

基于梯度投影法与随机优化算法的约束优化方法

张华军, 赵金, 罗慧, 解相朋

(华中科技大学 自动化学院, 武汉 430074)

摘要: 针对带有线性等式和不等式约束的无确定函数形式的约束优化问题, 提出一种利用梯度投影法与遗传算法、同时扰动随机逼近等随机算法相结合的优化方法. 该方法利用遗传算法进行全局搜索, 利用同时扰动随机逼近算法进行局部搜索, 算法在每次进化时根据线性约束计算父个体处的梯度投影方向, 以产生新个体, 从而能够严格保证新个体满足全部约束条件. 将上述约束优化算法应用于典型约束优化问题, 其仿真结果表明了所提出算法的可行性和收敛性.

关键词: 约束优化; 梯度投影; 遗传算法; 同时扰动随机逼近

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Constrained optimization based on gradient projection method and stochastic optimization algorithm

ZHANG Hua-jun, ZHAO Jin, LUO Hui, XIE Xiang-peng

(School of Automation, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China. Correspondent: ZHANG Hua-jun, E-mail: zhanghj_hust@163.com)

Abstract: For the optimization problem with the unspecific function, linear equality and inequality constraints, a method which combines gradient projection method with stochastic approximation algorithm is proposed. The proposed method uses genetic algorithm(GA) to search the optimal solution overall the feasible region, and uses simultaneous perturbation stochastic approximation algorithm(SPSA) to search the optimal solution at the local region. During the search process, the proposed method generates a new individual along the gradient projection direction which is calculated according to linear equality and inequality constraints at father individual location, which ensures the new individual satisfy all constraints strictly. The proposed method is applied to three typical optimization problems, and the simulation results show the feasibility and convergence of the proposed method.

Key words: constraint optimization; gradient projection; genetic algorithm; simultaneous perturbation stochastic algorithm

0 引言

针对无具体函数形式的约束优化问题, 目前主要采用遗传算法^[1-4]、粒子群算法^[5-8]等随机优化算法进行全局搜索, 对于优化过程中的约束问题则主要采用信赖域法^[3]、外点法^[2,4]、改变遗传算子法^[9]、惩罚函数法^[1]等进行处理, 其中罚函数法由于其计算简单而得到广泛应用. 然而, 上述约束处理方法往往是针对不满足约束条件的个体进行一种调整与指引, 这种事中补救机制对算法的收敛速度会产生一定的影响. 另外, 由于遗传算法、粒子群算法等随机优化算法缺少梯度信息的指引, 在最优解附近容易产生振荡现象,

导致算法收敛速度和逼近精度均存在一定的问题^[10].

为了提高遗传算法解决约束优化问题的收敛速度, 本文提出一种梯度投影法与遗传算法、同时扰动随机逼近算法相结合的线性等式和不等式约束优化问题求解方法. 该方法利用遗传算法对待优化问题进行全局搜索, 在每一次进化操作时首先根据线性等式和不等式约束条件计算父个体处投影矩阵; 然后使交叉变异操作按照梯度投影方向产生新个体, 当遗传算法在最优解附近振荡时, 利用同时扰动随机逼近算法在局部估计父个体处梯度, 再根据线性约束和估计梯度计算父个体处梯度投影方向; 最后采用最速下降法

收稿日期: 2013-05-30; 修回日期: 2013-09-04.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61273174, 61034006, 60874047).

作者简介: 张华军(1980—), 男, 博士后, 从事多目标优化与智能控制的研究; 赵金(1967—), 男, 教授, 博士生导师, 从事运动控制与智能控制等研究.

沿着梯度投影方向产生新个体.

