n$  为可导函数,  $x \in R^n$  为状态变量, 式 (2) 中的  $u_n \in R^n$  为控制输入, 式 (4) 中的  $K \in R^{n \times n}$  为控制增益矩阵, 式 (5) 中的  $a = f'(x_1^*)$  变为  $J = \partial f / \partial x|_{x=x_1^*}$ . 定理 1 变为  $x_1^*$  稳定当且仅当矩阵  $A_1 = J_1^m + K(J_1^{m-1} - I)$  是稳定的. 在定理 2 中, 周期  $T$  轨道  $\Sigma_T = \{x_1^*, x_2^*, \dots, x_T^*\}$  局部稳定, 当且仅当  $A_i = J_i^m + K(J_i^{m-1} - I) (i = 1, 2, \dots, T)$  中至少有一个是稳定的, 其中

$$J_i = D_i D_{i+1} \cdots D_{i+T-1}, D_i = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=x_i^*},$$

$$D_i = D_j, i = j(\text{mod}T).$$

需要说明的是, 关于周期轨道的稳定性, 高维系统与一维系统有不同的结论. 在一维系统中, 数的乘法满足交换律, 定理 2 中对于不同的  $x_i^*, a$  的值是相同的, 因此, 在施加控制器的闭环系统中, 不同的  $x_i^*$  的稳定性相同. 对于高维系统, 当  $i \neq j$  时,  $D_i$  与  $D_j$  可能会不相等, 而矩阵乘法不满足交换律, 因此  $J_i$  与  $J_j$  可能会不同. 对于给定控制增益矩阵  $K, A_i$  与  $A_j$  的特征值可能会不同, 即稳定性不同, 因此施加控制器的闭环系统中,  $x_i^*$  与  $x_j^*$  的稳定性可能会不同. 但在原系统中, 尽管  $J_i$  与  $J_j$  可能会不同, 但特征值相同, 因此  $x_i^*$  与  $x_j^*$  的稳定性相同.

## 2 应用分析

### 2.1 模型

继文献 [11] 提出小世界网络模型以来, 文献 [12] 在此基础上加入了事件在长距离连接上的时间延时,

并考虑了非线性因素, 即由网络拥塞等导致的非线性耦合得出动力学模型

$$x_{n+1} = \xi + 2x_n - \mu \xi x_n^2. \quad (24)$$

其中:  $x$  用来度量事件在网络中的影响范围,  $\xi$  为 Newman-Watts 长度标度,  $\mu$  为网络中非线性相互作用的系数.

经过计算, 模型 (24) 有一个正不动点

$$x_1^* = \frac{1}{2\mu\xi} (1 + \sqrt{1 + 4\mu\xi^2}).$$

$x_1^*$  局部稳定当且仅当  $|2 - 2\mu\xi x_1^*| < 1$ , 保证  $x_1^*$  稳定的参数  $\mu$  的范围为  $0 < \mu < 3\xi^{-2}/4$ . 模型 (24) 有一周期 2 轨道

$$\Sigma_2 = \{x_1^*, x_2^*\}, x_{1,2}^* = \frac{1}{2\mu\xi} (3 \pm \sqrt{-3 + 4\mu\xi^2}).$$

$\Sigma_2$  局部稳定当且仅当  $|(2 - 2\mu\xi x_1^*)(2 - 2\mu\xi x_2^*)| < 1$ , 保证  $\Sigma_2$  稳定的参数  $\mu$  的范围为  $3\xi^{-2}/4 < \mu < 5\xi^{-2}/4$ .

本文选取  $\mu$  为分岔参数, 固定  $\xi = 1.8$ . 图 1 为系统 (24) 的分岔图, 给出了系统 (24) 的倍周期分岔及其导致的混沌.

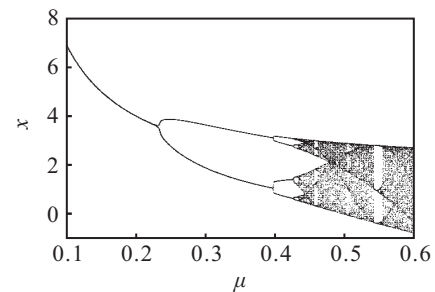


图 1 系统 (24) 的分岔图

### 2.2 控制效果分析和数值仿真

施加脉冲时滞反馈控制后, 受控系统的倍周期分岔及其导致的混沌被延后, 保证系统稳定的参数的范围被增大. 系统的混沌轨道可以被镇定到周期轨道上, 系统的一周期轨道可以被镇定到另一周期轨道上, 具体分析如下.

