文章编号: 1001-0920 (2014) 07-1193-06 DOI: 10.13195/j.kzyjc.2013.0617

灰色二层多目标线性规划问题及其解法

郭 欢[1,2], 肖新平[1], Jeffrey Forrest[3]

(1. 武汉理工大学 理学院，武汉 430063；2. 江汉大学 数学与计算机科学学院，武汉 430056；3. 宾州州立SR大学 数学系，匹兹堡 16057)

摘 要: 针对二层多目标线性规划问题, 结合灰色系统的特性, 提出了一般灰色二层多目标线性规划问题, 并给出了模型的相关定义和定理. 针对漂移型灰色二层多目标线性规划问题, 提出一种具有全局收敛性质的求解算法. 首先通过线性加权模理想点法把多目标转化为单目标; 然后当可行域为非空紧集时, 利用库恩塔克条件把双层转化为单层, 再利用粒子群算法搜索单目标单层线性规划即可得到原问题的解; 最后通过算例表明了该算法的有效性.

关键词: 灰色系统；二层多目标规划；理想点法；库恩塔克条件；粒子群算法

中图分类号: TP273 **文献标志码:** A

Problem of grey bilevel multi-objective linear programming and its algorithm

GUO Huan[1,2], *XIAO Xin-ping*[1], *Jeffrey Forrest*[3]

(1. School of Science，Wuhan University of Technology，Wuhan 430063，China；2. School of Mathematics and Computer Science，Jianghan University，Wuhan 430056，China；3. Mathematic Department，Slippery Rock University，PA 16057，USA. Correspondent：GUO Huan，E-mail：guohuan.2007@163.com)

Abstract: Based on the bilevel multi-objective linear programming and the characteristic of grey system, the general gray bilevel multi-objective linear programming problem with its relevant definition and theorem are given. A globally convergent algorithm is given to solve the drifting grey bilevel multi-objective linear programming problem. Firstly, multi-objective programming is transformed into single programming by using linear plus power ideal point algorithm. Then, the grey bilevel linear programming can be transformed into a grey linear programming problem by its Kuhn-Tucker condition when the feasible domain is nonempty compact aggregate. So these problems can be solved by using the particle swarm optimization algorithm to obtain the solution of the gray bilevel multi-objective linear programming problem. Finally, an example shows the effectiveness of the proposed algorithm.

Key words: grey system；bilevel multi-objective programming；ideal point algorithm；Kuhn-Tucker condition；particle swarm optimization

0 引 言

二层规划是一种递阶结构系统, 该系统由两个决策者控制, 即上层决策者和下层决策者, 每个决策者有自己的决策变量、目标函数和约束条件[1-2]. 上层决策者的目标函数和约束条件不仅与上层决策变量有关, 而且依赖于下层决策者的最优解; 反之, 下层决策者的最优解又受上层决策变量的影响. 目前, 关于二层线性规划 (BLP) 的研究较多[3-8]. 当上层和下层决策者的决策目标有多个时, 二层线性规划将变成二层多目标线性规划(BMLP)[9-10].

到目前为止, 人们对一些特殊结构的 BMLP 进行了研究, 给出了最优性理论和相关求解算法, 并应用二层多目标规划的决策思想和优化技术成功地解决了经济管理、资源分配、交通控制等领域中的实际问题. 在道路交通系统中[11], 管理者制定了相关收费政策和行车规定, 以达到高道路通行率和低尾气排放量的目标; 而出行者则在当前收费政策和行车规定下选择出行方式和出行路线, 以达到总体所需时间小、出行花费小的目标. 现在的问题是: 当出行是随机行为时, 为了实现最优的出行性价比和道路利用率, 管理

收稿日期: 2013-05-13；**修回日期:** 2013-10-21.

基金项目: 高等学校博士学科点专项科研基金项目(20120143110001)；武汉理工大学国际交流预研项目(2012-JL-06).

作者简介: 郭欢(1984−), 女, 博士生, 从事系统控制与优化的研究；肖新平(1965−), 男, 教授, 博士生导师, 从事灰系统理论、系统控制与优化等研究.

者应如何制定收费政策和行车规定, 出行者根据当前的相关规定选择何种出行方式以及如何确定出行路线. 根据Stackelberg对策论, 该问题是一个典型的主从递阶多目标决策问题, 即二层多目标线性规划问题[12]. 此问题与一般模型不同: 其决策系数(出行花费、所需时间等)在一定范围内是变化的, 即具有灰色特征[13-14]. 为此, 本文研究了灰色二层多目标线性规划问题(GBMLP), 提出一种具有全局收敛性质的求解算法.

