

基于可分性测度的模糊隶属函数确定方法

董 炜¹, 陈卫征^{1,2}, 徐晓滨³, 吉吟东¹

(1. 清华信息科学与技术国家实验室, 北京 100084; 2. 清华大学 自动化系, 北京 100084; 3. 杭州电子科技大学 自动化学院, 杭州 310018)

摘 要: 隶属程度的思想是模糊数学的基本思想, 应用模糊数学方法解决实际问题的关键在于建立符合实际的隶属函数, 然而, 如何正确地确定隶属函数仍是至今尚未完全解决的问题. 鉴于此, 提出一种基于可分性测度的隶属函数确定方法, 利用类间在各个特征上的可分性确定模糊集的划分, 进而确定描述该模糊集的隶属函数. 通过轨道电路故障诊断实验表明了所提出方法的有效性.

关键词: 可分性测度; 隶属函数; 模糊集; 模糊推理

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Determination method of fuzzy membership function based on separability measure

DONG Wei¹, CHEN Wei-zheng^{1,2}, XU Xiao-bin³, JI Yin-dong¹

(1. Tsinghua National Laboratory for Information Science and Technology, Beijing 100084, China; 2. Department of Automation, Tsinghua University, Beijing 100084, China; 3. School of Automation, Hangzhou Dianzi University, Hangzhou 310018, China. Correspondent: CHEN Wei-zheng, E-mail: weizheng_chen@163.com)

Abstract: The idea of the degree of membership is the basic idea of fuzzy mathematics. The key to solve practical problems using fuzzy mathematical method lies in establishing the actual membership function. However, how to correctly determine the membership function is still not yet fully resolved so far. Therefore, a method for determining the membership function based on the separability measure is presented. This method can determine the division of fuzzy sets by using the separability on various features between any two categories, and then determine the membership function to describe each fuzzy set. After that, an experiment is carried out in the track circuit fault diagnosis, and the result shows the effectiveness of the proposed method.

Key words: separability measure; membership function; fuzzy set; fuzzy inference

0 引 言

在复杂模拟电路系统中, 由于模拟电路元件参数具有容差, 造成电路的实际响应也具有容差. 由于电路拓扑结构的影响, 某些故障状态发生后在某个节点上的监测值相近, 从而造成故障具有随机性和模糊性, 并且故障与其特征之间的映射关系复杂且存在不确定性, 难以用精确的数学模型来描述故障和特征之间多对多的映射关系. 为了解决上述问题, 需要采用模糊数学的概念.

模糊数学是以模糊集^[1]为基础、用以研究和处理模糊性现象的一种数学理论和方法. 模糊集利用隶属

函数进行描述, 隶属函数对模糊集所表达的模糊性概念定量刻画, 通过量化可以实现相应的数学运算和处理. 因此, 正确地确定隶属函数是应用模糊数学理论定量刻画模糊概念的基础, 也是利用模糊数学方法解决各种实际问题的关键. 然而, 构造一个定量刻画模糊概念的隶属函数并不是一件容易的事, 这是由于, 隶属函数的构造是有某种限定的, 是对模糊现象、模糊概念所具有客观性的一种定量刻画, 而模糊数学所研究的对象所具有的模糊性和经验性使得隶属函数的确定势必受到人的主观因素的影响, 这也导致到目前为止没有一种统一的确定隶属函数的方法, 也没有

收稿日期: 2013-07-13; 修回日期: 2013-10-21.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61104019, 61004070); 国家科技支撑计划课题项目(2009BAG12A08); 清华大学自主科研计划项目.

作者简介: 董炜(1978—), 男, 助理研究员, 从事复杂工程系统建模、仿真等研究; 陈卫征(1988—), 男, 硕士生, 从事模式识别、轨道电路故障诊断的研究.