1 基于梯度投影的遗传算法

遗传算法通过交叉变异操作能够实现全局搜索,但是产生的新个体可能不满足约束条件.通过诸如外点法、惩罚函数法等对不可行解进行处理往往耗费大量的搜索时间,若是在每一次执行交叉变异操作时能够沿着满足约束要求的方向产生新个体,则遗传算法能够更快地收敛于全局最优解.假设待优化问题为

$$\begin{aligned} & \min f(x). \\ & \text{s.t. } Ax \geq b, \\ & \text{Aeq}x = \text{beq}. \end{aligned} \quad (1)$$

其中: x 为 $n \times 1$ 的待优化参数; A 、 b 、 Aeq 、 beq 分别为不等式约束和等式约束系数矩阵; $f(x)$ 为优化问题未知函数形式,每一个可行解对应的函数值通过测量系统输出得到.若利用遗传算法对问题(1)进行全局搜索,则常规的遗传算法实数交叉、变异操作公式分别为^[11]

$$x_{\text{new1}} = x_1 + \alpha(x_2 - x_1), \quad (2)$$

$$x_{\text{new2}} = x_1 \pm 0.5L\Delta. \quad (3)$$

其中: x_1 、 x_2 为父个体; x_{new1} 、 x_{new2} 为子个体; α 为区间 $[-0.25 \quad 1.25]$ 上的随机数; $\Delta = \sum_{i=0}^{m=20} \frac{a(i)}{2^i}$, $a(i)$ 以 0.05 的概率取值为 1, 以 0.95 的概率取值为零; L 为变量 x 的取值范围.

按照梯度投影法原理^[12-13], 假设父个体 x_1 满足

$$\text{Aeq}x_1 = \text{beq}, A_1x_1 = b_1, A_2x_1 > b_2.$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

若令满秩矩阵

$$M = \begin{bmatrix} A_1 \\ \text{Aeq} \end{bmatrix},$$

则此时父个体 x_1 处梯度投影矩阵为

$$P = \begin{cases} I_n, M = \emptyset; \\ I_n - M^T(MM^T)^{-1}M, M \neq \emptyset. \end{cases} \quad (4)$$

结合梯度投影法和交叉操作,可得满足线性约束条件的交叉操作为

$$\begin{cases} x_{\text{new1}} = x_1 + \alpha_c P(x_2 - x_1), \\ x_{\text{new2}} = x_1 - \beta_c P(x_2 - x_1). \end{cases} \quad (5)$$

其中 α_c 、 β_c 为大于 0 的随机数.将矩阵 M 与子个体 x_{new1} 相乘,可得

$$\begin{aligned} Mx_{\text{new1}} &= Mx_1 + \alpha_c MP(x_2 - x_1) = \\ Mx_1 + \alpha_c (M - I_n M)(x_2 - x_1) &= \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ \text{beq} \end{bmatrix}. \quad (6)$$

由式(6)的推导可知,式(5)交叉操作产生的新个体满足等式约束条件.为了让新个体满足不等式约束,必须有

$$A(x_1 + \alpha_c P(x_2 - x_1)) \geq b,$$

$$A(x_1 - \beta_c P(x_2 - x_1)) \geq b.$$

此时

$$\alpha_c AP(x_2 - x_1) \geq b - Ax_1,$$

$$\beta_c AP(x_2 - x_1) \leq Ax_1 - b.$$

因为 x_1 已经满足不等式约束条件 $Ax_1 - b \geq 0$, 所以 α_c 和 β_c 的上限计算公式分别为

$$\alpha_c = \min \left\{ \frac{(b - Ax_1)_i}{(AP(x_2 - x_1))_i} \mid (AP(x_2 - x_1))_i < 0 \right\}, \quad (7)$$

$$\beta_c = \min \left\{ \frac{(Ax_1 - b)_i}{(AP(x_2 - x_1))_i} \mid (AP(x_2 - x_1))_i > 0 \right\}. \quad (8)$$

同理,结合梯度投影法和遗传算法变异操作原理,可得满足约束条件的变异操作为

$$\begin{cases} x_{\text{new1}} = x_1 + \alpha_m PL\Delta, \\ x_{\text{new2}} = x_1 - \beta_m PL\Delta. \end{cases} \quad (9)$$

