第 29 卷 第 12 期
Vol. 29 No. 12

控 制 与 决 策
Control and Decision

2014 年 12 月
Dec. 2014

文章编号: 1001-0920 (2004) 12-2221-05 **DOI:** 10.13195/j.kzyjc.2013.1068

基于复化梯形公式的GM(1,1) 模型背景值的优化

蒋诗泉[1,2], 刘思峰[1], 周兴才[2]

(1. 南京航空航天大学 经济与管理学院，南京 210016；2. 铜陵学院 数学与计算机学院，安徽 铜陵 244000)

摘 要: 背景值是影响灰色理论建模精度的重要因素之一. 根据灰色系统理论建模机理以及数据累加生成具有非齐次灰指数规律, 构建动态序列模型; 基于积分几何意义的视角, 利用函数逼近的思想, 结合复化梯形公式, 提出一种新的GM(1,1) 模型背景值优化方法. 算例结果表明, 利用优化的背景值计算公式所建立的GM(1,1) 模型在预测精度上有显著的提高.

关键词: GM(1,1) 模型；复化梯形公式；背景值；动态序列模型

中图分类号: N941.5 **文献标志码:** A

Optimization of background value in GM(1,1) based on compound trapezoid formula

JIANG Shi-quan[1,2], *LIU Si-feng*[1], *ZHOU Xing-cai*[2]

(1. College of Economic and Management，Nanjing University of Aeronautics and Astronautics，Nanjing 210016，China; 2. College of Mathematics and Computer Science，Tongling University，Tongling 244000，China．Correspondent: JIANG Shi-quan，E-mail：jshq6699@163.com)

Abstract: The background value is one important factor that affects the accuracy of the gray theoretical modeling. The dynamic series model is constructed according to the gray system theory modeling mechanism and the data accumulated generating operation with non-homogeneous gray exponentially. A new GM(1,1) model background value optimization method is proposed based on integral geometric meaning by using the idea of function approximation and the combined trapezoid formula. The example shows that the prediction accuracy of GM(1,1) model is significantly improved by the using the optimized background value formula.

Key words: GM(1,1) model；trapezoid formula；background value；dynamic series model

0 引 言

灰色预测是灰色系统理论的主要内容之一, 而灰色预测模型在很多领域都得到了广泛的应用. GM(1,1) 模型是灰色预测的核心内容, 主要通过一阶微分方程的模型来揭示其内部规律[1]. 许多学者在应用GM(1,1) 模型的过程中发现该模型预测精度不稳定, 并为此做了研究. 文献 [2-4] 阐述了 GM(1,1) 模型预测误差大是由背景值构造方法不恰当造成的, 并给出了背景值构造的新方法; 文献 [5] 给出了一种基于数值分析的Newton-Cotes 背景值公式, 但是在 n 较大时, 高次插值会出现 Runge 现象, 造成误差较大; 文献 [6] 给出了一种基于二次插值的背景值计算方法, 该方法虽然不会出现 Runge 现象, 但是其预测精度难以保证; 文献 [7] 根据一次累加具有“灰指数”的规律, 利用齐次指数拟合灰指数序列对其积分, 并将积分值作为背景值, 该方法的不足之处在于一次累加生成序列并不一定都是齐次序列; 文献 [8-9] 利用一次累加生成序列的准指数规律, 将其准指数设成非齐次指数形式, 通过变换求出准指数函数中的常数, 将该准指数函数积分值作为背景值; 文献 [10] 提出一种背景值重构方法, 该方法利用梯形面积近似背景值时产生的正误差去补偿矩形面积近似背景值时产生的负误差, 因为不好把握如何取 n_1 个小梯形, 所以预测准确性不稳定; 文献 [11] 利用预估——校正技术, 根据一次累加生成序列呈指数增长的特点构造新的插值函数, 从而改善 GM(1,1) 的背景值; 文献 [12-13] 也提出了对背景值的改进措施. 从以上的研究可以看出, 对背景值的优化方法主要有两种: 1) 插值, 即利用插值多

收稿日期: 2013-08-02；**修回日期:** 2013-10-29.

基金项目: 教育部人文社会科学研究基金项目(11YJC790311)；安徽省高校省级自然科学研究基金项目(KJ2012Z409).

作者简介: 蒋诗泉(1974−), 男, 博士生, 从事灰色理论、管理决策分析的研究；刘思峰(1955−), 男, 教授, 博士生导师, 从事灰色理论、数量经济学等研究.