1 一般灰色二层多目标线性规划

定义 1 一般灰色二层多目标线性规划模型(GBMLP)可以表示为

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}_1:\ \max_x\ S^1(x,y)=C^1(\otimes)\cdot x+D^1(\otimes)\cdot y\\&\qquad (y\text{是下层问题的解});\\&\mathrm{P}_2:\ \max_y\ S^2(x,y)=C^2(\otimes)\cdot x+D^2(\otimes)\cdot y;\\&\qquad \text{s.t. } A(\otimes)\cdot x+B(\otimes)\cdot y\leqslant r(\otimes),\\&\qquad x\geqslant 0,\ y\geqslant 0.\end{aligned}\tag{1}$$

其中: $\otimes$是灰参数集, $S^1(x,y):\ R^{n_1}\times R^{n_2}\to R$是上层目标函数, $S^2(x,y):\ R^{n_1}\times R^{n_2}\to R$是下层目标函数, $x\in R^{n_1}$是上层决策变量, $y\in R^{n_2}$是下层决策变量. 具体表达式如下:

$$\begin{aligned}&S^1=[s^1_1,s^1_2,\cdots,s^1_{m_1}]',\ S^2=[s^2_1,s^2_2,\cdots,s^2_{m_2}]';\\&C^1(\otimes)=[c^1_{ij}(\otimes)]_{m_1n_1},\ C^2(\otimes)=[c^2_{ij}(\otimes)]_{m_2n_1};\\&D^1(\otimes)=[d^1_{ij}(\otimes)]_{m_1n_2},\ D^2(\otimes)=[d^2_{ij}(\otimes)]_{m_2n_2};\\&A(\otimes)=[a_{ij}(\otimes)]_{kn_1},\ B(\otimes)=[b_{ij}(\otimes)]_{kn_2};\\&c^1_{ij}(\otimes)\in[\underline{c}^1_{ij},\bar{c}^1_{ij}],\\&i=1,2,\cdots,m_1,\ j=1,2,\cdots,n_1;\\&c^2_{ij}(\otimes)\in[\underline{c}^2_{ij},\bar{c}^2_{ij}],\\&i=1,2,\cdots,m_2,\ j=1,2,\cdots,n_1;\\&d^1_{ij}(\otimes)\in[\underline{d}^1_{ij},\bar{d}^1_{ij}],\\&i=1,2,\cdots,m_1,\ j=1,2,\cdots,n_2;\\&d^2_{ij}(\otimes)\in[\underline{d}^2_{ij},\bar{d}^2_{ij}],\\&i=1,2,\cdots,m_2,\ j=1,2,\cdots,n_2;\\&a_{ij}(\otimes)\in[\underline{a}_{ij},\bar{a}_{ij}],\\&i=1,2,\cdots,k,\ j=1,2,\cdots,n_1;\\&b_{ij}(\otimes)\in[\underline{b}_{ij},\bar{b}_{ij}],\\&i=1,2,\cdots,k,\ j=1,2,\cdots,n_2;\\&r(\otimes)=[r_1(\otimes),r_2(\otimes),\cdots,r_k(\otimes)]',\\&r_i(\otimes)\in[\underline{r}_i,\bar{r}_i],\ i=1,2,\cdots,k;\\&x=[x_1,x_2,\cdots,x_{n_1}]';\ y=[y_1,y_2,\cdots,y_{n_2}]'.\end{aligned}$$

记

$$G=\{(x,y)|A(\otimes)\cdot x+B(\otimes)\cdot y\leqslant r(\otimes),x,y\geqslant 0\}\tag{2}$$

为GBMLP的约束域, 向上层决策空间投影约束域G有$T=\{x:(x,y)\in G\}$; 下层规划对应一个固定$x\in T$的约束域为$\Omega(x)=\{y|B(\otimes)\cdot y\leqslant r(\otimes)-A(\otimes)\cdot x,y\geqslant 0\}$. 当$n_1=n_2=1$时, 为一般灰线性双层规划GBLP.

定义 2 $\forall x\in T$, 若y是下层规划对应于x的有效解(即不存在$y_1\in\Omega(x)$, 使$(x,y_1)\in G$, $S^2(x,y)\leqslant S^2(x,y_1)$, $S^2(x,y)\neq S^2(x,y_1)$), 则称(x,y)是GBMLP的可行解, 可行解集记为R.

定义 3 $\forall(x,y)\in R$, 若不存在$(x',y')\in R$, 使$S^1(x,y)\leqslant S^1(x',y')$, 则称$(x,y)$是GBMLP的有效解, 有效解集记为$E$.

定义 4 设$\rho,\beta,\delta\in[0,1]$为模型的白化系数, 灰系数可通过下式白化:

$$\begin{aligned}&\tilde{c}^1_{ij}(\otimes)=\underline{c}^1_{ij}+\rho(\bar{c}^1_{ij}-\underline{c}^1_{ij}),\\&i=1,2,\cdots,m_1,j=1,2,\cdots,n_1;\\&\tilde{c}^2_{ij}(\otimes)=\underline{c}^2_{ij}+\rho(\bar{c}^2_{ij}-\underline{c}^2_{ij}),\\&i=1,2,\cdots,m_2,j=1,2,\cdots,n_1;\\&\tilde{d}^1_{ij}(\otimes)=\underline{d}^1_{ij}+\rho(\bar{d}^1_{ij}-\underline{d}^1_{ij}),\\&i=1,2,\cdots,m_1,j=1,2,\cdots,n_2;\\&\tilde{d}^2_{ij}(\otimes)=\underline{d}^2_{ij}+\rho(\bar{d}^2_{ij}-\underline{d}^2_{ij}),\\&i=1,2,\cdots,m_2,j=1,2,\cdots,n_2;\\&\tilde{a}_{ij}(\otimes)=\underline{a}_{ij}+\beta(\bar{a}_{ij}-\underline{a}_{ij}),\\&i=1,2,\cdots,k,j=1,2,\cdots,n_1;\\&\tilde{b}_{ij}(\otimes)=\underline{b}_{ij}+\beta(\bar{b}_{ij}-\underline{b}_{ij}),\\&i=1,2,\cdots,k,j=1,2,\cdots,n_2;\\&\tilde{r}_i(\otimes)=\underline{r}_i+\delta(\bar{r}_i-\underline{r}_i),\ i=1,2,\cdots,k.\end{aligned}$$

