

## 灰色 GM(1,1, $t^\alpha$ ) 模型与自忆性原理的耦合及应用

郭晓君<sup>1,2</sup>, 刘思峰<sup>1</sup>, 方志耕<sup>1</sup>, 周伟杰<sup>1</sup>

(1. 南京航空航天大学 经济与管理学院, 南京 211106; 2. 南通大学 理学院, 江苏 南通 226019)

**摘要:** 针对实际工程应用中传统 GM(1,1) 模型预测的局限性, 以含时间幂次项的灰色 GM(1,1, $t^\alpha$ ) 模型为基础, 构建了灰色 GM(1,1, $t^\alpha$ ) 与自忆性原理的耦合预测模型; 用动力系统自忆性原理来克服传统灰色模型对初值比较敏感的弱点; 将灰色 GM(1,1, $t^2$ ) 自忆性模型应用于某沿海高速软土地基沉降的模拟和预测, 获得了满意的模拟和预测精度. 实验算例表明, 所提出的新模型显著地改善了传统灰色预测模型的模拟预测精度.

**关键词:** GM(1,1, $t^\alpha$ ) 模型; 自忆性原理; GM(1,1, $t^2$ ) 自忆性模型; 软土地基沉降

中图分类号: N941.5

文献标志码: A

## Coupling of grey GM(1,1, $t^\alpha$ ) model and self-memory principle and its applications

GUO Xiao-jun<sup>1,2</sup>, LIU Si-feng<sup>1</sup>, FANG Zhi-geng<sup>1</sup>, ZHOU Wei-jie<sup>1</sup>

(1. College of Economics and Management, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 211106, China; 2. School of Sciences, Nantong University, Nantong 226019, China. Correspondent: GUO Xiao-jun, E-mail: guoxj159@163.com)

**Abstract:** In view of the limitation of the traditional GM(1,1) model for prediction in practical engineering application, the coupling prediction model of the grey GM(1,1, $t^\alpha$ ) and self-memory principle is constructed based on the grey GM(1,1, $t^\alpha$ ) with time power. The traditional grey model's weakness as being sensitive to initial value can be overcome by the self-memory principle of the dynamic system. And the grey GM(1,1, $t^2$ ) self-memory model is used to fit and forecast the settlement of soft soil foundation of a certain coastal highway, which can obtain satisfactory accuracy of fitting and forecasting. Experiment results show that the proposed model can improve the fitting and forecasting accuracy of the traditional grey prediction model remarkably.

**Key words:** GM(1,1, $t^\alpha$ ) model; self-memory principle; GM(1,1, $t^2$ ) self-memory model; settlement of soft soil foundation

## 0 引言

邓聚龙教授创立的灰色系统理论是一种能够有效处理具有贫信息、不确定特征的系统科学方法, 作为其主要组成部分的灰色预测模型体系已发展成为预测方法中的一个重要研究分支. GM(1,1) 模型群<sup>[1]</sup>则是灰色预测体系中的核心部分, 通过对原始数据序列作累加生成来挖掘其内在规律, 从而揭示系统的未来演化趋势, 尤其适用于含灰指数规律特征的数据序列. GM(1,1) 模型群已广泛应用于社会经济、环境能源、工程科研等各种动态系统.

科研工作者已从 GM(1,1) 模型群的内在特性、背景值改进、时间响应式优化等不同角度深入开展了系统的研究分析<sup>[2-3]</sup>, 促进了 GM 系列模型的日趋完善. 同时, 随着实际应用中各种系统不断涌现出的新问题、新特性, 需要进一步对灰色预测模型开展扩展研究. 文献 [5] 建立了一种适合近似非齐次指数特征序列的 NDGM 离散预测模型; 文献 [6] 从原始序列高阶累加的角度出发, 提出了基于分数阶累加方法的灰色预测模型; 文献 [7-8] 针对符合饱和或波动变化趋势特征的 GM(1,1) 幂模型进行了深入研究, 以平均相

收稿日期: 2013-05-30; 修回日期: 2013-10-18.