通用的定理和方式可以遵循。

目前确定隶属函数有多种方法,其中具有代表性的方法有模糊统计法^[2]、二元对比排序法^[2]、指派方法^[2]等。模糊统计法可以较为客观地反映论域中元素相对于模糊概念的隶属程度,也具有一定的理论基础,是一种常用的确定隶属函数的方法,但工作量过大。二元对比排序法更适用于根据对象的抽象性质由专家确定隶属函数的情形,是模糊决策问题中较实用的确定隶属函数的方法。指派方法被认为是一种主观的方法,受人为因素影响。类似的方法还有专家评判法等。

目前,在面向故障诊断等分类问题的模糊专家系统中,缺乏一种有理论基础、操作简便、能摆脱人的主观因素影响的隶属函数确定方法。鉴于此,本文提出一种基于两类之间可分性测度的隶属函数确定方法,对每个特征数据划分模糊集,进而获取模糊规则。最后,通过轨道电路故障诊断实验表明了所提出方法的有效性。

1 基于带权邻接矩阵的隶属函数确定方法

设 $U = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$ 为采集到的 n 个故障状态的样本数据。其中: $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im}) (i = 1, 2, \dots, n)$ 为第 i 类对应的样本,是 m 维向量,即用 m 个特征(属性)描述,属性集为 $C = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$ 。

应用模糊推理系统解决上述故障诊断问题的思想是:某些故障在某些属性上属于同一模糊集,而在其他属性上属于不同模糊集,因此不同的故障对应不同属性之间模糊集的不同组合,从而实现不同故障的定位。

1.1 带权邻接矩阵的计算

在每个特征分量上,类和类之间具有一定的可分性,因此对于任意特征分量 c_k ,论域 U 中各个类的取值及其之间的可分关系可看作一个图,其中每个类在该特征分量上的取值作为图中的一个节点,不同类在该特征上的可分性测度(距离)作为图中的一条边,对于特征分量 c_k ,定义其对应的带权邻接矩阵如下。

定义 1 若 G_k 为特征分量 c_k 对应的带权图,则邻接矩阵可以定义为

$$A_k(i, j) = \begin{cases} d_{ij}^{(c_k)}, & x_{ik} \leq x_{jk}; \\ -d_{ij}^{(c_k)}, & x_{ik} > x_{jk}. \end{cases}$$

其中 $A_k(i, j)$ 为在特征分量 c_k 上类 \mathbf{x}_i 到类 \mathbf{x}_j 的距离,当 $x_{ik} \leq x_{jk}$ 时, $A_k(i, j)$ 取正距离,当 $x_{ik} > x_{jk}$ 时, $A_k(i, j)$ 取负距离。这种定义方式既考虑了类 \mathbf{x}_i 和 \mathbf{x}_j 在特征分量 c_k 上的距离关系,又考虑了类 \mathbf{x}_i 和 \mathbf{x}_j 在特征分量 c_k 上分布的位置关系。

由上述定义可知, $A_k(i, j) = -A_k(j, i)$, 因此对

G_k 的邻接矩阵可只考虑上三角(或下三角)形式。

A_k 中各个元素的取值为类和类在特征分量 c_k 上的可分性测度(距离),其不同取值的含义如下:

1) 若 $A_k(i, j) = 0$, 则类 \mathbf{x}_i 和类 \mathbf{x}_j 在属性 c_k 上不可分(重合);

2) 若 $0 < |A_k(i, j)| < 1$, 则类 \mathbf{x}_i 和类 \mathbf{x}_j 在属性 c_k 上可分;

3) 若 $|A_k(i, j)| = 1$, 则类 \mathbf{x}_i 和类 \mathbf{x}_j 在属性 c_k 上严格可分。

在属性 c_k 上类 \mathbf{x}_i 和类 \mathbf{x}_j 的可分关系对应为图 G_k 中的邻接关系。在属性 c_k 上类 \mathbf{x}_i 到类 \mathbf{x}_j 的可分性测度 $d_{ij}^{(c_k)}$ 定义如下。

定义 2 对于论域 U 中任意两类 \mathbf{x}_i 和 \mathbf{x}_j , 其在特征分量 c_k 上的可分性测度(距离)为

$$d_{ij}^{(c_k)} = \begin{cases} \frac{|x_{ik} - x_{jk}|}{x_{ik} + x_{jk}}, & x_{ik} \neq x_{jk}; \\ 0, & x_{ik} = x_{jk}. \end{cases}$$

