

一种基于GHF的高斯粒子滤波算法

郑作虎, 王首勇

(空军预警学院 重点实验室, 武汉 430019)

摘要: 高斯粒子滤波算法重要性权值方差不会随迭代次数的增加而增加, 能够较好地解决粒子退化问题, 但其重要性密度函数没有考虑最新的量测信息, 导致有效粒子数减少, 算法滤波性能下降. 针对该问题, 提出一种基于 Gaussian-Hermite 滤波 (GHF) 的高斯粒子滤波算法, 采用 GHF 构造高斯粒子滤波的重要性密度函数, 考虑最新的量测信息, 增加有效粒子数, 提高算法的滤波精度. 仿真结果表明, 所提出算法的滤波精度明显优于高斯粒子滤波算法.

关键词: 高斯粒子滤波; 重要性密度函数; Gaussian-Hermite 滤波

中图分类号: TN957

文献标志码: A

An Gaussian particle filter based on the Gaussian-Hermite filter

ZHENG Zuo-hu, WANG Shou-yong

(Key Research Laboratory, Air Force Early Warning Academy, Wuhan 430019, China. Correspondent: ZHENG Zuo-hu, E-mail: zhengzuohu@yeah.net)

Abstract: Excluding the latest measuring information, the number of the effective particles reduces, so the performance of the Gaussian particle filter descends, which can conquer the particle degeneracy problem well for the variance of the important sampling weights not getting larger with time. Therefore, an improved Gaussian particle filter method based on the Gaussian-Hermite filter is proposed, and the importance density function is structured by using GHF. Including the latest measuring information, the number of effective particles are increased and filtering accuracy is improved significantly. The experimental results show that the proposed method is superior to the Gaussian particle filter.

Key words: Gaussian particle filter; importance density function; Gaussian-Hermite filter

0 引言

粒子滤波^[1-2]方法适用于非高斯背景下的非线性状态空间模型, 在机动目标跟踪^[3]、无线通信^[4]和计算机视觉^[5]等领域有广泛的应用. 其基本思想是通过一组随机加权粒子近似后验概率密度函数, 以均值运算代替积分运算, 最终获得状态的最小均方误差估计. 然而, 利用粒子滤波方法进行状态估计时, 重要性权值的方差随着迭代次数而增加, 重要性权值只集中到少数粒子上, 导致采样粒子集无法逼近真实的后验概率密度函数, 退化问题不可避免^[6-8]. 为了解决该问题, Gordon 等^[1]于 1993 年提出了重采样思想, 目前, 重采样算法主要包括多项式重采样算法、残差重采样算法、分层重采样算法、系统重采样算法^[9]. 通过复制权值大的粒子, 抛弃权值小的粒子, 重采样算法改善了粒子退化问题, 但是大量复制权值大的粒子也降低

了粒子的多样性, 导致了粒子枯竭问题.

针对粒子退化问题, Kotecha 等^[10-11]提出了高斯粒子滤波 (GPF). 由于每次递推都根据前一时刻后验概率密度函数随机抽取新的粒子, 其权值并不进行迭代, 权值方差不会随迭代次数而增加, 高斯粒子滤波算法能较好地解决粒子退化问题. 但由于其重要性密度函数通常由预测概率密度函数表示, 没有考虑最新量测信息, 重要性采样粒子集与根据真实后验概率分布产生的粒子集存在较大偏差, 导致重要性权值只集中到少数粒子上, 有效粒子数降低, 算法滤波性能下降.

为了将最新量测信息引入重要性密度函数, 通常通过扩展卡尔曼滤波 (EKF)、不敏卡尔曼滤波 (UKF) 和高斯厄米特滤波 (GHF) 构造重要性密度函数^[12-14]. 其中: EKF 算法的滤波精度通常只达到一阶泰勒展

收稿日期: 2013-06-12; 修回日期: 2013-12-02.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61179014, 60872156).