项式的方法改进背景值; 2) 拟合, 即假定对原始数据进行 1-AGO 后为 (非) 齐次指数规律, 通过变换求出 (非) 齐次指数中的系数, 对 1-AGO 后为 (非) 齐次指数函数进行积分运算, 其积分值作为优化的背景值. 基于数值分析的插值方法主要的缺陷是多项式次数的选择不易处理, 同时预测精度也不能保证; 基于 (非) 齐次指数拟合 1-AGO 序列 $x^{(1)}(k)$ 方法的主要缺陷是对预测精度的提高不明显.

在以往学者的研究基础上, 本文利用一次累加具有非齐次灰指数规律, 构建动态序列模型. 该模型的变量可以取实数, 克服了以往研究中变量只取正整数的缺陷; 从积分几何意义的视角, 利用函数逼近的思想, 结合复化梯形公式去改进其背景值, 从而提高 GM(1,1) 模型的预测精度. 算例结果说明, 改进的背景值公式能够提高 GM(1,1) 预测的精度, 具有一定的理论意义和实践意义.

1 传统灰色模型的建模机理及其误差分析

1.1 传统灰色 GM(1,1) 模型的建模机理

定义 1[1] 灰色 GM(1,1) 预测模型中, 已知原始序列

$$X^{(0)}=\{x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n)\},$$
$$x^{(0)}(i)>0,\ i=1,2,\cdots,n.$$

则其一次累加序列为

$$X^{(1)}=\{x^{(1)}(1),x^{(1)}(2),\cdots,x^{(1)}(n)\},$$
$$x^{(1)}(k)=\sum_{i=1}^{k}x^{(0)}(i),\ i=1,2,\cdots,n.$$

GM(1,1) 的原始形式为

$$x^{(0)}(k)+ax^{(1)}(k)=b. \tag{1}$$

定义 2 $X^{(0)},X^{(1)}$ 如定义 1 所示, 令

$$Z^{(1)}=(z^{(1)}(1),z^{(1)}(2),\cdots,z^{(1)}(n)),$$
$$z^{(1)}(k)=\frac{1}{2}(x^{(1)}(k)+x^{(1)}(k-1)),$$

则 GM(1,1) 模型的基本形式为

$$x^{(0)}(k)+az^{(1)}(k)=b. \tag{2}$$

定理 1[1] 若参数列 $\hat{a}=[a,b]^{\mathrm{T}}$, 且

$$Y=\begin{bmatrix}x^{(0)}(2)\\x^{(0)}(3)\\\vdots\\x^{(0)}(n)\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}-z^{(1)}(2)&1\\-z^{(1)}(3)&1\\\vdots&\vdots\\-z^{(1)}(n)&1\end{bmatrix},$$

则 GM(1,1) 模型 (1) 的最小二乘估计参数列满足 $\hat{a}=(B^{\mathrm{T}}B)^{-1}B^{\mathrm{T}}Y$.

GM(1,1) 模型 (1) 的时间响应序列为

$$\hat{X}^{(1)}(k+1)=\Big(x^{(0)}(1)-\frac{b}{a}\Big)\mathrm{e}^{-ak}+\frac{b}{a},$$
$$k=1,2,\cdots,n. \tag{3}$$

其还原值为

$$\hat{X}^{(0)}(k+1)=\hat{x}^{(1)}(k+1)-\hat{x}^{(1)}(k)=$$
$$(1-\mathrm{e}^{a})\Big(x^{(0)}(1)-\frac{b}{a}\Big)\mathrm{e}^{-ak},$$
$$k=1,2,\cdots,n. \tag{4}$$

从式 (4) 可以看出, GM(1,1) 模型的模拟预测精度取决于参数 a,b 的值, 而 a,b 的值又取决于 $z^{(1)}(k)$ 的求解, $z^{(1)}(k)$ 是所称的背景值. 由此可见, 背景值是影响 GM(1,1) 模型预测精度的一个重要方面.