基金项目: 国家自然科学基金项目(71111130211, 71171113, 71363046); 国家社会科学基金重点项目(12AZD102); 江苏省普通高校研究生科研创新计划项目(CXZZ13.0184); 中央高校基本科研业务费专项资金; 南通市科技计划项目(HS2013026).

作者简介: 郭晓君(1978-), 男, 讲师, 博士生, 从事灰色系统理论、系统工程等研究; 刘思峰(1955-), 男, 教授, 博士生导师, 从事灰色系统理论、数量经济学等研究.

对误差最小化为目标,运用非线性优化来寻求最优的幂指数;文献[9]进一步考虑发展演化规律具有部分指数特征并含时间幂形式的实际工程系统,构建了一类含时间幂次项的灰色 GM(1,1,t<sup>α</sup>) 模型,较好地描述了具有上述特征的系统发展演化过程.

曹鸿兴<sup>[10]</sup>提出的动力系统自忆性原理实现了决定论和不确定论两种方法在数学上的有机融合<sup>[11]</sup>,是一种有效处理非线性系统的动力-统计预测方法.该原理通过实际观测资料反演较为理想的非线性动力学模型,其核心思想是从动力系统微分方程出发,并引入记忆函数,使之变换为差分-积分形式,从而通过研究系统记忆性来预测系统的未来演化及发展趋势.自忆性模型理论自提出以来,已逐步应用于气象水文、环境能源、建筑工程及社会经济等领域<sup>[12-13]</sup>,可以对系统进行建模、计算和预测,尤其在提高预测精度及稳定性方面效果显著.

近年来,部分学者考虑将自忆性原理引入灰色预测模型,进行了一些有意义的初步研究.文献[14]推导了灰色 GM(1,1) 模型微分方程的自记忆计算格式;文献[15]将考虑多个相关因素的灰色 GM(1,N) 自记忆模型与 BP 神经网络相组合,并应用于年蒸发量预测;文献[16]建立了径流-降水的灰色微分动态 DHGM(2,2) 自记忆预测模型.本文在已有工作的基础上展开进一步研究,以工程领域中含时间幂次项的灰色 GM(1,1,t<sup>α</sup>) 模型为基础,结合动力系统自忆性原理,构建灰色 GM(1,1,t<sup>α</sup>) 自忆性耦合预测模型,以丰富和完善灰色预测模型体系并拓展其应用范围.

## 1 含时间幂次项的灰色 GM(1,1,t<sup>α</sup>) 模型

### 1.1 GM(1,1,t<sup>α</sup>) 模型的定义

定义 1 设原始数据序列为

$$X^{(0)} = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n)), \quad (1)$$

$X^{(0)}$  的一次累加生成序列 (1-AGO) 为

$$X^{(1)} = (x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), \dots, x^{(1)}(n)), \quad (2)$$

且  $X^{(1)}$  的紧邻均值生成序列为

$$Z^{(1)} = (z^{(1)}(1), z^{(1)}(2), \dots, z^{(1)}(n)). \quad (3)$$

其中:  $x^{(1)}(k) = \sum_{i=1}^k x^{(0)}(i)$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ ;  $z^{(1)}(k) = \frac{1}{2}(x^{(1)}(k) + x^{(1)}(k-1))$ ,  $k = 2, 3, \dots, n$ .

定义 2<sup>[9]</sup> 设  $X^{(0)}$ 、 $X^{(1)}$ 、 $Z^{(1)}$  如定义 1 所述, 则称

$$x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) = bk^\gamma + c \quad (4)$$

为含时间幂次项的灰色 GM(1,1,t<sup>α</sup>) 模型的基本形式, 其中幂参数  $\gamma$  为非负常数, 称

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} + ax^{(1)} = bt^\gamma + c \quad (5)$$

为 GM(1,1,t<sup>α</sup>) 模型的白化方程.