其中 α_m 、 β_m 为大于 0 的随机数.若用矩阵 M 与子个体 x_{new1} 相乘,则可得到

$$Mx_{\text{new1}} = Mx_1 + \alpha_c MPL\Delta =$$

$$Mx_1 + \alpha_c (M - I_n M)L\Delta =$$

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ \text{beq} \end{bmatrix}. \quad (10)$$

由式(10)的推导可知,式(9)变异操作产生的新个体满足等式约束条件.为了保证变异操作(9)产生的新个体满足不等式约束,必须有

$$A(x_1 + \alpha_m PL\Delta) \geq b,$$

$$A(x_1 - \beta_m PL\Delta) \geq b.$$

此时

$$\alpha_m APL\Delta \geq b - Ax_1,$$

$$\beta_m APL\Delta \leq Ax_1 - b.$$

则 α_m 和 β_m 的上限计算公式分别为

$$\alpha_m = \min \left\{ \frac{(b - Ax_1)_i}{(APL\Delta)_i} \mid (APL\Delta)_i < 0 \right\}, \quad (11)$$

$$\beta_m = \min \left\{ \frac{(Ax_1 - b)_i}{(APL\Delta)_i} \mid (APL\Delta)_i > 0 \right\}. \quad (12)$$

若遗传算法按式(2)和(3)进行交叉变异操作时,搜索方向是沿着梯度下降方向,则按式(5)和(9)的交叉变异操作不仅沿着梯度下降方向进行搜索,而且还

能够同时满足线性等式和不等式约束条件. 显然, 式 (5) 和 (9) 的交叉变异操作没有改变遗传算法随机优化的特性, 算法依旧具有全局收敛性.

2 同时扰动随机逼近约束优化算法

当遗传算法逼近全局最优解时, 由于遗传算法缺少梯度信息的指引而导致算法在最优解附近产生振荡现象^[10], 该振荡往往耗费大量的搜索时间. 因此, 有必要利用父个体处的梯度信息指引子个体的生成. 同时, 扰动随机逼近算法通过在局部最优解处微小的扰动来估计局部最优处的梯度, 算法根据估计的梯度能够逐步逼近全局最优解, 在收敛速度和逼近精度方面均比遗传算法具有更好的性能^[14].

假若遗传算法收敛于可行解 x_k , 则按照同时扰动随机逼近算法原理在 x_k 处产生一个扰动点 \bar{x}_k , 计算公式为

$$\bar{x}_k = x_k + c_k \delta. \quad (13)$$

其中: c_k 为大于零的扰动量; δ 为 $n \times 1$ 的向量, δ_i 在概率大于 0.5 时取 1, 在概率小于 0.5 时取 -1. 若扰动点 \bar{x}_k 对应的函数值为 $f(\bar{x}_k)$, 则可行解 x_k 处的梯度估计值为

$$g(x_k) = \frac{f(\bar{x}_k) - f(x_k)}{c_k} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_n \end{bmatrix}. \quad (14)$$

与遗传算法进化过程中计算父个体梯度投影矩阵同理, 按照式 (4) 即可获得可行解 x_k 处的投影矩阵 P , 则此时算法搜索方向为

$$d = -Pg(x_k). \quad (15)$$

在估计得到的满足约束条件的梯度投影方向 d 的基础上, 再根据最速下降法可得到下一个子个体计算公式

$$x_{k+1} = x_k + ad, \quad (16)$$

其中 a 为步长因子. 同理, 可将矩阵 M 与 x_{k+1} 相乘以验证式 (16) 生成的新个体是否满足问题 (1) 中的等式约束, Mx_{k+1} 结果如下:

$$\begin{aligned} Mx_{k+1} &= Mx_k - aMPd = \\ Mx_k - a(M - I_n M)d &= \\ \begin{bmatrix} b_1 \\ \text{beq} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (17)$$