受控小世界网络模型具有以下形式:

$$x_{n+1} = \xi + 2x_n - \mu \xi x_n^2 + u_n. \quad (25)$$

为了镇定不动点  $x_1^*$ , 控制输入  $u_n$  由式 (3) 和 (4) 给出. 显然, 受控系统 (25) 与原系统 (24) 有相同的不动点.

根据定理 1, 当  $m = 2$  时,  $x_1^*$  局部稳定当且仅当

$$|a^2 + K(a - 1)| < 1. \quad (26)$$

其中:  $a = 1 - \sqrt{1 + 4\mu\xi^2}, K$  为控制增益. 保证  $x_1^*$  稳定的参数  $\mu$  的范围为

$$0 < \mu < \frac{1}{4\xi^2} (3 + 4K + K^2). \quad (27)$$

注意到式 (26) 等价于

$$-(1 + a^2) < K(a - 1) < 1 - a^2, \quad (28)$$

其中  $a = 1 - \sqrt{1 + 4\mu\xi^2} < 1$ . 则增益  $K$  的范围为

$$-(a + 1) < K < \frac{a^2 + 1}{1 - a}. \quad (29)$$

若  $x_1^*$  不稳定, 则  $a < -1$ ,  $K$  为正数. 因此, 由式 (27) 可见, 参数  $\mu$  的范围被增大.

为了镇定周期 2 轨道  $\Sigma_2 = \{x_1^*, x_2^*\}$ , 控制器由式 (13) 和 (14) 给出. 若  $m = 2$ , 则根据定理 2,  $\Sigma_2$  局部稳定当且仅当

$$|a^2 + K(a - 1)| < 1. \quad (30)$$

其中:  $a = a_1 a_2$ ,  $a_1 = 2 - 2\mu\xi x_1^*$ ,  $a_2 = 2 - 2\mu\xi x_2^*$ . 保证  $\Sigma_2$  稳定的参数  $\mu$  的范围为

$$\frac{3}{4}\xi^{-2} < \mu < \frac{5 + K}{4\xi^2}. \quad (31)$$

类似地, 可以证明  $K$  为正数, 参数  $\mu$  的范围被增大.

图 2 为系统(24)的分岔控制效果, 图 3 为系统(24)的混沌控制效果. 与图 1 相比, 图 2(a)表明系统 (24) 的

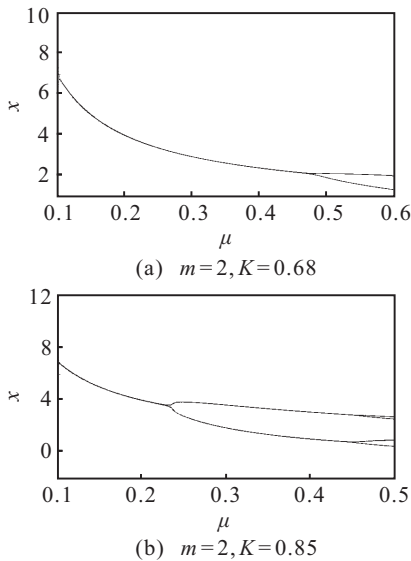


图 2 系统 (24) 的分岔控制效果

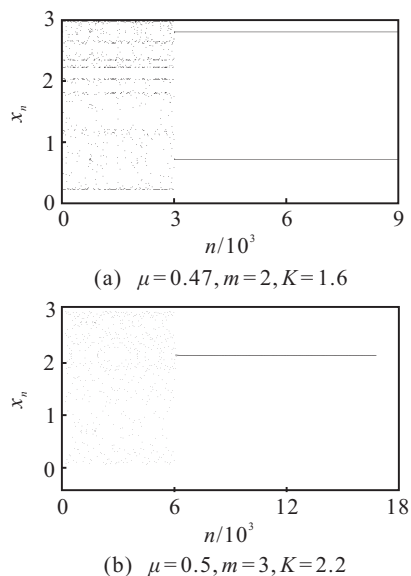


图 3 系统 (24) 的混沌控制效果

第 1 次倍周期分岔被延后,图 2(b)表明系统 (24) 的第 2 次倍周期分岔被延后,图 3 表明通过选取适当的控制参数, 混沌轨道可以被镇定到周期 2 轨道和周期 1 轨道上.