设式 (5) 中的  $\frac{dx^{(1)}}{dt} = F(x, t)$ , 则

$$F(x, t) = -ax^{(1)} + bt^\gamma + c. \quad (6)$$

### 1.2 GM(1,1,t<sup>α</sup>) 模型特性

定理 1 设  $X^{(0)}$  为非负序列,  $X^{(0)}$ 、 $X^{(1)}$ 、 $Z^{(1)}$  如定义 1 所述, 若  $\hat{r} = [a, b, c]^T$  为参数列, 且

$$M = \begin{bmatrix} -z^{(1)}(2) & 2^\gamma & 1 \\ -z^{(1)}(3) & 3^\gamma & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -z^{(1)}(n) & n^\gamma & 1 \end{bmatrix},$$

$$N = \begin{bmatrix} x^{(0)}(2) \\ x^{(0)}(3) \\ \vdots \\ x^{(0)}(n) \end{bmatrix},$$

则 GM(1,1,t<sup>α</sup>) 模型  $x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) = bk^\gamma + c$  的最小二乘估计参数满足  $\hat{r} = (M^T M)^{-1} M^T N$ .

定理 2<sup>[9]</sup> 设  $M$ 、 $N$  如定理 1 所述, 参数列  $\hat{r} = [a, b, c]^T = (M^T M)^{-1} M^T N$ , 则白化方程 (5) 的时间响应函数为

$$x^{(1)}(t) = be^{-at} \int e^{at} t^\gamma dt + \frac{c}{a}, \quad (7)$$

GM(1,1,t<sup>α</sup>) 模型  $x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) = bk^\gamma + c$  的时间响应序列  $\hat{x}^{(1)}(k+1)$  可以由白化方程的时间响应函数 (7) 离散化得到, 而原模型预测序列可由

$$\hat{x}^{(0)}(k+1) = \hat{x}^{(1)}(k+1) - \hat{x}^{(1)}(k) \quad (8)$$

还原得到.

性质 1<sup>[9]</sup> 设 GM(1,1,t<sup>α</sup>) 模型的基本形式为

$$x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) = bk^\gamma + c.$$

1) 当  $\gamma = 0$  时, 演变为 GM(1,1) 模型, 适用于含近似齐次指数  $x(t) \approx ce^{at}$  特征的序列;

2) 当  $\gamma = 1$  时, 演变为 GM(1,1,t) 模型, 适用于含近似非齐次指数  $x(t) \approx ce^{at} + bt$  特征的序列;

3) 当  $\gamma = 2$  时, 演变为 GM(1,1,t<sup>2</sup>) 模型, 适用于含近似  $x(t) \approx ce^{at} + bt + d$  特征的序列;

4) 对于幂参数  $\gamma$  的其他取值情况, 可以研究其相应序列的近似规律特征.

对于实际工程实践中遇到的数据序列, 其最符合原始数据规律特征的幂参数  $\gamma$  的值可以以平均相对误差最小化为优化目标, 运用非线性规划等智能算法来求得, 从而构建相应的含时间幂次项的灰色 GM(1,1,t<sup>α</sup>) 模型.

## 2 动力系统自忆性原理与 GM(1,1,t<sup>α</sup>) 模型的耦合构建

### 2.1 自忆性方程的原始推导

动力系统自忆性原理是基于客观世界中自然和社会现象演变的不可逆特性, 强调系统自身状态的前后承续关系, 并侧重于系统自身演化规律的研究. 曹鸿兴通过定义 Hilbert 空间中的内积, 引入忆及历史多次资料的记忆函数, 导出了具差分-积分形式的自忆性方程, 对历史多个时次的观测数据具有良好的记忆功能.

**定义 3** 将上述确定的微分方程  $\frac{dx^{(1)}}{dt}$  作为灰色 GM(1,1,t<sup>α</sup>) 自忆性模型的系统动力方程, 即

$$\frac{dx}{dt} = F(x, \lambda, t). \quad (9)$$

其中:  $x$  为变量,  $\lambda$  为参数,  $t$  为时间,  $F(x, \lambda, t)$  为动力核. 令记忆函数为  $\beta(t)$ , 同时 Hilbert 空间的内积运算定义为

$$(f, g) = \int_{a_0}^{b_0} f(\xi)g(\xi)d\xi, \quad f, g \in L^2. \quad (10)$$

设某一时间集合  $T = \{t_{-p}, t_{-p+1}, \dots, t_{-1}, t_0, t\}$ . 其中:  $t_{-p}, t_{-p+1}, \dots, t_{-1}, t_0$  表示若干历史观测时点,  $t_0$  表示预测初始时点,  $t$  表示未来预测时点,  $p$  表示回溯阶, 同时假设时间样本间隔为  $\Delta t$ . 通过内积运算 (10) 对动力方程 (9) 进行变换, 假设变量  $x$  与记忆函数  $\beta(t)$  满足连续、可微且可积的条件, 则可得

$$\int_{t-p}^t \beta(\tau) \frac{\partial x}{\partial \tau} d\tau = \int_{t-p}^t \beta(\tau) F(x, \lambda, \tau) d\tau,$$