从式 (17) 可知 (16) 生成的新个体满足问题 (1) 的等式约束条件. 为了使 x_{k+1} 满足不等式约束, 必须满足 $A(x_k + ad) > b$, 此时步长满足不等式 $aAd > b - Ax_k$. 由于 $b - Ax_k < 0$, 此时步长因子上限值在 $(Ad)_i < 0$ 时获得, 步长因子 a 上限计算公式为

$$a = \min \left\{ \frac{(b - Ax_k)_i}{(Ad)_i} \mid (Ad)_i < 0 \right\}. \quad (18)$$

按照最速下降法步长因子的计算方法, 当按式 (16) 生成的个体 x_{k+1} 对应的函数值 $f(x_{k+1}) > f(x_k)$ 时, 应该令 $a_{k+1} = 0.9a_k$, 以进行下一步迭代. 这里将步长变为原来的 0.9 而不是常规的 0.5 主要是因为 $g(x_k)$ 为估计值, 若是由于梯度 $g(x_k)$ 估计不准确导致的多次步长调整会让步长 a 很快减小, 这种过小的步长会影响算法的收敛速度.

3 混合约束优化算法的流程与步骤

根据上述遗传算法和同时扰动随机逼近算法求解线性等式和不等式约束优化问题的分析, 可将混合约束优化算法具体步骤描述如下.

Step 1: 根据问题 (1) 中的等式和不等式约束初始化一组包含 N 个可行解的种群;

Step 2: 将种群中的 N 个可行解代入问题 (1), 并记录每一个可行解对应的适应度值;

Step 3: 对全部 N 个适应度值进行排序, 选择适应度最小的 2 个个体作为父个体 x_1, x_2 ;

Step 4: 按式 (4) 计算适应度最小个体处的投影矩阵 P , 然后按式 (5) 和 (9) 分别进行交叉和变异操作, 以生成子个体 $x_{\text{new}1}$ 和 $x_{\text{new}2}$, 再分别按式 (7)、(8)、(11)、(12) 来计算 $\alpha_c, \beta_c, \alpha_m, \beta_m$ 的上限;

Step 5: 将 Step 4 产生的 2 个新个体代入问题 (1), 并记录对应的适应度值 $f(x_{\text{new}1}), f(x_{\text{new}2})$, 将子个体 $x_{\text{new}1}, x_{\text{new}2}$ 代替种群中适应度最大的 2 个个体 x_N, x_{N-1} , 同时将 $f(x_{\text{new}1}), f(x_{\text{new}2})$ 代替 $f(x_N), f(x_{N-1})$;

Step 6: 比较子个体适应度 $f(x_{\text{new}1}), f(x_{\text{new}2})$ 与父个体适应度 $f(x_1)$ 的大小, 若算法在 10 次迭代后最佳适应度值变化量 $\text{tol} < 0.00001$, 则令 $k = 1$, 执行 Step 7, 否则执行 Step 3;

Step 7: 在局部最优个体 x_k 处, 按式 (13) 产生扰动量 \bar{x}_k , 按式 (14) 估计 x_k 处的梯度 $g(x_k)$;

Step 8: 按式 (4) 计算 x_k 处的投影矩阵 P , 然后按式 (15) 和 (16) 计算下一个迭代点 x_{k+1} , 其中步长因子 a 上限计算公式为式 (18);

Step 9: 若 $f(x_{k+1}) > f(x_k)$, 则令 $a_{k+1} = 0.9a_k$;

Step 10: 若连续 10 次最佳个体适应度值变化量 $\text{tol} < 0.00001$, 则停止计算, 输出全局最优解 x_{best} , 否则执行 Step 7.