作者简介: 郑作虎(1986-), 男, 博士生, 从事雷达信号与信息处理的研究; 王首勇(1956-), 男, 教授, 博士生导师, 从事现代信号处理、雷达信号处理等研究.

开,且容易发散;UKF通过选择一些确定的样本点逼近随机变量分布,不需要线性化非线性系统,滤波精度可以达到三阶泰勒展开;GHF算法是一种基于GH数值积分的递推贝叶斯滤波算法,可通过选取高斯点和相应的权值提高状态的估计精度,滤波性能优于EKF和UKF^[14].

鉴于此,本文针对高斯粒子滤波存在的问题,提出了一种基于GHF的高斯粒子滤波算法.该算法采用GHF构造重要性密度函数,使其融入最新量测信息,更加逼近于真实的后验概率分布,增加了有效粒子数,提高了算法的滤波精度.仿真结果表明,所提出算法的滤波精度优于高斯粒子滤波算法.

1 高斯粒子滤波算法

非线性非高斯状态空间模型如下:状态方程为

$$x_k = f(x_{k-1}) + w_k; \tag{1}$$

量测方程为

$$y_k = h(x_k) + v_k. \tag{2}$$

其中: x_k 为 k 时刻 n 维状态矢量, y_k 为 k 时刻 l 维量测矢量, w_k 和 v_k 分别为 k 时刻系统噪声和量测噪声, Q_k 和 R_k 分别为协方差矩阵, $f(\cdot)$ 和 $h(\cdot)$ 为有界非线性映射.

基于贝叶斯估计框架,高斯粒子滤波算法通过高斯分布近似状态的预测概率密度函数和后验概率密度函数,假定预测概率密度函数为重要性密度函数,基于蒙特卡罗方法,利用一系列加权粒子递推估计密度函数中的均值和协方差^[10-11].

设在量测序列 $y_{1:k-1} = \{y_1, y_2, \dots, y_{k-1}\}$ 的基础上, $k-1$ 时刻状态矢量 x_{k-1} 的后验概率密度函数近似为高斯分布

$$p(x_{k-1}|y_{1:k-1}) \approx N(x_{k-1|k-1}, P_{k-1|k-1}), \tag{3}$$

其中 $N(x_{k-1|k-1}, P_{k-1|k-1})$ 表示均值为 $x_{k-1|k-1}$ 、协方差矩阵为 $P_{k-1|k-1}$ 的高斯分布函数.

根据式(3)随机抽取粒子集 $\{x_{k-1}^i\}_{i=1}^N$, N 为粒子数,利用式(1)更新粒子 $x_k^i \sim p(x_k|x_{k-1})$,以高斯型预测概率密度函数为重要性密度函数,有

$$\pi(x_k|y_{1:k}) = N(x_{k|k-1}, P_{k|k-1}). \tag{4}$$

其中

$$x_{k|k-1} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_k^i, \\ P_{k|k-1} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_k^i - x_{k|k-1})(x_k^i - x_{k|k-1})^T. \tag{5}$$

由式(4)进行重要性采样 $\{\tilde{x}_k^i\}_{i=1}^N$, 粒子权值为

$$\hat{\omega}_k^i = \frac{p(y_k|\tilde{x}_k^i)p(\tilde{x}_k^i|y_{1:k-1})}{\pi(\tilde{x}_k^i|y_{1:k})} =$$

$$\frac{p(y_k|\tilde{x}_k^i)N(x_{k|k-1}, P_{k|k-1})}{\pi(\tilde{x}_k^i|y_{1:k})}. \tag{6}$$

将式(4)代入(6),可得

$$\hat{\omega}_k^i = p(y_k|\tilde{x}_k^i). \tag{7}$$

权值归一化

$$\omega_k^i = \frac{\hat{\omega}_k^i}{\sum_{i=1}^N \hat{\omega}_k^i}. \tag{8}$$

k 时刻算法的有效粒子数为

$$N_{\text{eff}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N (\omega_k^i)^2}. \tag{9}$$