即

$$\begin{aligned} & \int_{t-p}^{t-p+1} \beta(\tau) \frac{\partial x}{\partial \tau} d\tau + \int_{t-p+1}^{t-p+2} \beta(\tau) \frac{\partial x}{\partial \tau} d\tau + \\ & \dots + \int_{t_0}^t \beta(\tau) \frac{\partial x}{\partial \tau} d\tau = \\ & \int_{t-p}^t \beta(\tau) F(x, \lambda, \tau) d\tau, \end{aligned} \quad (11)$$

对式 (11) 的等式左边所有积分项分别运用分部积分法和微积分中值定理, 同时合并消除同类项, 从而推导得到一个差分-积分方程

$$\begin{aligned} & \beta_t x_t - \beta_{-p} x_{-p} - \sum_{i=-p}^0 x_i^m (\beta_{i+1} - \beta_i) - \\ & \int_{t-p}^t \beta(\tau) F(x, \lambda, \tau) d\tau = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

其中:  $\beta_t \equiv \beta(t)$ ,  $x_t \equiv x(t)$ ,  $\beta_i \equiv \beta(t_i)$ ,  $x_i \equiv x(t_i)$ , 中值  $x_i^m \equiv x(t_m)$ ,  $t_i < t_m < t_{i+1}$ ,  $i = -p, -p+1, \dots, 0$ .

**定义 4** 令  $x_{-p-1}^m \equiv x_{-p}$ ,  $\beta_{-p-1} \equiv 0$ , 式 (12) 可变换为

$$x_t = \frac{1}{\beta_t} \sum_{i=-p-1}^0 x_i^m (\beta_{i+1} - \beta_i) +$$

$$\frac{1}{\beta_t} \int_{t-p}^t \beta(\tau) F(x, \lambda, \tau) d\tau = S_1 + S_2, \quad (13)$$

称其为回溯  $p$  阶的自忆性方程. 方程右端第 1 项  $S_1$  称为自忆项, 表示  $p+1$  个时次的历史量测往值对预测变量  $x_t$  的贡献值; 第 2 项  $S_2$  称为他效项, 表示动力核源函数  $F(x, \lambda, t)$  在回溯时段  $[t-p, t_0]$  内对  $x_t$  的贡献值.

### 2.2 自忆性方程的离散近似表达

对式 (13), 以求和近似代替积分, 微分近似为差分, 并简单地用两个相邻时次的值近似替代中值  $x_i^m$ , 即

$$x_i^m = \frac{1}{2}(x_{i+1} + x_i) \equiv y_i. \quad (14)$$

同时取等距时次间隔, 令  $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i = 1$ , 将  $\beta_t$  与  $\beta_i$  合写, 则得到离散形式的自忆性方程

$$x_t = \sum_{i=-p-1}^{-1} \alpha_i y_i + \sum_{i=-p}^0 \theta_i F(x, \lambda, i). \quad (15)$$

其中:  $\alpha_i = (\beta_{i+1} - \beta_i)/\beta_t$ ,  $\theta_i = \beta_i/\beta_t$ ,  $\alpha_i$  和  $\theta_i$  称为记忆系数; 动力核源函数  $F(x, \lambda, t)$  由灰色 GM(1,1,t<sup>α</sup>) 模型的系统动力方程 (6) 确定.

若取等间隔采样  $\Delta t$ , 即  $t_i = t_0 + i\Delta t$ , 其中  $i = -p, -p+1, \dots, -1, 0, 1$ , 则自忆性方程的离散形式可类似得到, 此处不再赘述.

### 2.3 模型求解

设  $L$  个时次的历史数据资料, 可用最小二乘法求解记忆系数  $\alpha_i$  和  $\theta_i$ .