4 数值计算实例分析

为了便于观察上述基于梯度投影法、遗传算法和同时扰动随机逼近算法的混合约束优化算法的搜索过程, 本文选择 3 个 2 维约束优化问题来测试算法

的性能. 首先令遗传算法种群规模 $N = 30$, 交叉因子 $\alpha_c = 10$, $\beta_c = 10$, 变异因子 $\alpha_m = 1$, $\beta_m = 1$, 扰动量 $c_k = 0.001$, 步长因子 $a = 0.1$.

问题 1:

$$\begin{aligned} \min z &= \sqrt{1 - (x_1^2 + x_2^2)}. \\ \text{s.t. } &5x_1 - 8x_2 \geq -4.2, \\ &-7x_1 - 2x_2 \geq -5, \\ &x_1 + 5x_2 \geq 1.8. \end{aligned} \quad (19)$$

问题 1 的可行解约束为一个三角形区域, 约束区域对应的目标函数为一个具有多个局部极值的非凸函数. 通过数值分析可知, 问题(19)的全局最优解为直线 $x_2 = \frac{5}{8}x_1 + 0.525$ 与直线 $x_2 = -\frac{7}{2}x_1 + 2.5$ 的交点, 精确解为

$$x = [0.478\ 787\ 878\ 787\ 879 \quad 0.824\ 242\ 424\ 242\ 424]^T.$$

利用上述混合约束优化算法对问题 1 进行求解, 通过混合优化算法沿着约束区间进行全局搜索和局部搜索, 遗传算法收敛于可行解

$$x_{ga} = [0.495\ 636\ 844\ 538\ 181 \quad 0.765\ 271\ 044\ 116\ 367]^T,$$

同时, 扰动随机逼近算法收敛于可行解

$$x_{spsa} = [0.478\ 787\ 878\ 787\ 879 \quad 0.824\ 242\ 424\ 242\ 424]^T.$$

图 1 描述了遗传算法和同时扰动随机逼近算法搜索过程中可行解变化路径. 图 2 描述了遗传算法和同时扰动随机逼近算法搜索过程中局部最小适应度值变化曲线.

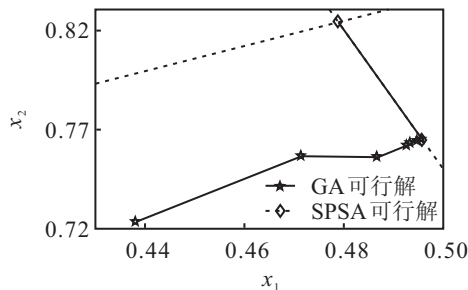


图 1 混合约束优化算法求解问题 1 的可行解路径

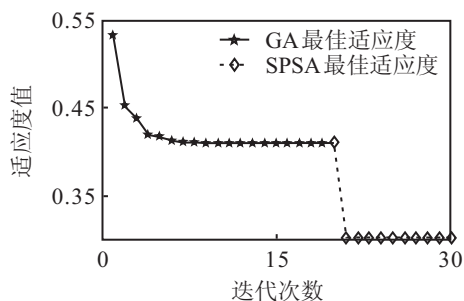


图 2 混合约束优化算法求解问题 1 的最佳适应度曲线

问题 2^[15]:

$$\begin{aligned} \min z &= -3(1 - x_1)^2 e^{-x_1^2 - (x_2 + 1)^2} + 10(0.2x_1 - \\ &x_1^3 - x_2^5) e^{-x_1^2 - x_2^2} + \frac{1}{3} e^{(1 - x_1)^2 - x_2^2}. \\ \text{s.t. } &x_1 - x_2 \geq -6, \\ &x_1 + x_2 \geq -6, \\ &-4 \leq x_1 \leq 4, \\ &-4 \leq x_2 \leq 4. \end{aligned} \quad (20)$$

问题 2 的约束区域为一个梯形, 通过利用 CONOPT Solver^[15] 选取不同起点, 得到最好的解为 [0.000 474 1.580 535], 最佳目标值为 $z = -8.105 417$. 利用上述混合约束优化算法对问题 2 进行求解, 遗传算法收敛于可行解

$$x_{ga} = [0.107\ 619\ 798\ 623\ 455 \quad 1.651\ 792\ 658\ 937\ 167]^T,$$

同时, 扰动随机逼近算法收敛于可行解

$$x_{spsa} = [0.001\ 350\ 991\ 487\ 903 \quad 1.587\ 687\ 359\ 653\ 939]^T,$$

最佳目标值为 $z = -8.041 914 499 459 796$.