则称

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}_1:\ \max_x\ S^1(x,y)=\tilde{C}^1(\otimes)\cdot x+\tilde{D}^1(\otimes)\cdot y\\&\qquad (y\text{是下层问题的解});\\&\mathrm{P}_2:\ \max_y\ S^2(x,y)=\tilde{C}^2(\otimes)\cdot x+\tilde{D}^2(\otimes)\cdot y;\\&\qquad \text{s.t. } \tilde{A}(\otimes)\cdot x+\tilde{B}(\otimes)\cdot y\leqslant\tilde{r}(\otimes),\\&\qquad x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\end{aligned}\tag{3}$$

为(ρ,β,δ)定位规划, 记为GBMLP(ρ,β,δ). 其上层目标函数有效值记为$\max S^1(\rho,\beta,\delta)$, 其约束域可写为$G(\beta,\delta)$, 其可行域记为$R(\rho,\beta,\delta)$.

定理 1 在可行域$R(\rho,\beta,\delta)$中, 固定白化系数ρ, 可以得到如下结论: 1) 对于$\forall\beta_1,\beta_2,\delta\in[0,1]$, 若$\beta_1\leqslant\beta_2$, 则$R(\beta_2,\delta)\subseteq R(\beta_1,\delta)$; 2) 对于$\forall\beta,\delta_1,\delta_2\in[0,1]$, 若$\delta_1\leqslant\delta_2$, 则$R(\beta,\delta_1)\subseteq R(\beta,\delta_2)$.

证明　1) 先证 $S(\beta_2,\delta)\subseteq S(\beta_1,\delta)$. 设模型约束条件系数分别为 $A(\beta),B(\beta),r(\delta)$, 任取 $(x,y)\in G(\beta_2,\delta)$, 由已知可得 $A(\beta_2)x+B(\beta_2)y\leqslant r(\delta)$, 则有

$$\begin{aligned}&A(\beta_1)x+B(\beta_1)y=\\&[A(\beta_1)-A(\beta_2)]x+[B(\beta_1)-B(\beta_2)]y+\\&A(\beta_2)x+B(\beta_2)y=\\&(\beta_1-\beta_2)(\bar{A}-\underline{A})x+(\beta_1-\beta_2)(\bar{B}-\underline{B})y+\\&A(\beta_2)x+B(\beta_2)y.\end{aligned}$$

因为 $\beta_1\leqslant\beta_2,x,y\geqslant 0$, 有 $A(\beta_1)x+B(\beta_1)y\leqslant A(\beta_2)x+B(\beta_2)y\leqslant r(\delta)$, 所以 $(x,y)\in G(\beta_1,\delta)$. 从而, 对于固定白化系数 ρ, 任取 $(x^*,y^*)\in R(\beta_2,\delta)$, 有 $(x^*,y^*)\in R(\beta_2,\delta)$, $(x^*,y^*)\in R(\beta_1,\delta)$. 由于

$$\begin{aligned}&\max_y S^1(x,y)=\\&\max\,(\underline{C}^1+\rho(\bar{C}^1-\underline{C}^1))\cdot x+(\underline{D}^1+\rho(\bar{D}^1-\underline{D}^1))\cdot y,\end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned}&\max_y S^1(x,y)=S^1(x^*,y^*)=\\&\max\,(\underline{C}^1+\rho(\bar{C}^1-\underline{C}^1))\cdot x^*+(\underline{D}^1+\rho(\bar{D}^1-\underline{D}^1))\cdot y^*.\end{aligned}$$

固定 ρ 的值, 可知 (x^*,y^*) 使得上层目标函数 $S^1(x,y)$ 在 $R(\beta_1,\delta)$ 上也是有效值, 于是 $(x^*,y^*)\in R(\beta_1,\delta)$, 即 $R(\beta_2,\delta)\subseteq R(\beta_1,\delta)$.

2) 任取 $(x,y)\in G(\beta,\delta_1)$, 由于 $\delta_1\leqslant\delta_2$, 得 $r(\delta_1)\leqslant r(\delta_2)$, 有 $A(\beta)x+B(\beta)y\leqslant r(\delta_1)\leqslant r(\delta_2)$, 所以 $(x,y)\in G(\beta,\delta_2)$, 有 $G(\beta,\delta_1)\subseteq G(\beta_1,\delta_2)$. 对于固定白化系数 ρ, 任取 $(x^*,y^*)\in R(\beta,\delta_1)$, 则有 $(x^*,y^*)\in G(\beta,\delta_1)$, 亦有 $(x^*,y^*)\in G(\beta,\delta_2)$. 由 1) 的证明可知, (x^*,y^*) 使上层目标函数 $S^1(x,y)$ 在 $G(\beta,\delta_2)$ 上也是有效值, 有 $(x^*,y^*)\in R(\beta,\delta_2)$, 即 $R(\beta,\delta_1)\subseteq R(\beta,\delta_2)$. □

定理 2　在可行域 $R(\rho,\beta,\delta)$ 中, 可得下列结论:

1) 如果 $\rho_1\leqslant\rho_2$, 则对于固定的 $\beta,\delta\in[0,1]$, 有

$$\max s_i^k(\rho_1,\beta,\delta)\leqslant\max s_i^k(\rho_2,\beta,\delta);\tag{4}$$

2) 如果 $\beta_1\leqslant\beta_2$, 则对于固定的 $\rho,\delta\in[0,1]$, 有

$$\max s_i^k(\rho,\beta_1,\delta)\leqslant\max s_i^k(\rho,\beta_2,\delta);\tag{5}$$

3) 如果 $\delta_1\geqslant\delta_2$, 则对于固定的 $\rho,\beta\in[0,1]$, 有

$$\max s_i^k(\rho,\beta,\delta_1)\leqslant\max s_i^k(\rho,\beta,\delta_2).\tag{6}$$

其中: 当 $k=1$ 时, $i=1,2,\cdots,m_1$; 当 $k=2$ 时, $i=1,2,\cdots,m_2$.

证明　1) 令 $\underline{C}^k=(\underline{c}_{ij}^k)_{m_kn_1}$, $\bar{C}^k=(\bar{c}_{ij}^k)_{m_kn_1}$, $\underline{D}^k=(\underline{d}_{ij}^k)_{m_kn_2}$, $\bar{D}^k=(\bar{d}_{ij}^k)_{m_kn_2}$, 则 $C_i^k(\rho)=\underline{C}_i^k+\rho(\bar{C}_i^k-\underline{C}_i^k)$, $D_i^k(\rho)=\underline{D}_i^k+\rho(\bar{D}_i^k-\underline{D}_i^k)$. 当 $k=1$ 时, $i=1,2,\cdots,m_1$; 当 $k=2$ 时, $i=1,2,\cdots,m_2$. 根据运筹学中一般规划问题的相关性质[15], 对于任意 $(x,y)\in E$, 有

$$\begin{aligned}&C_i^k(\rho_1)\cdot x+D_i^k(\rho_1)\cdot y=\\&[C_i^k(\rho_2)\cdot x+D_i^k(\rho_2)\cdot y]+[C_i^k(\rho_1)\cdot x-C_i^k(\rho_2)\cdot x+\\&D_i^k(\rho_1)\cdot y-D_i^k(\rho_2)\cdot y]=\\&[C_i^k(\rho_2)\cdot x+D_i^k(\rho_2)\cdot y]+[(\rho_1-\rho_2)(\bar{C}_i^k-\underline{C}_i^k)\cdot x+\\&(\rho_1-\rho_2)(\bar{D}_i^k-\underline{D}_i^k)\cdot y].\end{aligned}$$

因 $\rho_1\leqslant\rho_2\,x\geqslant 0,\ y\geqslant 0$, 故

$$C_i^k(\rho_1)\cdot x+D_i^k(\rho_1)\cdot y\leqslant C_i^k(\rho_2)\cdot x+D_i^k(\rho_2)\cdot y,$$

所以

$$\max s_i^k(\rho_1,\beta,\delta)\leqslant\max s_i^k(\rho_2,\beta,\delta).$$

2) 因为 $\beta_1\leqslant\beta_2$, 由定理 1 有 $R(\beta_1,\delta)\subseteq R(\beta_2,\delta)$, 所以 $\max s_i^k(\rho,\beta_1,\delta)\leqslant\max s_i^k(\rho,\beta_2,\delta)$.

同理可证 3). □

定义 5　当 $\rho=\delta=1$, $\beta=0$ 时, 对应的定位规划 GBMLP(1, 0, 1) 称为 GBMLP 的理想模型, 其上层和下层目标函数最优值分别记为 $\max\bar{s}_i^k$; 当 $\rho=\delta=0,\beta=1$ 时, 对应的定位规划 GBML$P(0,1,0)$ 为 GBMLP 的临界模型, 其上层和下层目标函数最优值分别记为 $\max\underline{s}_i^k$. 其中: 当 $k=1$ 时, $i=1,2,\cdots,m_1$; 当 $k=2$ 时, $i=1,2,\cdots,m_2$.

定理 3　在 GBMLP(ρ,β,δ) 中, 把下层目标函数表达式看作上层问题的约束条件, 则对于任意 $\rho,\beta,\delta\in[0,1]$, 有

$$\max\underline{s}_i^k\leqslant\max s_i^k(\rho,\beta,\delta)\leqslant\max\bar{s}_i^k.\tag{7}$$

其中: 当 $k=1$ 时, $i=1,2,\cdots,m_1$; 当 $k=2$ 时, $i=1,2,\cdots,m_2$.

证明　先证 $\max\underline{s}_i^k\leqslant\max s_i^k(0,1,0)\leqslant\max s_i^k(\rho,\beta,\delta)$. 根据运筹学中一般规划问题的相关性质[15], 由于上下层目标函数均为线性函数且 $x,y\geqslant 0,\rho\geqslant 0,\beta\geqslant 0,\delta\geqslant 0$, 则 $\max s_i^k(0,1,0)\leqslant\max\bar{s}_i^k(\rho,1,0)$. 又因为 $\beta\in[0,1],\delta\geqslant 0$, 由定理 1 可得

$$R(1,0)\subseteq R(\beta,0),\ R(\beta,0)\subseteq R(\beta,\delta).$$

由定理 2 有

$$\max s_i^k(\rho,1,0)\leqslant\max s_i^k(\rho,\beta,0)\leqslant\max s_i^k(\rho,\beta,\delta).$$