利用下式估计 k 时刻高斯型后验概率密度函数中的均值和协方差:

$$x_{k|k} = \sum_{i=1}^N \omega_k^i \tilde{x}_k^i, \\ P_{k|k} = \sum_{i=1}^N \omega_k^i (\tilde{x}_k^i - x_{k|k})(\tilde{x}_k^i - x_{k|k})^T. \tag{10}$$

由于估计状态的粒子是根据重要性密度函数抽取的,重要性密度函数与真实的后验概率密度函数的接近程度直接决定了算法的滤波性能.由式(4)可知,高斯粒子滤波以预测概率密度函数 $N(x_{k|k-1}, P_{k|k-1})$ 作为重要性密度函数,忽略了最新量测信息,因此重要性采样粒子与真实后验概率分布产生的粒子存在较大偏差,归一化重要性权值只集中在部分粒子上,权值方差增大.由式(9)可知,有效粒子数减少,算法滤波性能下降.

2 基于GHF的高斯粒子滤波算法

2.1 基于GHF构造的重要性密度函数

为了将最新的量测信息引入重要性采样过程,本文提出应用包含最新量测信息的GHF算法构造重要性密度函数.GHF算法是基于GH积分的高斯滤波^[15]算法,其基本思想是假定预测概率密度函数和后验概率密度函数均为高斯分布,基于高斯滤波框架递推估计密度函数中的状态及其协方差,针对递推过程中的高斯分布积分公式,利用GH积分进行近似^[15],即

$$\int f(x)N(x; \mu, \Sigma)dx \approx \sum_{j=1}^m w_j f(x_j). \tag{11}$$

其中

$$x_j = (\sqrt{\Sigma})_j q_j + \mu; \tag{12}$$

$f(x)$ 为不超过 $2m+1$ 次的已知矢量多项式; q_j 为 m 次 Hermite 正交多项式的零点,即GH积分中的高斯点; w_j 为其对应权值; μ, Σ 分别为高斯分布的均值和协方差矩阵; $(\sqrt{\Sigma})_j$ 为 Σ 均方根矩阵的第 j 列; m 为

高斯点个数.

利用 GHF 构造高斯粒子滤波的重要性密度函数, 基本思想是对根据前一时刻后验概率密度函数采样的粒子进行 GHF, 将粒子状态及其协方差估计值作为高斯型后验概率密度函数的均值和协方差, 利用一簇高斯分布构造重要性密度函数. 具体步骤如下.

Step 1: 状态和协方差预测. 假定 $k-1$ 时刻第 i 个粒子 x_{k-1}^i 的后验概率密度服从高斯分布 $N(x_{k-1|k-1}^i, P_{k-1|k-1}^i)$, 利用式 (11) 近似高斯积分公式, 得到预测状态和相应的预测协方差矩阵

$$x_{k|k-1}^i = \sum_{j=1}^m w_j f(x_j^i), \quad (13)$$

$$P_{k|k-1}^i = \sum_{j=1}^m (f(x_j^i) - x_{k|k-1}^i)(f(x_j^i) - x_{k|k-1}^i)^T w_j + Q_{k-1}, \quad (14)$$

其中 x_j^i 为第 i 个粒子的第 j 个高斯点, 且

$$x_j^i = (\sqrt{P_{k-1|k-1}^i})_j q_j + x_{k-1|k-1}^i,$$

$$i = 1, 2, \dots, N, j = 1, 2, \dots, m.$$

Step 2: 状态及其协方差更新. 假定 k 时刻第 i 个粒子的预测概率密度服从高斯分布 $N(x_{k|k-1}^i, P_{k|k-1}^i)$, 根据系统状态及其协方差预测值得到新的高斯点, 利用式 (11) 近似高斯积分公式, 由量测模型得到状态及其协方差的更新. 新的高斯点为

$$x_j^i = (P_{k|k-1}^i)_j q_j + x_{k|k-1}^i. \quad (15)$$

状态及其协方差更新为

$$\begin{aligned} x_{k|k}^i &= x_{k|k-1}^i + K_k^i (y_k - \hat{y}_{k|k-1}^i), \\ P_{k|k}^i &= P_{k|k-1}^i - K_k^i (P_{xy}^i)^T. \end{aligned} \quad (16)$$