图 3 描述了遗传算法和同时扰动随机逼近算法求解问题 2 的可行解变化路径. 图 4 描述了求解过程中局部最小适应度值变化曲线.

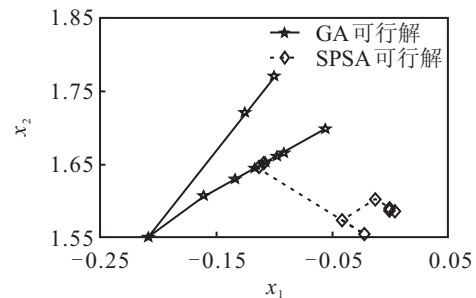


图 3 混合约束优化算法求解问题 2 的可行解路径

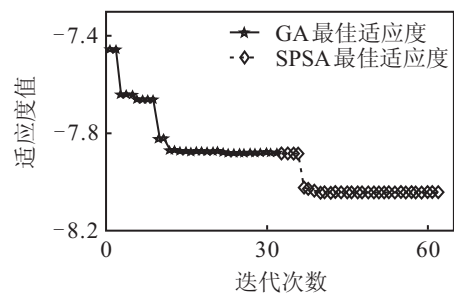


图 4 混合约束优化算法求解问题 2 的最佳适应度曲线

问题 3^[16]:

$$\begin{aligned} \min z &= \frac{1}{3} \sin(3(x_1 - x_2)^2) + \frac{2}{3} e^{-3x_2^2} - \\ &\frac{2}{3} \ln((1 + x_2)^6) - 2x_1. \\ \text{s.t. } &x_1 + x_2 = 2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &\geq -2, \\ -x_1 &\geq -3. \end{aligned} \quad (21)$$

问题 3 为等式约束优化问题, 其约束区域为直线 $x_1 + x_2 = 2$ 上 $x_1 \in [2/3 \ 3]$ 的区域. 利用文献 [16] 的优化算法获得的最优解为 $x = [0.98 \ 1.02]$, 目标函数最佳值为 $z = -4.741 \ 387 \ 2$. 利用上述混合约束优化算法对问题 3 进行求解, 遗传算法收敛于可行解

$$x_{ga} = [0.979 \ 990 \ 329 \ 946 \ 767 \ 1.020 \ 009 \ 670 \ 053 \ 233]^T,$$

同时, 扰动随机逼近算法收敛于可行解

$$x_{spsa} = [0.979 \ 985 \ 167 \ 003 \ 030 \ 1.020 \ 014 \ 832 \ 996 \ 973]^T,$$

最佳目标值为 $z = -4.741 \ 387 \ 245 \ 126 \ 3$.

图 5 描述了遗传算法和同时扰动随机逼近算法求解问题 3 的可行解变化路径. 图 6 描述了求解过程中局部最小适应度值变化曲线.