联立上述关系式可得

$$\max\underline{s}_i^k\leqslant\max s_i^k(\rho,\beta,\delta).$$

同理可证

$$\max f_1(\rho,\beta,\delta)\leqslant\max\bar{f}_1(1,0,1)=\max\bar{f}_1.$$

结论成立. □

2　灰色二层多目标漂移型线性规划

2.1　模型与定义

定义 6　灰色二层多目标漂移型线性规划, 是指有界灰参数按一致方式取数的规划, 即令 $\rho=\beta=$

$\delta=\theta$, 其模型表达式为

$$\mathrm{P}_1:\ \max_{x}\ S^1(x,y)=C_\theta^1(\otimes)\cdot x+D_\theta^1(\otimes)\cdot y$$

$$(y\text{是下层问题的解});$$

$$\mathrm{P}_2:\ \max_{y}\ S^2(x,y)=C_\theta^2(\otimes)\cdot x+D_\theta^2(\otimes)\cdot y;$$

$$\text{s.t.}\ A_\theta(\otimes)\cdot x+B_\theta(\otimes)\cdot y\leqslant r_\theta(\otimes),$$

$$x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ 0\leqslant\theta\leqslant 1. \tag{8}$$

称上述模型为 θ 定位规划, 记为 GBMLP(θ), 其约束域为 $G(\theta)$, 可行域为 $R(\theta)$. 假设所有目标函数为关于 x, y 连续可微的凸函数且其可行域 $R(\theta)$ 是非空紧集.

2.2 模型的求解方法

2.2.1 线性加权模理想点法转化多目标为单目标

对于 GBMLP(θ) 模型的下层规划问题, 根据定理 3 求解诸单目标函数最优解 (x^*,y^*) 对应的最优值 $\max\limits_{(x,y)\in R} s_i^2(x,y)=s_i^2(x^*,y^*)$, 记 $s_i^{2^*}=s_i^2(x^*,y^*), i=1,2,\cdots,m_2, S^{2*}=(s_1^{2^*},s_2^{2^*},\cdots,s_{m_2}^{2}{}^*)$ 称为理想点. 构造单目标规划

$$\mathrm{P}_2':\ \min_{(x,y)\in R}\ S^{2'}(x,y)=\sum_{i=1}^{m_2}\lambda_i(\,s_i^2(x,y)-s_i^{2*}), \tag{9}$$

其中权系数

$$\lambda\in\Lambda=\Big\{\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{m_2})|\forall\lambda_i>0,\sum_{i=1}^{m_2}\lambda_i=1\Big\}.$$

定理 4 对于每个给定的 $\lambda\in\Lambda$, 相应于 P_2' 的最优解必是 P_2 的有效解.

证明 设 (x',y') 是 P_2' 的最优解, 对于 $\forall(x,y)\in R$, 有

$$\sum_{i=1}^{m_2}\lambda_i(\,s_i^2(x',y')-s_i^{2*})\leqslant\sum_{i=1}^{m_2}\lambda_i(\,s_i^2(x,y)-s_i^{2*}). \tag{10}$$

若 (x',y') 不是 P_2 的有效解, 根据定义 2, 即存在 $y_1\in\Omega(x)$, 使 $(x,y_1)\in G, S^2(x',y_1)\leqslant S^2(x',y')$ 且 $S^2(x',y_1)\neq S^2(x',y')$, 则有

$$\sum_{i=1}^{m_2}\lambda_i(\,s_i^2(x',y^1)-s_i^{2*})\leqslant\sum_{i=1}^{m_2}\lambda_i(\,s_i^2(x',y')-s_i^{2*}). \tag{11}$$

式 (11) 与不等式 (10) 矛盾, 所以定理结论成立. □

可以将下层多目标规划转化为单目标规划, 于是 GBMLP(θ) 模型相应地转换为如下形式:

$$\mathrm{P}_1:\ \max_{x}\ S^1(x,y)=C_\theta^1(\otimes)\cdot x+D_\theta^1(\otimes)\cdot y$$

$$(y\text{是下层问题的解});$$

$$\mathrm{P}_2':\ \min_{y}\ S^{2'}(x,y)=\sum_{i=1}^{m_2}\lambda_i(\,s_i^2(x,y)-s_i^{2*});$$

$$\text{s.t.}\ A_\theta(\otimes)\cdot x+B_\theta(\otimes)\cdot y\leqslant r_\theta(\otimes),$$

$$\lambda_i>0,\ i=1,2,\cdots,m_2,\ \sum_{i=1}^{m_2}\lambda_i=1,$$

$$x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ 0\leqslant\theta\leqslant 1. \tag{12}$$

2.2.2 库恩塔克条件转化双层为单层

定理 5 对于 GBMLP(θ), 给定上层规划中 $x\in R(\theta)$ 时, y 为下层规划最优解的充要条件是: $\exists u\geqslant 0$ 且 $u=[u_1,u_2,\cdots,u_k]'$, 使得 y 满足如下约束条件:

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=1}^{m_2}\lambda_i\nabla_y(\,s_i^2(x,y)-s_i^{2*})+\\ \displaystyle\sum_{j=1}^{k}u_j\nabla_y(\,A_j^\theta(\otimes)x+B_j^\theta(\otimes)y-r_j^\theta(\otimes))=0;\\ A^\theta(\otimes)x+B^\theta(\otimes)y-r^\theta(\otimes)\leqslant 0;\\ u_j(r_j^\theta(\otimes)-A_j^\theta(\otimes)x-B_j^\theta(\otimes)y)=0;\\ x,y\geqslant 0,\ u_j\geqslant 0,\ j=1,2,\cdots,k;\\ \displaystyle\lambda_i>0,\ \sum_{i=1}^{m_2}\lambda_i=1,\ i=1,2,\cdots,m_2.\end{cases} \tag{13}$$

证明 当 θ 值给定时, 上层给定某个 $x\in R(\theta)$, GBMLP(θ) 的下层规划转化为关于 y 的单层线性规划问题. 已知目标函数 $S^{2'}(x,y)$ 与约束条件在非负象限均连续可微且具有凸性, 可行域 $R(\theta)$ 为非空紧集, 则此规划在 $R(\theta)$ 上满足库恩塔克极值条件且为充要条件. 由库恩塔克充分性定理[16], 若 $y\in R(\theta)$ 是下层规划的最优解, 则存在 $u=[u_1,u_2,\cdots,u_k]'$ 使得: 1) 边际条件为 $\nabla_y S^{2'}(y,u)\leqslant 0,\ A^\theta(\otimes)x+B^\theta(\otimes)y-r^\theta(\otimes)\leqslant 0$; 2) 互补松弛条件为 $y\nabla_y S^{2'}(y,u)=0,\ u_i(r_i^\theta(\otimes)-A_i^\theta(\otimes)x-B_i^\theta(\otimes)y)=0$; 3) 非负条件为 $y\geqslant 0,\ u\geqslant 0$. 其中 $S^{2'}(y,u)=S^{2'}(x,y)+\sum\limits_{i=1}^{k}u_i(r_i^\theta(\otimes)-A_i^\theta(\otimes)x-B_i^\theta(\otimes)y)$. 通过上述 3 个条件化简即可得到结论. □

用下层规划的库恩塔克条件代替下层规划问题, GBMLP(θ) 模型可转化为等价单层规划. 具体形式为

$$\mathrm{P}_1:\ \max_{x,y,u,\lambda}\ S^1(x,y)=C_\theta^1(\otimes)\cdot x+D_\theta^1(\otimes)\cdot y.$$

$$\text{s.t.}\ \sum_{i=1}^{m_2}\lambda_i\nabla_y(\,s_i^2(x,y)-s_i^{2*})+$$

$$\sum_{j=1}^{k}u_j\nabla_y(\,A_j^\theta(\otimes)x+B_j^\theta(\otimes)y-r_j^\theta(\otimes))=0;$$

$$A^\theta(\otimes)x+B^\theta(\otimes)y-r^\theta(\otimes)\leqslant 0;$$

$$u_j(r_j^\theta(\otimes)-A_j^\theta(\otimes)x-B_j^\theta(\otimes)y)=0;$$

$$x,y\geqslant 0,\ u_j\geqslant 0,\ j=1,2,\cdots,k;$$

$$\lambda_i>0,\ \sum_{i=1}^{m_2}\lambda_i=1,\ i=1,2,\cdots,m_2.$$

此时 GBMLP(θ) 模型即为一般的多目标规划问题. 再次采用线性加权模理想点法求解, 便可得到 GBMLP(θ) 模型的最优解.

由定理3可知, 如果 GBMLP(θ) 问题存在有效解, 则规划问题中目标函数的有效值有界且由θ值决定. 把θ取值看作是对$[0,1]$区间的分割, 令$\max\ S^1 = \max\{S^1(\theta_1), S^1(\theta_2), \cdots, S^1(\theta_n)\}, \theta_i = i/n, i = 0, 1, \cdots, n$, 可知$[0,1]$分割越细, 求得的目标函数值越接近有效值, 故可根据结果精度的要求来确定n的取值.

2.3　模型的求解步骤

综上所述, GBMLP(θ) 问题的求解步骤如下.

1) 针对 GBMLP 问题构造 BMLP(θ) 漂移模型, 并根据定理3～定理5把双层规划转化为单层单目标规划模型, 根据精度要求设定分割数n, 令 $i = 0, \max S^1 = -\inf$;

2) 令$\theta = i/n$, 用粒子群算法求解 BMLP(θ_i), 得到最优解并记为(x_i, y_i), $\max S^1(x,y) = \max\{S^1(x_1, y_1), S^1(x_2, y_2), \cdots, S^1(x_i, y_i)\}$, 令$i = i+1$;

3) 判断i是否小于n, 当$i < n$时, 转到步骤2); 当$i = n$时, 输出最优值$\max S^1$和最优解(x^*, y^*).