其中

$$\begin{aligned} \hat{y}_{k|k-1}^i &= \sum_{j=1}^m h(x_j^i) w_j, \\ P_{yy}^i &= \sum_{j=1}^m (h(x_j^i) - \hat{y}_{k|k-1}^i)(h(x_j^i) - \hat{y}_{k|k-1}^i)^T w_j, \\ P_{xy}^i &= \sum_{j=1}^m (x_j^i - x_{k|k-1}^i)(h(x_j^i) - \hat{y}_{k|k-1}^i)^T w_j, \\ K_k^i &= P_{xy}^i (R_k + P_{yy}^i)^{-1}. \end{aligned} \quad (17)$$

因此, 构造的重要性密度函数为

$$\pi(x_{k|k}^i | y_{1:k}) = N(x_{k|k}^i, P_{k|k}^i). \quad (18)$$

2.2 GHGPF 算法

该算法利用 GHF 算法构造重要性密度函数, 考虑了最新的量测信息, 使估计的状态后验概率密度更逼近于真实的状态后验概率密度, 增加了有效粒子数, 提高了滤波精度. 具体的算法步骤如下.

Step 1: 计算预测概率密度函数. 根据 $k-1$ 时刻后验概率密度采样粒子集 $\{x_{k-1}^i\}_{i=1}^N \sim N(x_{k-1|k-1}, P_{k-1|k-1})$, 由式 (1) 更新粒子 $\{x_k^i\}_{i=1}^N \sim p(x_k | x_{k-1})$, 利用式 (5) 计算高斯型预测概率密度函数 $p(x_k | y_{1:k-1})$ 中的均值 $x_{k|k-1}$ 和协方差 $P_{k|k-1}$.

Step 2: 重要性采样. 对粒子集 $\{x_{k-1}^i\}_{i=1}^N$ 进行 GHF, 利用式 (13)~(18) 构造重要性密度函数, 进行重要性采样 $\tilde{x}_k^i \sim N(x_{k|k}^i, P_{k|k}^i)$.

Step 3: 计算粒子权值. 将 Step 1 计算的预测概率密度函数和 Step 2 计算的重要性密度函数代入式 (6), 计算粒子重要性权值

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_k^i &= \frac{p(y_k | \tilde{x}_k^i) p(\tilde{x}_k^i | y_{1:k-1})}{\pi(\tilde{x}_k^i | y_{1:k})} = \\ &= \frac{p(y_k | \tilde{x}_k^i) N(x_{k|k-1}^i, P_{k|k-1}^i)}{N(x_{k|k}^i, P_{k|k}^i)}. \end{aligned} \quad (19)$$

Step 4: 利用式 (8) 得到归一化权值 ω_k^i .

Step 5: 利用式 (10) 估计状态后验概率密度函数 $p(x_k | y_{1:k})$ 中的均值 $x_{k|k}$ 和协方差 $P_{k|k}$.