**定理 3** 记

$$X_t = [x_{t1} \ x_{t2} \ \dots \ x_{tL}]^T, \quad L \times 1$$

$$A_{(p+1) \times 1} = \begin{bmatrix} \alpha_{-p-1} \\ \alpha_{-p} \\ \vdots \\ \alpha_{-1} \end{bmatrix},$$

$$\Theta_{(p+1) \times 1} = \begin{bmatrix} \theta_{-p} \\ \theta_{-p+1} \\ \vdots \\ \theta_0 \end{bmatrix},$$

$$Y_{L \times (p+1)} = \begin{bmatrix} y_{-p-1,1} & y_{-p,1} & \dots & y_{-1,1} \\ y_{-p-1,2} & y_{-p,2} & \dots & y_{-1,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{-p-1,L} & y_{-p,L} & \dots & y_{-1,L} \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_{L \times (p+1)} = \begin{bmatrix} F(x, \lambda, -p)_1 & F(x, \lambda, -p+1)_1 \\ F(x, \lambda, -p)_2 & F(x, \lambda, -p+1)_2 \\ \vdots & \vdots \\ F(x, \lambda, -p)_L & F(x, \lambda, -p+1)_L \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\left[ \begin{array}{c} \cdots F(x, \lambda, 0)_1 \\ \cdots F(x, \lambda, 0)_2 \\ \vdots \\ \cdots F(x, \lambda, 0)_L \end{array} \right]$$

则式 (15) 可表示成矩阵形式

$$X_t = YA + \Gamma\theta. \tag{16}$$

令  $Z = [Y, \Gamma]$ ,  $W = \begin{bmatrix} A \\ \theta \end{bmatrix}$ , 则式 (16) 变为

$$X_t = ZW,$$

其最小二乘解为

$$W = (Z^T Z)^{-1} Z^T X_t. \tag{17}$$

将由定理 3 确定的记忆系数  $\alpha_i$  和  $\theta_i$  代入式 (15), 即可对原始数据序列  $X^{(0)}$  进行模拟和预测. 对于灰色 GM(1,1, $t^\alpha$ ) 自忆性模型 1-AGO 的模拟和预测值  $\hat{x}^{(1)}(t)$ , 其累减还原值  $\hat{x}^{(0)}(t)$  可由

$$\hat{x}^{(0)}(t) = \hat{x}^{(1)}(t) - \hat{x}^{(1)}(t-1) \tag{18}$$

得到, 其中  $t = 1, 2, \dots, n$ , 且  $\hat{x}^{(1)}(0) \equiv 0$ .

为了减少运用式 (15) 进行模拟和预测计算时的工作量, 可以借助 Matlab 等软件完成以上计算过程. 灰色 GM(1,1, $t^\alpha$ ) 自忆性耦合预测模型的 Matlab 程序流程设计如图 1 所示.

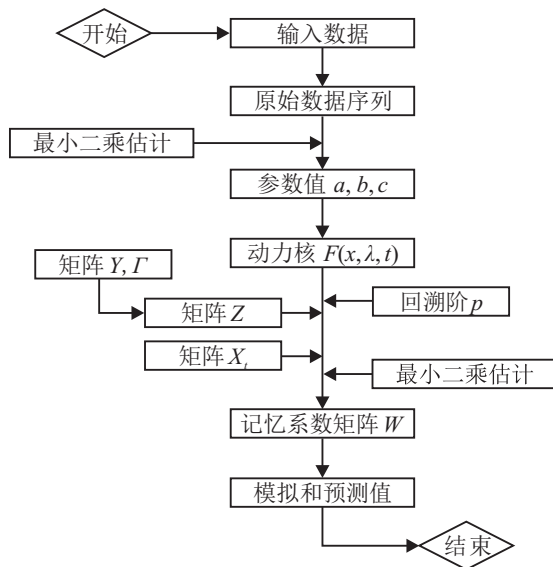


图 1 灰色 GM(1,1, $t^\alpha$ ) 自忆性模型程序流程

### 3 应用举例

高速公路软土地基沉降的预测与控制是软土地地区公路建设的一个关键问题, 鉴于岩土力学理论计算方法的不完善和工程地质条件的复杂性等原因, 根据前期实测的路基沉降数据来预测后期沉降, 并深入挖掘高速公路路基沉降规律具有重要的理论与工程应用价值. 对于高速公路软土地基沉降系统中容易出现的影响因素复杂性、参数选取多样性、数据信息