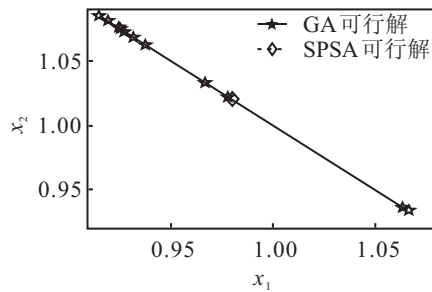


图 5 混合约束优化算法求解问题 3 的可行解路径

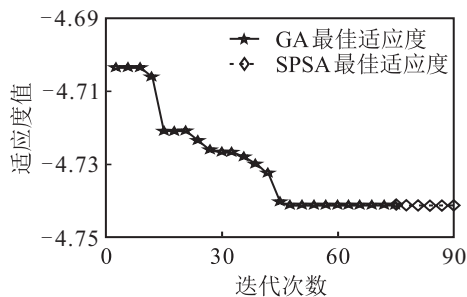


图 6 混合约束优化算法求解问题 3 的最佳适应度曲线

由图 1、图 3 和图 5 所示的 3 个问题可行解路径可知, 在混合优化算法搜索过程中, 每一次迭代产生的可行解都处于约束区域之中, 这表明混合算法每一次迭代都在约束区间中进行可行解搜索. 由图 2、图 4 和图 6 中可知, 遗传算法在搜索初期能够快速逼近全局最优解, 但在局部搜索时不但速度较慢, 而且逼近精度不高. 相较于遗传算法, 同时扰动随机逼近算法在局部能够依靠估计的梯度信息快速逼近全局最优解, 其逼近精度较遗传算法更高. 通过混合约束优化算法对 3 个待优化问题进行求解可以看出: 问题 1 的优化结果与理论值完全一致; 问题 2 的逼近极

小值比文献 [15] 中的结果大 0.063 502 500 540 203, 其原因主要在于同时扰动随机逼近算法无法准确估计问题 2 的局部梯度, 导致算法搜索方向与实际目标值下降方向存在一定误差, 最终收敛结果与实际最优解之间存在微小距离; 问题 3 的逼近极小值比文献 [16] 中的结果小 0.000 000 045 126 3, 这种微小的逼近精度改善主要是同时扰动随机逼近算法在局部通过估计梯度信息逐步逼近最优解而获得. 综合 3 种约束优化问题优化结果可知, 本文提出的混合约束优化算法能够快速、准确地逼近待优化问题最优解, 但对于类似问题 2 的复杂待优化问题, 同时扰动随机逼近算法还需要进一步改进局部梯度估计方法, 以提高算法的逼近精度.

5 结 论

针对无确定函数形式的线性等式和不等式约束优化问题, 利用梯度投影法、遗传算法、同时扰动随机逼近算法相结合的混合约束优化算法能够快速、准确地逼近全局最优解. 该混合算法不仅利用了遗传算法的全局搜索能力和同时扰动随机逼近算法的局部搜索能力, 而且还借鉴梯度投影法保证每一次搜索满足约束条件. 该混合算法的可行性与收敛性通过数值实例分析已经得到验证.

参考文献(References)

- [1] 韦凌云, 柴跃廷, 赵玫. 不等式约束的非线性规划混合遗传算法[J]. 计算机工程与应用, 2006, 40(22): 46-49. (Wei L Y, Cai Y T, Zhao M. A hybrid genetic algorithm for solving nonlinear programming problems with inequality constraints[J]. Computer Engineering and Applications, 2006, 40(22): 46-49.)
- [2] 刘伟, 刘海林. 基于外点法的混合遗传算法求解约束优化问题[J]. 计算机应用, 2007, 27(1): 216-218. (Liu W, Liu H L. Hybrid genetic algorithm based on external point method for constrained optimization[J]. J of Computer Applications, 2007, 27(1): 216-218.)
- [3] 梁昔明, 朱灿, 颜东煌. 基于物种选择的遗传算法求解约束非线性规划问题[J]. 中南大学学报: 自然科学版, 2009, 40(1): 185-189. (Liang X M, Zhu C, Yan D H. Novel genetic algorithm based on species selection for solving constrained nonlinear programming problems[J]. J of Central South University: Science and Technology, 2009, 40(1): 185-189.)
- [4] 牟锦辉, 苏三买. 约束优化问题的混合遗传算法研究[J]. 计算机仿真, 2009, 26(8): 184-187. (Mou J H, Su S M. A hybrid genetic algorithm for