3 仿真分析

为了验证本文算法的滤波性能, 选取典型的非高斯非线性模型^[13], 将本文算法与 GPF 算法进行比较分析. 模型的状态方程和量测方程分别为

$$\begin{aligned} x_k &= 1 + \sin(0.04\pi k) + 0.5x_{k-1} + w_k; \\ y_k &= \begin{cases} 0.2x_k^2 + v_k, & k \leq 30; \\ 0.5x_k - 2 + v_k, & k > 30. \end{cases} \end{aligned} \quad (20)$$

仿真实验参数设定为: 系统噪声 $w \sim \text{Gamma}(3, 2)$, 量测噪声 $v \sim N(0, 10^{-5})$, 初始状态 $x_1 = 1$, 初始状态分布 $N(0, 2)$, 时间序列长度 $T = 60$, 粒子数 $N = 200$, GHF 中高斯点数 $m = 3$, 高斯点及其权值可分别通过求取 3 次 Hermite 多项式的零点及其权值获得, q_i 和 w_i 的选取参见文献 [15], $q_1 = -\sqrt{3}$, $q_2 = 0$, $q_3 = \sqrt{3}$, $w_1 = 1/6$, $w_2 = 2/3$, $w_3 = 1/6$, 蒙特卡罗仿真次数 $M = 100$, 滤波状态的均方根误差定义为

$$\text{RMSE}_k = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{\text{mot}=1}^M (\hat{x}_k^{\text{mot}} - x_k)^2}, \quad (21)$$

其中 \hat{x}_k^{mot} 为 k 时刻第 mot 次蒙特卡罗仿真估计值.

为了验证算法的滤波性能, 首先, 给出两种算法在不同时刻状态后验概率密度比较, 验证了重要性密度函数的选择对滤波性能的影响; 然后, 给出算法的状态估计与真实状态的比较和均方根误差曲线比较, 验证了算法的滤波性能, 并分析了粒子数对算法性能的影响; 最后, 给出两种算法的复杂度比较.

图 1 为当 $k = 10, 20, 30, 40$ 时两种算法的后验概率密度估计与真实状态比较. 在根据前一时刻后验概

率密度函数采样的粒子基础上, GPF 算法通过式 (3) ~ (10) 估计当前时刻的后验概率密度函数, GHGPF 算法通过 Step 1 ~ Step 5 估计当前时刻的后验概率密度函数. 后验概率密度曲线基于状态变量 $x \in [-40, 40]$ 共 81 个采样点仿真得到. 由图 1 可见, 由于未考虑最新的量测信息, GPF 算法中重要性密度函数采样粒子与真实后验概率分布产生较大偏差, 重要性权值只集中在部分粒子上, 无法逼近真实的后验概率分布, 而本文算法采用 GHF 方法将最新的量测信息计入重要性密度函数, 构造的重要性密度函数更逼近于真实的后验分布.