1.2 传统 GM(1,1) 模型的误差分析

式 (2) 的白化方程为

$$\frac{\mathrm{d}x^{(1)}(t)}{\mathrm{d}t}+ax^{(1)}(t)=b. \tag{5}$$

对式 (5) 在 $[k-1,k]$ 上积分, 得

$$x^{(0)}(k)+a\int_{k-1}^{k}x^{(1)}(t)\mathrm{d}t=b. \tag{6}$$

将式 (6) 与 (2) 进行比较, 得

$$z^{(1)}(k)=\int_{k-1}^{k}x^{(1)}(t)\mathrm{d}t. \tag{7}$$

传统的背景值是梯形的面积, 而实际值应该等于曲线 $x^{(1)}(t)$ 在区间 $[k-1,k]$ 上与 t 轴所围成的曲边梯形的面积 $\int_{k-1}^{k}x^{(1)}(t)\mathrm{d}t$, 两面积之差即为传统背景值计算公式的误差来源[15].

2 GM(1,1) 模型背景值优化方法研究

2.1 背景值优化的方法

从积分的几何意义去考虑背景值优化, 在区间 $[k-1,k]$ 上不断地添加插入点, 利用函数逼近的思想求出曲边梯形的面积. 此处用多项式进行逼近, 采取分段低次插值, 低次插值多项式的次数 $n\in[2,4]$, 一般取 2 次多项式. 因为高次多项式 $L_n(x)$ 的次数越高, 对被积函数光滑度的要求也越高. 同时, 对 $n\to\infty$ 时, $L_n(x)$ 也不一定收敛到 $f(x)$. 而积分区间越小, 求积分的误差越小. 因此, 利用梯形公式, 构造相应的求积公式, 然后将所有小区间上的积分加起来, 得到整个区间 $[k-1,k]$ 上的求积公式, 如图 1 所示. 根据其他学者的研究思路, 虽然 1-AGO 序列成非齐次指数形式, 但是并不认为所有的点就在某一条指数曲线上, 这条曲线也只是一条近似曲线. 因此, 将这条曲线作为构造小区间端点值的一个动态序列模型, 由这个序列模

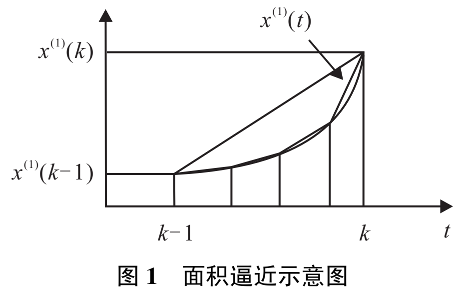

图 1 面积逼近示意图

型求出每个小区间端点值, 然后利用复化求积公式计算出优化的背景值.

定义 3[16]　记 $[k-1,k]=[a,b]$, 把区间 $[a,b]$ 分成 n 等分, 节点为 $x_k=a+kh$. 其中: $k=0,1,\cdots,n$; $h=\dfrac{a-b}{n}$. 对每个小区间 $[x_k,x_{k+1}]$ 用数值积分中的梯形公式, 得

$$\begin{aligned}&I=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\\&\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}f(x)\mathrm{d}x\approx\\&\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x_{k+1}+x_k}{2}(f(x_k)+f(x_{k+1}))=\\&\frac{h}{2}\Big(f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(a+k\cdot h)\Big)=T_n.\end{aligned}$$

称 T_n 为复化梯形求积公式, 下标 n 表示将区间 n 等分, 若把区间 $2n$ 等分, 在每个区间上仍用梯形公式, 则可以得到如下定理.

定理 2　将复化梯形公式 T_n 的区间 $2n$ 等分得到 T_{2n}, 则 T_n 与 T_{2n} 之间有如下关系:

$$T_{2n}=\frac{1}{2}(T_n+H_n),$$

其中

$$H_n=h\cdot\sum_{k=1}^{n}f\Big(a+(2k-1)\frac{b-a}{2n}\Big).$$

证明

$$\begin{aligned}&T_{2n}=\\&\frac{h}{4}\cdot\sum_{k=1}^{n-1}[f(x_k)+2f(x_{k+\frac{1}{2}})+f(x_{k+1})]=\\&\frac{1}{2}T_n+\frac{h}{2}\cdot\sum_{k=1}^{n-1}f(x_{k+\frac{1}{2}})=\\&\frac{1}{2}(T_n+H_n),\end{aligned}$$

其中

$$H_n=h\cdot\sum_{k=1}^{n}f\Big(a+(2k-1)\frac{b-a}{2n}\Big).$$

由此, 定理得证. □

定理 2 在本质上给出了一个良好的 T_n 与 T_{2n} 之间的递推关系, 这个递推关系可以方便计算机编程, 理论上能够实现在计算机上求解 T_n、T_{2n} 的值.