注 1 $d_{ij}^{(c_k)}$ 为兰氏距离,要求 $x_{ik} > 0 (i = 1, 2, \dots, n, k = 1, 2, \dots, |C|)$, $|C|$ 为集合 C 的基数,有限集的基数可简单看作集合元素的个数。在属性 c_k 上,类 \mathbf{x}_i 与类 \mathbf{x}_j 的差别越大, $d_{ij}^{(c_k)}$ 越大。兰氏距离是由 Lance 等最早提出的,这种距离定义方式是一个无量纲的量,可以消除不同属性之间量纲的影响,且对大的奇异值不敏感。

1.2 隶属函数的确定方法

确定隶属函数的一个基本原则是:构造的隶属函数能够保证区分论域 U 中的各个类别,并令划分得到的模糊集个数尽可能少。

为了使各个类可区分,需满足如下条件: $\forall i, j (1 \leq i < j \leq n), \exists c_k \in C$, 使得 $A_k(i, j) \neq 0$ 。为了划分得到的模糊集个数尽可能少,需要有: $\forall i, j (1 \leq i < j \leq n)$, 存在且只存在一个 $c_k \in C$ 使得 $A_k(i, j) \neq 0$ 。

该算法的基本思想是: $\forall \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j$, 两类之间在各个属性上的可分度为 $d_{ij}^{(c_1)}, d_{ij}^{(c_2)}, \dots, d_{ij}^{(c_m)}$, 若

$$d_{ij}^{(\alpha)} = \max\{d_{ij}^{(c_1)}, d_{ij}^{(c_2)}, \dots, d_{ij}^{(c_m)}\},$$

则令类 \mathbf{x}_i 和 \mathbf{x}_j 只在属性 α 上可区分,并只在该属性上考虑将类 \mathbf{x}_i 和 \mathbf{x}_j 划入不同的模糊集; $\forall \mathbf{x}_i$, 若在属性 c_k 上 $\exists \mathbf{x}_{j_1}, \mathbf{x}_{j_2}$ 与 \mathbf{x}_i 可区分,且 $\mathbf{x}_{j_1}, \mathbf{x}_{j_2}$ 在 \mathbf{x}_i 的同一侧,即 $(x_{j_1k} - x_{ik})(x_{j_2k} - x_{ik}) > 0$, 则只考虑将 \mathbf{x}_i 和 $\{\mathbf{x}_{j_1}, \mathbf{x}_{j_2}\}$ 中距 \mathbf{x}_i 较近的类在该属性上划入不同的模糊集。

基于上述要求和基本思想,本算法的基本过程如下。

Step 1 对于属性集 C 中的每一个属性 c_k , 计算

其对应的带权图的邻接矩阵 A_k .

Step 2 遍历所有 A_k , 对带权邻接矩阵进行初步约简. 对于任意两类, 只保留其在各个属性上最大的可分度, 约简方式如下: 令

$$d_{ij} = \max_{k=1,2,\dots,m} \{|A_k(i,j)|\}, i < j.$$

$\forall k(1 \leq k \leq m)$, 若 $|A_k(i,j)| \neq d_{ij}$, 则令 $A_k(i,j) = 0$. 若存在多个 c_k 使得 $|A_k(i,j)| = d_{ij}$, 则只保留其中任意一个 $A_k(i,j)$ 不为 0.

通过 Step 2 的约简, 任意两类之间只在一个属性上可区分, 即 $\forall \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j$, 存在一个属性 c_{k_0} 使得 $|A_{k_0}(i,j)| \neq 0$, 且 $\forall k \neq k_0$, 有 $|A_k(i,j)| = 0$.

Step 3 遍历所有 A_k , 对带权邻接矩阵进行进一步约简, 约简方式如下: 在带权邻接矩阵 A_k 中, $\forall i(1 \leq i < n)$, 遍历上三角阵中的 $j; \forall j(i < j \leq n)$, 若 $\exists j_0 \neq j(i < j_0 \leq n)$ 使得 $A_k(i,j)A_k(i,j_0) > 0$, 且 $|A_k(i,j)| > |A_k(i,j_0)|$, 则令 $|A_k(i,j)| = 1, A_k(i,j)$ 的正负号与前面相同.