- constrained optimization[J]. Computer Simulation, 2009, 26(8): 184-187.)
- [5] 王珂珂, 吕强, 赵汗青, 等. 基于 PSO-ABC 的混合算法求解复杂约束优化问题[J]. 系统工程与电子技术, 2012, 34(6): 1193-1199.
(Wang K K, Lv Q, Zhao H Q, et al. Hybrid algorithm for solving complex constrained optimization problems based on PSO and ABC[J]. Systems Engineering and Electronics, 2012, 34(6): 1193-1199.)
- [6] 王维刚, 刘占生, 倪红梅. 解混合变量约束优化问题的改进粒子群算法[J]. 系统仿真学报, 2012, 24(6): 1175-1179.
(Wang W G, Liu Z S, Ni H M. Improved particle swarm optimization algorithm solving optimization problems with mixed variables and constraints[J]. J of System Simulation, 2012, 24(6): 1175-1179.)
- [7] 李妮, 欧阳艾嘉, 李肯立. 求解约束优化的改进粒子群优化算法[J]. 计算机应用, 2012, 32(12): 3319-3321.
(Li N, Ouyang A J, Li K L. Improved particle swarm optimization for constrained optimization functions[J]. J of Computer Applications, 2012, 32(12): 3319-3321.)
- [8] 池瑞, 高岳林. 约束优化问题的修正选择粒子群优化算法[J]. 兰州理工大学学报, 2012, 38(5): 87-92.
(Chi R, Gao Y L. Revised selection particle swarm optimization algorithm for solving constrained optimization problems[J]. J of Lanzhou University of Technology, 2012, 38(5): 87-92.)
- [9] 梁昔明, 秦浩宇, 文龙. 一种求解约束优化问题的遗传算法[J]. 计算机工程, 2010, 36(14): 147-149.
(Liang X M, Qin H Y, Wen L. Genetic algorithm for solving constrained optimization problem[J]. Computer Engineering, 2010, 36(14): 147-149.)
- [10] 张华军, 赵金. 基于遗传算法和神经网络预测的再励学习[J]. 计算机工程, 2010, 36(1): 18-24.
(Zhang H J, Zhao J. Reinforcement learning based on genetic algorithms and neural network prediction[J]. Computer Engineering, 2010, 36(1): 18-24.)
- [11] 王小平. 遗传算法: 理论、应用及软件实现[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 2002: 34-38.
(Wang X P. Genetic algorithm: Theory, application and programming[M]. Xi'an: Xi'an Jiaotong University Press, 2002: 34-38.)
- [12] 马昌凤. 最优化方法及其 Matlab 程序设计[M]. 北京: 科学出版社, 2009: 166-189.
(Ma C F. Optimization method and Matlab programming [M]. Beijing: Science Press, 2009: 166-189.)
- [13] Loris I, Bertero M, De Mol C, et al. Accelerating gradient projection methods for constrained signal recovery by steplength selection rules[J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2009, 27(2): 247-254.
- [14] Huajun Z, Jin Z, Tao G. Convergence accelerated by the improvements of stepsize and gradient in SPSA[C]. 2011 Chinese Control and Decision Conf. Mianyang, 2011: 1-6.
- [15] 张贵军, 俞立, 吴惕华. 线性约束非线性函数全局优化算法的研究[J]. 控制理论与应用, 2005, 22(1): 1-6.
(Zhang G J, YU L, WU T H. Global optimal algorithm for nonlinear programming problems subjected to linear constraints[J]. Control Theory & Applications, 2005, 22(1): 1-6.)
- [16] 杨懿, 张守贵. 具有线性不等式约束非线性规划问题的降维算法[J]. 重庆大学学报: 自然科学版, 2007, 30(10): 42-45.
(Yang Y, Zhang S G. Descending dimension algorithm of nonlinear programming problem with linear inequality constraints[J]. J of Chongqing University: Natural Science Edition, 2007, 30(10): 42-45.)

(责任编辑: 齐 霖)