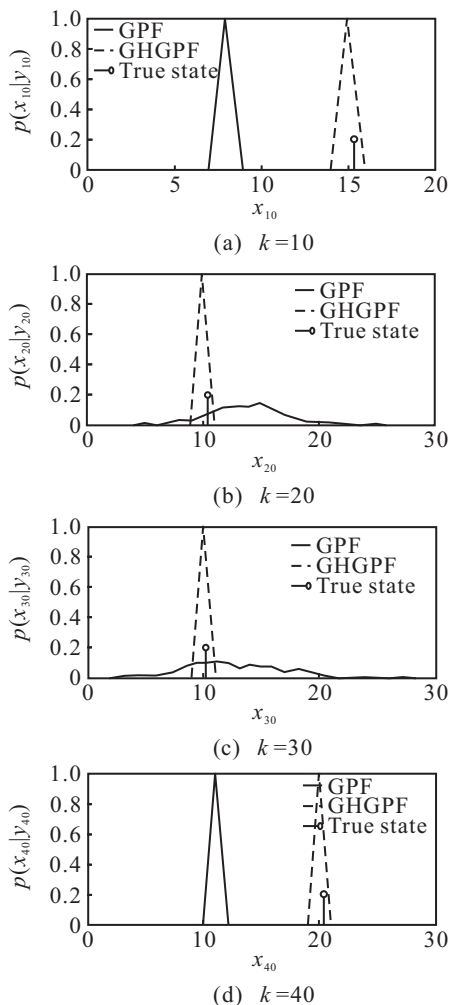


图 1 不同时刻滤波算法后验概率密度估计

为了验证算法的滤波性能, 图 2 给出了算法的状态估计与真实状态的比较, 图 3 给出了蒙特卡罗仿真 100 次的算法均方根误差曲线比较. 由仿真结果可见, 无论是在量测模型前半段的非线性部分, 还是后半段的线性部分, 本文算法均考虑了最新的量测信息, 基于 GHF 算法构造更逼近于真实的后验概率密度, 增加了有效粒子数, 滤波性能优于 GPF 算法. 从不同粒子数的仿真结果可以看出, 随着粒子数的增加, 两种算法的滤波性能显著提高.

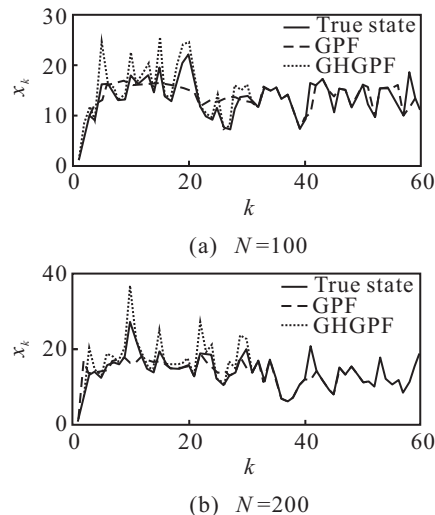


图 2 算法状态估计与真实状态比较

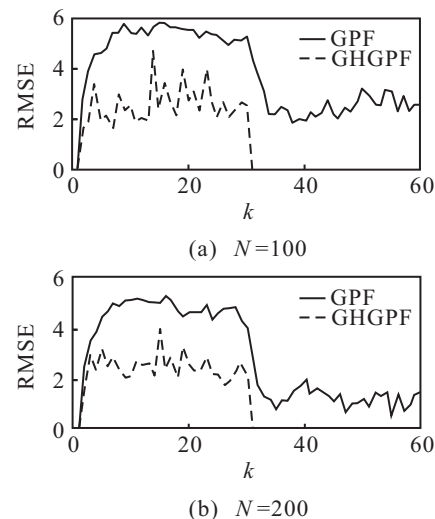


图 3 算法均方误差曲线比较

表 1 给出了不同粒子数时均方根误差的均值、方差和有效粒子数的平均值, 其中 k 时刻第 mot 次蒙特卡罗仿真有效粒子数可由式 (9) 计算.

表 1 算法均方根误差和有效粒子数比较

	GPF		GHGPF	
	$N = 100$	$N = 200$	$N = 100$	$N = 200$
RMSE 均值	3.8067	2.8430	1.2506	1.1723
RMSE 方差	3.1587	2.3146	1.9349	1.5904
平均有效粒子数	51.5312	71.7021	96.5268	193.1504

由表 1 可见, 当粒子数 $N = 100$ 和 $N = 200$ 时, 本文算法滤波均方根误差均值分别减少 67.15% 和 58.76%, 平均有效粒子数基本等于采样粒子数. 从仿真结果可以看出, GPF 算法由于未考虑最新的量测信息, 导致重要性密度函数与真实后验概率分布存在偏差, 大部分粒子权值较小而被忽略, 有效粒子数减小, 粒子采样率降低, 滤波误差较大.

算法复杂度是衡量算法实时性的重要标准, 以算法运行一次所需的乘法次数为标准, 本文给出 GPF 算

法和 GHGPF 算法的复杂度

$$O(\text{GPF}) = N(1 + n(nA + lB + 2n + 1)), \quad (22)$$

$$O(\text{GHGPF}) = N[n(m(A + n + l) + l(l^2 + n + B + 1) + n + 1) + l(mB + ml + 1)]. \quad (23)$$

其中: N 为粒子数, n 为状态维数, l 为量测维数, A 和 B 分别为为系统状态和量测一步预测需要的乘法次数, m 为高斯点个数.