Step 4 获取约简所得带权邻接矩阵中剩余的关键边和关键节点.

定义 3 在约简所得的带权邻接矩阵 A_k 中, 若 $0 < |A_k(i,j)| < 1$, 则称边 $\langle x_{ik}, x_{jk} \rangle$ 为带权图 G_k 的关键边, 相应地, 节点 x_{ik} 和 x_{jk} 称为带权图 G_k 中关键边 $\langle x_{ik}, x_{jk} \rangle$ 对应的一对关键节点.

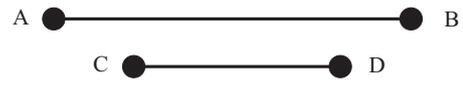
为了便于表述, 下文在谈及关键边 $\langle x_{ik}, x_{jk} \rangle$ 时, 默认关键边对应的关键节点按从小到大排序, 即 $x_{ik} < x_{jk}$. 每个关键节点作为模糊集的中心点, 可以得到一系列模糊集.

Step 5 对关键节点(即模糊集)进行约简.

上述约简带权邻接矩阵的方式最终得到的模糊集个数并不是最少的, 例如, 在约简结束后引入关键边 $\langle x_{i_1k}, x_{i_2k} \rangle$ 和 $\langle x_{j_1k}, x_{j_2k} \rangle$, 若 $x_{i_1k} \leq x_{j_1k} < x_{j_2k} \leq x_{i_2k}$, 则此时关键边 $\langle x_{i_1k}, x_{i_2k} \rangle$ 是不需要的, 因为 x_{i_1k} 会以较大的隶属度隶属于 x_{j_1k} , 而 x_{i_2k} 会以较大的隶属度隶属于 x_{j_2k} , 在属性 c_k 上类 \mathbf{x}_{i_1} 和 \mathbf{x}_{i_2} 仍然是可分的.

上述情况是肯定有可能存在的, 这是因为在经过 Step 2 的约简后, 带权邻接矩阵可能会出现如下情况: $A_k(i_1, i_2) \neq 0, A_k(j_1, j_2) \neq 0$, 且 $A_k(i_1, j_1), A_k(i_1, j_2), A_k(i_2, j_1), A_k(i_2, j_2)$ 均为 0, 即类 $\langle \mathbf{x}_{i_1}, \mathbf{x}_{i_2} \rangle$ 和 $\langle \mathbf{x}_{j_1}, \mathbf{x}_{j_2} \rangle$ 在属性 c_k 上可分度取最大, 类 $\langle \mathbf{x}_{i_1}, \mathbf{x}_{j_1} \rangle$ 等在其他属性上可分度取最大. 在 Step 4 中引入关键边和关键节点时, 在同一属性上有可能引入如图 1 所示的情况.

在图 1 中, 设位于上方的关键边为 $\langle x_{i_1k}, x_{i_2k} \rangle$, 位于下方的关键边为 $\langle x_{j_1k}, x_{j_2k} \rangle$. 有:



(a) 第 1 种情形



(b) 第 2 种情形



(c) 第 3 种情形

图 1 可约简关键节点

1) 图 1(a) 在同一属性上引入两个关键边 $\langle x_{i_1k}, x_{i_2k} \rangle$ 和 $\langle x_{j_1k}, x_{j_2k} \rangle$, 若关键边 $\langle x_{i_1k}, x_{i_2k} \rangle$ 完全包含另一个关键边 $\langle x_{j_1k}, x_{j_2k} \rangle$, 即 $x_{j_1k} > x_{i_1k}, x_{j_2k} < x_{i_2k}$, 则仅保留比较短的关键边 $\langle x_{j_1k}, x_{j_2k} \rangle$ 及其对应的关键节点.