图 4 为系统 (24) 的周期 4 轨道被镇定到周期 1 轨道. 图 4 表明, 系统的一周期轨道可以被控制到另一周期轨道上, 并且, 当选取不同控制参数时, 系统可能被镇定到同一周期轨道上.

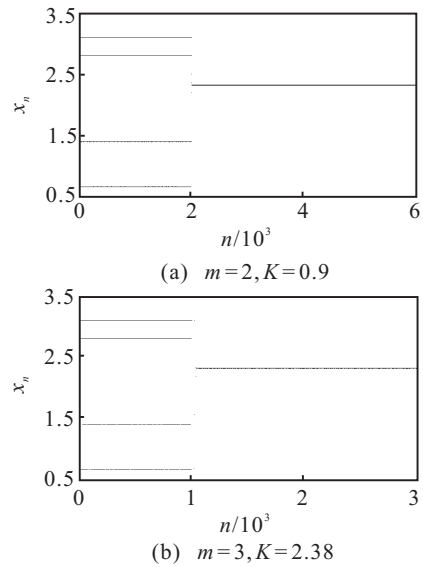


图 4 系统 (24) 的周期 4 轨道被镇定到周期 1 轨道

上述仿真结果表明, 在施加脉冲时滞反馈控制器后, 通过选取适当的控制参数, 小世界网络模型 (24) 可以被控制到所期望的周期轨道上. 并且, 当选取不同的控制参数时, 可能会得到相同的控制效果, 因此, 可以根据实际需要选取恰当的控制参数. 这也表明本文所提出的脉冲时滞反馈控制器在实现过程中具有一定的灵活性.

### 3 结 论

本文提出了一类脉冲时滞反馈控制方法, 用来控制离散系统中的倍周期分岔及其导致的混沌, 镇定不稳定周期轨道, 并研究了该方法在一个离散小世界网络模型中的应用问题. 研究表明, 通过选取恰当的脉冲间隔和控制增益等控制参数, 受控系统的倍周期分岔通向混沌的道路可以被延后, 系统可以在更大的参数值范围内保持稳定, 镶嵌在混沌吸引子内部的不稳定周期轨道可以被镇定. 关于脉冲时滞反馈控制方法的问题有待进一步研究, 如利用这类方法镇定连续系统的不稳定周期轨道以及这种方法在生物动力系统现实系统中的应用问题等.

### 参考文献(References)

[1] Pyragas K. Continuous control of chaos by self controlling feedback[J]. Physics Letters A, 1992, 170(6): 421-428.

- [2] Ushio T. Limitation of delayed feedback control in nonlinear discrete-time systems[J]. *IEEE Trans on Circuits and Systems: Fundamental Theory and Applications*, 1996, 43(9): 815-816.
- [3] 陈亮, 韩正之. 时滞反馈控制的局限性及其改进[J]. *控制与决策*, 2004, 19(6): 621-625.  
(Chen L, Han Z Z. Limitation of the delayed feedback control and its modification[J]. *Control and Decision*, 2004, 19(6): 621-625.)
- [4] Morgül Ö. On the stability of delayed feedback controllers[J]. *Physics Letters A*, 2003, 314(4): 278-285.
- [5] Lehnert J, Hövel P, Flunkert V, et al. Adaptive tuning of feedback gain in time-delayed feedback control[J]. *Chaos*, 2011, 21(4): 043111.
- [6] Flunkert V, Schöll E. Towards easier realization of time-delayed feedback control of odd-number orbits[J]. *Physical Review E*, 2011, 84(1): 016214.
- [7] Le L B, Konishi K, Hara N. Design and experimental verification of multiple delay feedback control for time-delay nonlinear oscillators[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2012, 67(2): 1407-1418.
- [8] Morgül Ö. Stabilization of unstable periodic orbits for discrete time chaotic systems by using periodic feedback[J]. *Int J of Bifurcation and Chaos*, 2006, 16(2): 311-323.
- [9] 刘小河. 非线性系统分析与控制引论[M]. 北京: 清华大学出版社, 2007: 125-139.  
(Liu X H. *Analysis and control of nonlinear system introduction*[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2007: 125-139.)
- [10] Liu X L, Xiao D M. Complex dynamic behaviors of a discrete-time predator-prey system[J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2007, 32(1): 80-94.
- [11] Watts D J, Strogatz S H. Collective dynamics of small-world networks[J]. *Nature*, 1998, 393(6684): 440-442.
- [12] Yang X S. Chaos in small-world networks[J]. *Physical Review E*, 2001, 63(4): 046206.

(责任编辑: 郑晓蕾)