3　算例分析

用本文提出的方法求解如下算例:

$$\mathrm{P}_1:\ \max_x \{c_1^1(\otimes)\cdot x + d_1^1(\otimes)\cdot y, c_2^1(\otimes)\cdot x + d_2^1(\otimes)\cdot y\}\ (y\text{是下层问题的解});$$

$$\mathrm{P}_2:\ \max_y \{c_1^2(\otimes)\cdot x + d_1^2(\otimes)\cdot y, c_2^2(\otimes)\cdot x + d_2^2(\otimes)\cdot y\},$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} a_1(\otimes)\cdot x + b_1(\otimes)\cdot y \leqslant 28, \\ a_2(\otimes)\cdot x + b_2(\otimes)\cdot y \leqslant 30, \\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0. \end{cases}$$

其中

$$c_1^1(\otimes) = [3,4],\ d_1^1(\otimes) = [1,3],\ c_2^1(\otimes) = [2,6],$$

$$d_2^1(\otimes) = [3,5],\ c_1^2(\otimes) = [2,3],\ d_1^2(\otimes) = [2,5],$$

$$c_2^2(\otimes) = [1,4],\ d_2^2(\otimes) = [2,6],\ a_1(\otimes) = [4,6],$$

$$b_1(\otimes) = [2,4],\ a_2(\otimes) = [3,5],\ b_2(\otimes) = [3,4].$$

解　构造漂移模型

$$\tilde{c}_1^1(\otimes) = 3+\theta,\ \tilde{d}_1^1(\otimes) = 1+2\theta,\ \tilde{c}_2^1(\otimes) = 2+4\theta,$$

$$\tilde{d}_2^1(\otimes) = 3+2\theta,\ \tilde{c}_1^2(\otimes) = 2+\theta,\ \tilde{d}_1^2(\otimes) = 2+3\theta,$$

$$\tilde{c}_2^2(\otimes) = 1+3\theta,\ \tilde{d}_2^2(\otimes) = 2+4\theta,\ \tilde{a}_1(\otimes) = 4+2\theta,$$

$$\tilde{b}_1(\otimes) = 2+2\theta,\ \tilde{a}_2(\otimes) = 3+2\theta,\ \tilde{b}_2(\otimes) = 3+\theta.$$

首先对 GBMLP(θ) 模型的下层规划问题, 根据定理3求解P_2各目标函数最优解$(4,6)$对应的最优值$s_1^{2*}(4,6) = 42, s_2^{2*}(4,6) = 52$; 然后构造下层规划为单目标规划, 即

$$\mathrm{P}_2':\ \min_{(x,y)\in R}\ S^{2'}(x,y) = \lambda_1(s_1^2(x,y) - s_1^{2*}) + \lambda_2(s_2^2(x,y) - s_2^{2*}),$$
$$\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0,\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1.$$

根据定理4, 此时 GBMLP(θ) 模型转化为

$$\mathrm{P}_1:\ \max_x \{c_1^1(\otimes)\cdot x + d_1^1(\otimes)\cdot y, c_2^1(\otimes)\cdot x + d_2^1(\otimes)\cdot y\};$$

$$\mathrm{P}_2':\ \min_{(x,y)\in R} S^{2'}(x,y) = \lambda_1((2+\theta)x + (2+3\theta)y - 42) + \lambda_2((1+3\theta)x + (2+4\theta)y - 52);$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} (4+2\theta)\cdot x + (2+2\theta)\cdot y \leqslant 28, \\ (3+2\theta)\cdot x + (3+\theta)\cdot y \leqslant 30, \\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0, \\ \lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0,\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1. \end{cases}$$

根据定理5, 此时 GBMLP(θ) 模型转化为

$$\mathrm{P}_1: \max_x\{c_1^1(\otimes)\cdot x + d_1^1(\otimes)\cdot y, c_2^1(\otimes)\cdot x + d_2^1(\otimes)\cdot y\};$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} \lambda_1(2+3\theta) + \lambda_2(2+4\theta) + u_1(2+2\theta) + \\ u_2(3+\theta) = 0, \\ (4+2\theta)\cdot x + (2+2\theta)\cdot y \leqslant 28, \\ (3+2\theta)\cdot x + (3+\theta)\cdot y \leqslant 30, \\ u_1(28 - (4+2\theta)\cdot x - (2+2\theta)\cdot y) = 0, \\ u_2(30 - (3+2\theta)\cdot x - (3+\theta)\cdot y) = 0, \\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0, \\ \lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0,\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1, \\ u_1 \geqslant 0,\ u_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

再由定理3和定理4求解P_1诸单目标函数的最优解及最优值, GBMLP(θ) 模型转化为

$$\mathrm{P}_1':\ \min_{(x,y)\in R} S^{1'}(x,y) = \gamma_1((3+\theta)x + (1+2\theta)y - 34) + \gamma_2((2+4\theta)x + (3+2\theta)y - 54);$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} \lambda_1(2+3\theta) + \lambda_2(2+4\theta) + \\ u_1(2+2\theta) + u_2(3+\theta) = 0, \\ (4+2\theta)\cdot x + (2+2\theta)\cdot y \leqslant 28, \\ (3+2\theta)\cdot x + (3+\theta)\cdot y \leqslant 30, \\ u_1(28 - (4+2\theta)\cdot x - (2+2\theta)\cdot y) = 0, \\ u_2(30 - (3+2\theta)\cdot x - (3+\theta)\cdot y) = 0, \\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0, \\ \lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0,\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1, \\ u_1 \geqslant 0,\ u_2 \geqslant 0, \\ \gamma_1 > 0,\ \gamma_2 > 0,\ \gamma_1 + \gamma_2 = 1. \end{cases}$$

令$n = 100$, 在 Matlab 7.0 环境中编写程序, 运行得到当$\theta = 0.7$时, 有$x = 0.318\,7, y = 7.729\,1$, 因此

$$\max_{x,y,\theta} s_1^1(x,y) = 19.729\,1,\ \max_{x,y,\theta} s_2^1(x,y) = 35.537\,8,$$

$$\max_{x,y,\theta} s_1^2(x,y) = 32.549\,8,\ \max_{x,y,\theta} s_2^2(x,y) = 38.087\,6.$$

可知在上层决策者和下层决策者合作的情况下, 各目标函数最优值可以求得, 目标函数值与灰色白化系数θ的关系如图1所示, 此算法在计算机上操作简单可行.