2) 图 1(b) 中两个关键边的左侧关键节点或右侧关键节点分别比较接近, 以两个关键边的左侧关键节点相邻为例, 即 $\langle x_{i_1k}, x_{i_2k} \rangle$ 和 $\langle x_{j_1k}, x_{j_2k} \rangle$ 中设 $x_{i_1k} > x_{j_1k}$ 且 $x_{i_2k} > x_{j_2k}, x_{i_1k}$ 和 x_{j_1k} 的取值比较接近, 其贴近度为

$$\alpha = \max \left\{ \frac{d_{i_1j_1}^{(c_k)}}{d_{i_1i_2}^{(c_k)}}, \frac{d_{i_1j_1}^{(c_k)}}{d_{j_1j_2}^{(c_k)}} \right\}.$$

设定一个阈值 α_0 , 当 $\alpha < \alpha_0$ 时, 只保留贴近度中分母所对应的关键边, 即:

① 若 $\alpha = \frac{d_{i_1j_1}^{(c_k)}}{d_{i_1i_2}^{(c_k)}} < \alpha_0$, 则只保留 $\langle x_{j_1k}, x_{j_2k} \rangle$;

② 若 $\alpha = \frac{d_{i_1j_1}^{(c_k)}}{d_{j_1j_2}^{(c_k)}} < \alpha_0$, 则只保留 $\langle x_{i_1k}, x_{i_2k} \rangle$.

3) 图 1(c) 中两个关键边中一条关键边的左端点和另一条关键边的右端点比较接近. 对于比较接近的关键节点对, 可以只保留一个关键节点. 图 1(c) 中间相邻的关键节点对的贴近度为

$$\alpha = \min \left\{ \frac{d_{i_1j_2}^{(c_k)}}{d_{i_1i_2}^{(c_k)}}, \frac{d_{i_1j_2}^{(c_k)}}{d_{j_1j_2}^{(c_k)}} \right\}.$$

若 α 很小, 则可将关键节点 x_{i_1k} 和 x_{j_2k} 合并为一个关键节点, 合并方式为: 设定阈值 α_1, α_1 较小, 如 $\alpha_1 = 0.2$, 则有:

① 若 $d_{i_1j_2}^{(c_k)} < \alpha_1 d_{i_1i_2}^{(c_k)}, d_{i_1j_2}^{(c_k)} \geq \alpha_1 d_{j_1j_2}^{(c_k)}$, 则关键节点 x_{i_1k} 和 x_{j_2k} 合并为 x_{j_2k} ;

② 若 $d_{i_1j_2}^{(c_k)} \geq \alpha_1 d_{i_1i_2}^{(c_k)}, d_{i_1j_2}^{(c_k)} < \alpha_1 d_{j_1j_2}^{(c_k)}$, 则关键节点 x_{i_1k} 和 x_{j_2k} 合并为 x_{i_1k} ;

③ 若 $d_{i_1j_2}^{(c_k)} < \alpha_1 d_{i_1i_2}^{(c_k)}$ 且 $d_{i_1j_2}^{(c_k)} < \alpha_1 d_{j_1j_2}^{(c_k)}$, 则关键节点 x_{i_1k} 和 x_{j_2k} 合并为 $(x_{i_1k} + x_{j_2k})/2$.

Step 6 应用已有隶属函数形式,给每个模糊集指定隶属函数,如可采用简单的三角形函数形式.

2 实验分析

为了验证所提出的算法,在 ZPW-2000A 型无绝缘轨道电路半实物模型上进行故障模拟和多路故障特征信号的采集.整个模型除轨道电路采用模拟设备外,其余均采用真实设备.该模型可以模拟载频 1700 Hz、轨长 600 m 的轨道电路,其中补偿电容有 6 个,发送端和接收端的 10 km 长 SPT 电缆均用电缆模拟网络代替.

在该模型上设置 14 种常发硬故障,加上正常运行状态,共 15 种模式.实验中选择 5 个故障特征测量点,采集相应位置交流电压的有效值(单位 V)作为故障特征,采集得到故障样本数据如表 1 所示.应用本文方法划分模糊集,阈值 $\alpha_0 = 0.3$, $\alpha_1 = 0.2$,得到模糊集中心点如表 2 所示.