易缺性等问题, 传统建方法处理的预测效果并不理想, 而灰色预测模型则对此类小样本、贫信息系统演化趋势的模拟和预测效果显著; 同时, 由工程力学特性, 路基沉降近似呈现部分指数、部分线性的规律特征, 并且符合从匀速进入加速再趋于稳定的系统演化过程, 恰与灰色 GM(1,1, $t^2$ ) 模型所描述的系统相符. 因此, 为了验证本文所提出的灰色 GM(1,1, $t^\alpha$ ) 自忆性耦合预测模型的可行性, 研究文献 [9] 中的某省沿海高速的某个软土地基沉降板块, 选取在某观测时段内的路基沉降监测数据进行建模分析. 表 1 给出了相应的路基沉降等间隔观测值.

表 1 某省沿海高速的软土地基沉降观测值

观测时点	实际观测值/cm	观测时点	实际观测值/cm
1	3.3	5	14.5
2	5.6	6	18.1
3	7.9	7	23.8
4	10.3	8	28.6

本文结合动力系统自忆性原理, 在充分运用历史多个观测时点数据的基础上, 构建对历史数据具记忆功能的灰色 GM(1,1, $t^2$ ) 自忆性模型来预测高速公路软土地基沉降的变化趋势. 同时, 与文献 [9] 中的 GM(1,1, $t^2$ ) 模型进行预测精度的对比, 以体现新模型预测精度提升的显著优势, 为新模型机理特性和应用范围的深入研究提供实证支撑.

在建立灰色 GM(1,1, $t^2$ ) 自忆性耦合预测模型时, 取前 7 个时点的实际观测值作为建模样本, 并取第 8 个时点的实际观测值作为检验样本, 进行模型预测精度的检验. 根据观测数据建立的灰色 GM(1,1, $t^2$ ) 模型的微分方程为

$$\frac{dx}{dt} = -0.0175x + 0.3738t^2 + 4.1316,$$

其右端项作为自忆性方程的动力核  $F(x, \lambda, t)$ , 则有  $\frac{dx}{dt} = F(x, \lambda, t)$ . 据此可建立沿海高速软土地基沉降的灰色 GM(1,1, $t^2$ ) 自忆性预测模型, 其中模型的回溯阶可通过试算方法确定.

通过作离散化处理, 并用最小二乘法求记忆系数, 得到回溯阶  $p = 1$  的自忆性方程

$$x_t = \sum_{i=-2}^{-1} \alpha_i y_i + \sum_{i=-1}^0 \theta_i F(x, \lambda, i),$$

其中记忆系数矩阵为

$$W = [\alpha_{-2}, \alpha_{-1}, \theta_{-1}, \theta_0]^T = [0.2173, 0.7473, -1.8686, 3.4696]^T.$$

分别利用文献 [9] 中的 GM(1,1, $t^2$ ) 模型和上述建立的 GM(1,1, $t^2$ ) 自忆性模型对表 1 中的高速公路软土地基沉降观测数据进行模拟计算和预测检验. 两个模型对实际观测值的模拟和预测结果如表 2 所示 (为了方便,

分别简记为传统模型和自忆性模型), 由于回溯阶的原因, GM(1,1,t<sup>2</sup>) 自忆性模型中的前 2 个时点没有模拟值。

表 2 两种模型的软土地基沉降模拟和预测结果

时点	实际观测值	传统模型		自忆性模型	
		模拟和预测值	相对误差/%	模拟和预测值	相对误差/%
1	3.30	3.31	0.30		
2	5.60	5.40	3.59		
3	7.90	7.83	0.93	7.91	0.15
4	10.30	10.65	3.41	10.34	0.37
5	14.50	15.12	4.28	14.22	1.93
6	18.10	18.04	0.31	18.57	2.60
7	23.80	23.01	3.34	23.48	1.34
平均误差/%			2.31		1.28
8	28.60	29.47	3.04	29.15	1.92