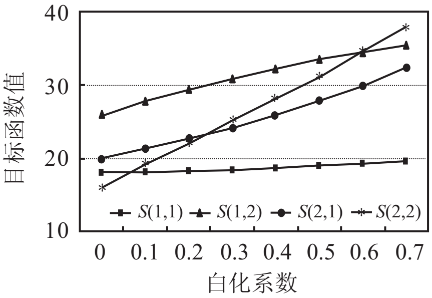

图 1　算例运行结果

4　结　论

本文将各层均有多个目标函数的二层线性规划与灰色理论相结合, 提出了灰色二层多目标线性规划问题, 而灰色特性给问题求解带来了很大的难度. 本文主要针对漂移型灰色二层线性多目标规划问题, 首先通过线性加权模理想点法转化多目标规划为单目标规划; 然后在可行域为非空紧集的情况下, 利用库恩塔克条件将双层规划转化为单层规划; 最后利用粒子群算法搜索转化后的单目标单层线性规划问题即可得到原问题的解. 算例实验表明该算法是有效的.

参考文献(References)

[1] 王先甲, 冯尚友. 二层系统最优化理论[M]. 北京: 科学出版社, 1995: 3-4.
(Wang X J, Feng S Y. Optional theory of bilevel systems[M]. Beijing: Science Press, 1995: 3-4.)

[2] Dempe S. Foundations of bilevel programming[M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002: 7-8.

[3] Xue Shengjia. Determining the optimal solution set for linear fractional programming[J]. J of Systems Engineering and Electronics, 2002, 11(3): 40-45.

[4] Dempe S. Annotated bibliography on bilevel programming and mathematical programs with equilibrium constraints[J]. Optimization, 2003, 52(3): 333-359.

[5] Bonnel H, Morgan J. Semivectorial bilevel optimization problem: penalty approach[J]. J of Optimization Theory and Applications, 2006, 131(3): 365-382.

[6] Shihui Jia, Zhongping Wan, Yuqiang Feng, et al. New partial cooperation model for bilevel programming problem[J]. J of Systems Engineering and Electronics, 2011, 22(2): 263-266.

[7] Ankhili Z, Mansouri A. An exact penalty on bilevel programs with linear vector optimization lower level[J]. European J of Operational Research, 2009, 197(1): 36-41.

[8] 刘毅, 李为民, 邢清华, 等. 基于双层规划的攻击无人机协同目标分配优化[J]. 系统工程与电子技术, 2010, 32(3): 579-583.
(Liu Y, Li W M, Xing Q H, et al. Cooperative mission assignment optimization of unmanned combat aerial vehicles based on bilevel programming[J]. Systems Engineering and Electronics, 2010, 32(3): 579-583.)

[9] 刘三阳, 于力, 杨亚红. 一类二层多目标规划的若干性质[J]. 运筹学学报, 2006, 10(3): 126-128.
(Liu S Y, Yu L, Yang Y H. Some properties of a kind of multi-objective bilevel programming problem[J]. Operations Research Trans, 2006, 10(3): 126-128.)

[10] Calvete H I, Gale C. Linear bilevel programs with multiple objectives at the upper level[J]. J of Computational and Applied Mathematics, 2010, 234(4): 950-959.

[11] 戴冀峰, 马健霄. 交通工程概论[M]. 北京: 人民交通出版社, 2006: 9-10.
(Dai J F, Ma J X. Traffic engineering conspectus[M]. Beijing: China Communications Press, 2006: 9-10.)

[12] 田歆, 汪寿阳, 华国伟. 零售商供应链管理的一个系统框架与系统实现[J]. 系统工程理论与实践, 2009, 29(10): 45-52.
(Tian X, Wang S Y, Hua G W. System framework and its implementation of supply chain management for retailers[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2009, 29(10): 45-52.)

[13] 刘思峰, 党耀国, 方志耕. 灰色系统理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2004: 234-235.
(Liu S F, Dang Y G, Fang Z G. Grey system theory and its application[M]. Beijing: Science Press, 2004: 234-235.)

[14] 曹永强, 曲晓飞. 一类不完全信息线性规划方法[J]. 控制与决策, 1994, 9(5): 346-349.
(Cao Y Q, Qu X F. An approach to linear programming with incomplete information[J]. Control and Decision, 1994, 9(5): 346-349.)

[15] 钱颂迪, 顾基发, 胡运权, 等. 运筹学[M]. 北京: 清华大学出版社, 2003: 200-205.
(Qian S D, Gu J F, Hu Y Q, et al. Operations research[M]. Beijing: Tsinghua University press, 2003: 200-205.)

[16] 张恩路, 孟宪云, 李智慧. 灰色二层线性规划问题及其解法[J]. 系统工程理论与实践, 2009, 29 (6): 132-138.
(Zhang E L, Meng X Y, Li Z H. Problem of grey bilevel linear programming and its algorithm[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2009, 29 (6): 132-138.)

(责任编辑：李君玲)