表 1 故障样本

故障	特征 c_1	特征 c_2	特征 c_3	特征 c_4	特征 c_5
F_1	143.485	43.3	14.05	1.178	0.728
F_2	144	52.5	13.14	1.11	0.68
F_3	142.3	49.5	16.12	1.355	0.838
F_4	142	32.1	0.009 6	0.001 17	0.000 997
F_5	143.3	35.7	12.9	1.08	0.67
F_6	144.5	56	10.13	0.846 8	0.525
F_7	151	170.3	0.046	0.007 8	0.002 4
F_8	142.7	28.8	11.08	0.92	0.57
F_9	143.3	38.4	12.26	1.03	0.635
F_{10}	143.9	43	13.2	1.347	0.832
F_{11}	144	44	0.012	0.002 6	0.002 8
F_{12}	144	41.4	18.2	0.013 5	0.003
F_{13}	143	39.9	0.017	0.001 7	0.001 5
F_{14}	143.7	38	9.06	0.75	0.47
F_{15}	143	36.3	10.7	0.9	0.558

表 2 模糊集中心点

特征 c_1	特征 c_2	特征 c_3	特征 c_4	特征 c_5
	28.8	0.009 6	0.001 7	0.001 5
	35.7	0.017	0.007 8	0.002 9
	38.4	0.046	0.75	0.635
	43.3	10.7	0.846 8	0.728
	52.5	12.26	0.9	0.838
		13.2	1.11	
		16.12	1.178	
			1.347	

给每个模糊集指定已知形式的隶属函数,如高斯函数,每个模糊集对应高斯函数的均值为该模糊集对应的关键节点取值,标准差可以采用大量采集样本并利用统计分析的方式得出,也可以应用采集仪器的测量误差计算得到.例如轨道电路对电压的测量精度

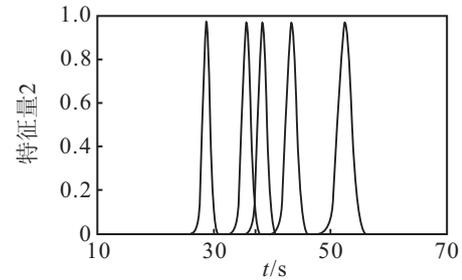
为 $\pm 1\%$,为了保证故障诊断精度,令模糊集能容许的偏差范围为 $\pm 3\%$,则对于每个模糊集,可以采用下式计算高斯函数的标准差:

$$\mu_{\bar{A}}(x) = \exp \left\{ -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right\}.$$

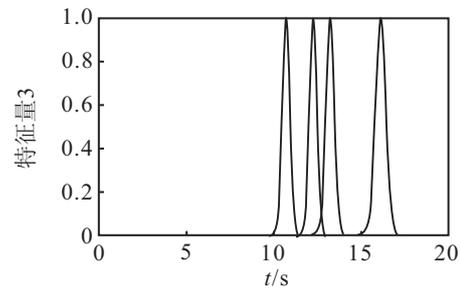
令 $x - \mu = \pm 0.03\mu$,对应的隶属度为 0.5,即

$$\exp \left\{ -\frac{(0.03\mu)^2}{2\sigma^2} \right\} \leq 0.5.$$

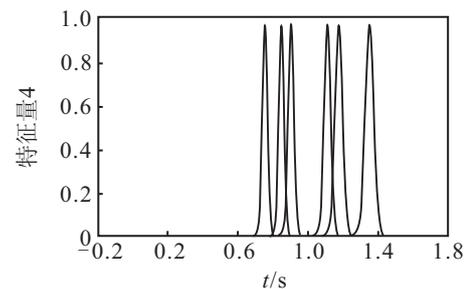
解得 $\sigma \leq 0.02\mu$,则可令 $\sigma = 0.02\mu$,得到各个模糊集对应的隶属函数如图 2 所示.