由表 2 中关于该软土地基沉降板块的模拟结果对比发现: 传统模型中参与模拟计算的 7 个样本单点相对误差范围为 0.30% ~ 4.28%, 平均相对误差为 2.31%; 新建自忆性模型中相应的单点相对误差范围缩小为 0.15% ~ 2.60%, 平均相对误差则显著降低为 1.28%; 而新模型在预测方面同样具有明显的优势, 单步滚动预测相对误差由原先的 3.04% 显著降低为 1.92%。图 2 和图 3 描绘出了两种模型的模拟预测曲线与实测曲线的拟合情况, 可以看出新模型的模拟预测效果更为理想, 较好地处理了原始序列中出现的波动情况, 更好地模拟出了系统的整体发展和个体变化趋势。基于上述灰色 GM(1,1,t<sup>2</sup>) 自忆性模型的建模机理和预测步骤, 可以预测出该沿海高速软土地基沉降板块下个时点的沉降值为 34.55 cm。

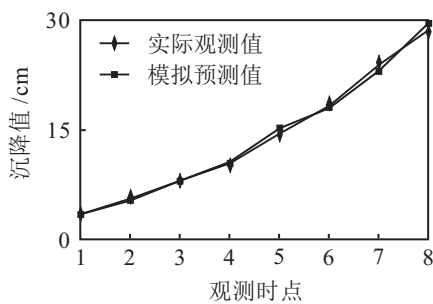


图 2 灰色 GM(1,1,t<sup>2</sup>) 模型曲线拟合

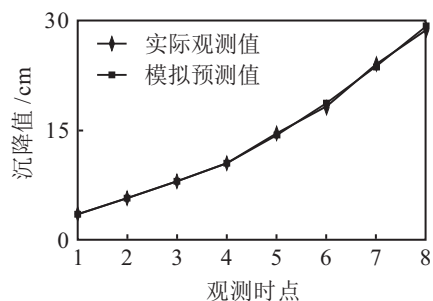


图 3 灰色 GM(1,1,t<sup>2</sup>) 自忆性模型曲线拟合

通过综合比较分析可知, 本文构建的灰色 GM(1,1,t<sup>α</sup>) 自忆性耦合模型的模拟和预测精度得到了显著提升, 其原因是新模型通过引入含历史多点时次资料的记忆函数, 导出包含多时次初始场以代替单初始场的自忆性方程, 再作模拟预测, 从而克服了传统模型对初值比较敏感的局限性。因此, 应在充分利用系统的历史量测往值的基础上, 建立符合实际工程系统中原始数据序列自身特性的预测模型, 并且继续研究灰色 GM(1,1,t<sup>α</sup>) 模型群与自忆性原理的有机耦合, 以获得更广泛的应用背景和空间。

### 4 结 论

本文基于适合实际工程应用的含时间幂次项的灰色 GM(1,1,t<sup>α</sup>) 模型群, 结合动力系统自忆性原理, 构建了灰色 GM(1,1,t<sup>α</sup>) 与自忆性原理的耦合预测模型。实例研究选取某省沿海高速的软土地基沉降板块, 结果表明新模型对路基沉降预测取得了不错的效果, 显示出结合自忆性原理提高预测精度的优越性能, 具有重要的应用价值。对于灰色 GM(1,1,t<sup>α</sup>) 自忆性模型中幂参数  $\gamma$  的优化选取是下一步的讨论方向, 同时对于自忆性方程中回溯阶数  $p$  的选择及方法确定等问题仍需作进一步的研究。