4 结 论

针对高斯粒子滤波存在的滤波精度不高的问题, 本文提出了一种基于 Gaussian-Hermite 滤波的高斯粒子滤波算法. 该算法通过蒙特卡罗方法估计的高斯分布来逼近状态预测概率密度和后验概率密度, 并采用 Gaussian-Hermite 滤波算法构造重要性密度函数, 考虑了最新的量测信息, 增加了有效粒子数, 提高了滤波精度. 仿真结果表明, 在非线性、非高斯背景下, 所提出的算法滤波性能优于高斯粒子滤波算法.

参考文献(References)

- [1] Gordon N J, Saimond D J, Smith A F M. Novel approach to nonlinear/non-Gaussian bayesian state estimation[J]. IEE Proceedings-F, 1993, 140(2): 107-113.
- [2] Zhao S, Liu F. State estimation in non-linear Markov jump systems with uncertain switching probabilities[J]. IET Control Theory and Applications, 2012, 6(5): 641-650.
- [3] Sabuncu M, Demirekler M. IMM-PF for increased performance for maneuvering target[C]. IEEE on Signal Processing and Communications Applications Conf. Antalya: IEEE, 2011: 1044-1047.
- [4] Banani S A, Vaughan R G. Blind channel estimation and discrete speed tracking in wireless systems using independent component analysis with particle filtering[J]. IET Communications, 2012, 6(2): 224-234.
- [5] Sherrah J, Ristic B, Redding N J. Particle filter to track multiple people for visual surveillance[J]. IET Communications, 2011, 5(4): 192-200.
- [6] Saha S, Gustafsson F. Particle filtering with dependent noise processes[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2012, 60(9): 4497-4508.
- [7] Kong A, Liu J S, Wong W H. Sequential imputations and Bayesian missing data problems[J]. J of the American Statistical Association, 1994, 89(425): 278-288.
- [8] Doucet A, Godsill S J, Andrieu C. On sequential monte carlo sampling methods for bayesian filtering[J]. Statistics and Computing, 2000, 10(3): 197-208.
- [9] Mahmoud I I, Tawaba A E, Salama M, et al. Appraisal of different particle filter resampling schemes effect in robot localization[C]. IEEE National Radio Science Conf. Cairo, 2012: 477-484.
- [10] Kotecha J H, Djuric P M. Gaussian particle filtering[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2003, 51(10): 2592-2601.
- [11] 周翟和, 刘建业, 赖际舟, 等. 一种新的改进高斯粒子滤波算法及其在 SINS/GPS 深组合导航系统中的应用[J]. 控制与决策, 2011, 26(1): 85-88.
(Zhou Z H, Liu J Y, Lai J Z, et al. Novel Gaussian particle filter and it's application in deeply integrated SINS/GPS navigation system[J]. Control and Decision, 2011, 26(1): 85-88.)
- [12] Norgaard M, Poulsen N K, Ravn O. New developments in state estimation for nonlinear systems[J]. Automatica, 2000, 36(11): 1627-1638.
- [13] Merwe R V, Doucet A, Freitas N D, et al. The unscented particle filter[R]. Cambridge University Department of Engineering, 2000.
- [14] 袁泽剑, 郑南宁, 贾新春. 高斯厄米特粒子滤波器[J]. 电子学报, 2003, 31(7): 970-973.
(Yuan Z J, Zheng N N, Jia X C. The Gauss-Hermite particle filter[J]. Acta Electronic Sinica, 2003, 31(7): 970-973.)
- [15] Ito K, Xiong K Q. Gaussian filters for nonlinear filtering problems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2000, 45(5): 910-927.

(责任编辑: 郑晓蕾)