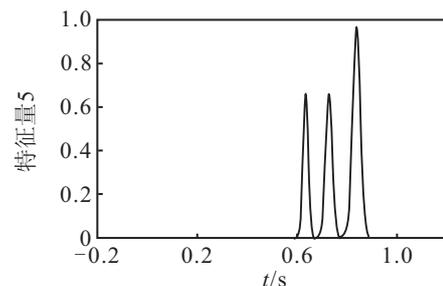
(a) 特征量 2



(b) 特征量 3



(c) 特征量 4



(d) 特征量 5

图 2 隶属函数示意图

在提取模糊规则时,可以采用 WM 算法^[3],或在 WM 算法基础上改进得到的 iWM 算法^[4],或基于数据挖掘的模糊规则所提出的算法(DM 算法)^[5],或以

DM 算法为基础改进的算法^[6]. WM 算法的提取过程最简单, 本文应用改进的 DM 算法提取模糊规则, 模糊规则库如表 3 所示.

表 3 模糊规则

特征 c_1	特征 c_2	特征 c_3	特征 c_4	特征 c_5	故障
1	4	6	6	4	F_1
1	4	6	7	4	F_1
1	5	6	6	3	F_2
1	5	6	6	4	F_2
1	5	7	8	5	F_3
1	1	1	1	1	F_4
1	2	1	1	1	F_4
1	2	5	6	3	F_5
1	2	5	6	4	F_5
1	2	6	5	3	F_5
1	2	6	6	3	F_5
1	2	6	6	4	F_5
1	5	4	4	3	F_6
1	5	4	5	3	F_6
1	5	3	2	2	F_7
1	1	4	4	3	F_8
1	1	4	5	3	F_8
1	3	5	5	3	F_9
1	3	5	6	3	F_9
1	4	6	8	5	F_{10}
1	4	1	1	2	F_{11}
1	3	7	2	2	F_{12}
1	4	7	2	2	F_{12}
1	3	2	1	1	F_{13}
1	2	4	3	3	F_{14}
1	3	4	3	3	F_{14}
1	3	4	4	3	F_{14}
1	2	4	4	3	F_{15}
1	2	4	5	3	F_{15}
1	3	4	5	3	F_{15}

为了验证诊断性能, 对每个样本在每个属性上的观测值分别叠加 $\pm 2\%$ 的随机噪声, 并将每个样本扩充为 1000 个测试数据. 应用上述隶属函数和模糊规则进行故障诊断, 故障确诊率为 100%, 表明在本文方法确定的隶属函数基础上建立的模糊规则库具有较

好的诊断准确率.

3 结 论

本文提出了一种基于两类之间可分性测度的隶属函数确定方法, 有效地克服了已有算法在面向分类问题时确定隶属函数的不足. 通过对模糊集的合理划分, 能够为应用模糊推理来解决分类问题提供有效的途径.

参考文献(References)

[1] Zadeh L A. Fuzzy sets[J]. Information and Control, 1965(8): 338-353.

[2] 谢季坚, 刘承平. 模糊数学方法及其应用[M]. 第 3 版. 武汉: 华中科技大学出版社, 2006: 29-37. (Xie J J, Liu C P. Fuzzy mathematics and its applications[M]. 3rd ed. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology Press, 2006: 29-37.)

[3] Wang L X, Mendel J M. Generating fuzzy rules by learning from examples[J]. IEEE Trans on Systems, Man and Cybernetics, 1992, 22(6): 1414-1427.

[4] Wang L X. The WM method completed: A flexible fuzzy systems[J]. IEEE Trans on Fuzzy systems, 2003, 11(6): 768-782.

[5] 王永富, 王殿辉, 柴天佑. 一个具有完备性和鲁棒性的模糊规则提取算法[J]. 自动化学报, 2010, 36(9): 1337-1342. (Wang Y F, Wang D H, Chai T Y. Extraction of fuzzy rules with completeness and robustness[J]. Acta Automatica Sinica, 2010, 36(9): 1337-1342.)

[6] 董炜, 陈卫征, 徐晓滨, 等. 基于模糊区间优化的模糊推理故障诊断方法[J]. 北京工业大学学报, 2012, 38(12): 1905-1912. (Dong W, Chen W Z, Xu X B, et al. Fault diagnosis method based on fuzzy interval optimization using fuzzy inference[J]. J of Beijing University of Technology, 2012, 38(12): 1905-1912.)

(责任编辑: 郑晓蕾)