### 参考文献(References)

- [1] Liu S F, Lin Y. Grey systems theory and applications[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2010: 169-190.
- [2] 崔杰, 刘思峰, 曾波, 等. 灰色 Verhulst 预测模型的数乘特性[J]. 控制与决策, 2013, 28(4): 605-608. (Cui J, Liu S F, Zeng B, et al. Parameters characteristics of grey Verhulst prediction model under multiple transformation[J]. Control and Decision, 2013, 28(4): 605-608.)
- [3] 张斌, 西桂权. 基于背景值和边值修正的 GM(1,1) 模型优化[J]. 系统工程理论与实践, 2013, 33(3): 682-688. (Zhang B, Xi G Q. GM(1,1) model optimization based on the background value and boundary value correction[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2013, 33(3): 682-688.)
- [4] Dang Y G, Liu S F. The GM models that  $x(n)$  be taken as initial value[J]. The Int J of Systems & Cybernetics, 2004, 33(2): 247-254.
- [5] Xie N M, Liu S F, Yang Y J, et al. On novel grey forecasting model based on non-homogeneous index sequence[J]. Applied Mathematical Modelling, 2013, 37(7): 5059-5068.
- [6] Wu L F, Liu S F, Yao L G, et al. Grey system model with the fractional order accumulation[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2013, 18(7): 1775-1785.

- [7] 王正新, 党耀国, 赵洁珏. 优化的 GM(1,1) 幂模型及其应用[J]. 系统工程理论与实践, 2012, 32(9): 1973-1978.  
(Wang Z X, Dang Y G, Zhao J J. Optimized GM(1,1) power model and its application[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2012, 32(9): 1973-1978.)
- [8] 王正新. 振荡型 GM(1,1) 幂模型及其应用[J]. 控制与决策, 2013, 28(10): 1459-1472.  
(Wang Z X. Oscillating GM(1,1) power model and its application[J]. Control and Decision, 2013, 28(10): 1459-1472.)
- [9] 钱吴永, 党耀国, 刘思峰. 含时间幂次项的灰色 GM(1, 1,  $t^\alpha$ ) 模型及其应用[J]. 系统工程理论与实践, 2012, 32(10): 2247-2252.  
(Qian W Y, Dang Y G, Liu S F. Grey GM(1,1, $t^\alpha$ ) model with time power and its application[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2012, 32(10): 2247-2252.)
- [10] 曹鸿兴. 大气运动的自忆性方程[J]. 中国科学(B辑), 1993, 23(1): 104-112.  
(Cao H X. Self-memory equation for atmosphere motion[J]. Science in China(Series B): Chemistry, 1993, 23(1): 104-112.)
- [11] Phienweij N, Thepparak S, Giao P H. Prediction of differential settlement of buildings induced by land subsidence from deep well pumping[J]. Geotechnical Engineering, 2005, 36(1): 69-75.
- [12] 陆君安, 吕金虎, 夏军. 对流扩散方程的自忆积分格式[J]. 计算物理, 2000, 17(6): 664-670.  
(Lu J A, Lv J H, Xia J. Self-memory integration scheme of convection-diffusion equation[J]. Chinese J of Computational Physics, 2000, 17(6): 664-670.)
- [13] 王威, 苏经宇, 侯本伟, 等. 建筑物非线性变形动态预测的数据机理: 自记忆模型[J]. 科学通报, 2012, 57(23): 2171-2176.  
(Wang W, Su J Y, Hou B W, et al. Dynamic prediction of building subsidence deformation with data-based mechanistic self-memory model[J]. Chinese Science Bulletin, 2012, 57(23): 2171-2176.)
- [14] 范习辉, 张焰. 灰色自记忆模型及应用[J]. 系统工程理论与实践, 2003, 23(8): 114-129.  
(Fan X H, Zhang Y. A novel self-memory grey model[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2003, 23(8): 114-129.)
- [15] 段海妮, 沈冰, 莫淑红. 灰色 GM(1,N) 自记忆神经网络组合预测模型研究[J]. 水资源与水工程学报, 2010, 21(5): 93-95.  
(Duan H N, Shen B, Mo S H. Study on combined predictable model of Gray GM(1,N) self-memory and neural network[J]. J of Water Resources & Water Engineering, 2010, 21(5): 93-95.)
- [16] 袁喆, 杨志勇, 史晓亮, 等. 灰色微分动态自记忆模型在径流模拟及预测中的应用[J]. 水利学报, 2013, 44(7): 791-799.  
(Yuan Z, Yang Z Y, Shi X L, et al. Differential hydrological grey self-memory model for runoff simulation and prediction[J]. J of Hydraulic Engineering, 2013, 44(7): 791-799.)

(责任编辑: 齐 霖)