定理 3　设 $X^{(0)}=\{x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n)\}$, $x^{(0)}(i)>0\,(i=1,2,\cdots,n)$ 为原始序列, 并设其 1-AGO 累加序列为 $x^{(1)}(k)=A\mathrm{e}^{\alpha(k-1)}+B$, 则有

$$\alpha=\ln\frac{x^{(0)}(k)}{x^{(0)}(k-1)},$$

$$A=\frac{x^{(0)}(k)}{\Big(\dfrac{x^{(0)}(k)}{x^{(0)}(k-1)}\Big)^{k-1}\Big(1-\dfrac{x^{(0)}(k-1)}{x^{(0)}(k)}\Big)},$$

$$\begin{aligned}&B=x^{(0)}(k_1)-A=\\&x^{(0)}(k_1)-\frac{x^{(0)}(k)}{\Big(\dfrac{x^{(0)}(k)}{x^{(0)}(k-1)}\Big)^{k-1}\Big(1-\dfrac{x^{(0)}(k-1)}{x^{(0)}(k)}\Big)}.\end{aligned}$$

称 $x^{(1)}(t)=A\mathrm{e}^{\alpha(t-1)}+B,\ t\geqslant1$ 为 1-AGO 动态序列预测模型.

证明　因为

$$\begin{aligned}&x^{(0)}(k)=x^{(1)}(k)-x^{(1)}(k-1)=\\&A\mathrm{e}^{\alpha(k-1)}-A\mathrm{e}^{\alpha(k-2)}=\\&A\mathrm{e}^{\alpha(k-1)}(1-\mathrm{e}^{-\alpha}),\end{aligned}\tag{8}$$

所以

$$\frac{x^{(0)}(k)}{x^{(0)}(k-1)}=\frac{A\mathrm{e}^{\alpha(k-1)}(1-\mathrm{e}^{-\alpha})}{A\mathrm{e}^{\alpha(k-2)}(1-\mathrm{e}^{-\alpha})}=\mathrm{e}^{\alpha},\tag{9}$$

对式 (9) 两边取对数, 得

$$\alpha=\ln\frac{x^{(0)}(k)}{x^{(0)}(k-1)},\tag{10}$$

由式 (8) 得

$$\begin{aligned}&A=\frac{x^{(0)}(k)}{\mathrm{e}^{\alpha(k-1)}(1-\mathrm{e}^{-\alpha})}=\\&\frac{x^{(0)}(k)}{\mathrm{e}^{(k-1)\ln\frac{x^{(0)}(k)}{x^{(0)}(k-1)}}\Big(1-\mathrm{e}^{\ln\frac{x^{(0)}(k-1)}{x^{(0)}(k)}}\Big)}=\\&\frac{x^{(0)}(k)}{\Big(\dfrac{x^{(0)}(k)}{x^{(0)}(k-1)}\Big)^{k-1}\Big(1-\dfrac{x^{(0)}(k-1)}{x^{(0)}(k)}\Big)}.\end{aligned}\tag{11}$$

由初值条件可以知道

$$x^{(1)}(k_1)=x^{(0)}(k_1)=A\mathrm{e}^{\alpha(k_1-k_1)}+B=A+B,$$

则

$$\begin{aligned}&B=x^{(0)}(k_1)-A=\\&x^{(0)}(k_1)-\frac{x^{(0)}(k)}{\Big(\dfrac{x^{(0)}(k)}{x^{(0)}(k-1)}\Big)^{k-1}\cdot\Big(1-\dfrac{x^{(0)}(k-1)}{x^{(0)}(k)}\Big)}.\end{aligned}\tag{12}$$

由此, 定理得证. □

2.2　利用优化的背景值进行建模

Step 1: 利用定理 3 中的 1-AGO 动态序列预测模型, 计算在区间 $[k,k+1]$ 上 n 等分点处的函数值 (即 $f(a+kh)$ 的值);

Step 2: 利用复化求积公式计算背景值

$$\begin{aligned}&z^{(1)}(k)=\int_{k-1}^{k}x^{(1)}(t)\mathrm{d}t=\\&\qquad\frac{h}{2}\Big(f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(a+k\cdot h)\Big);\end{aligned}$$

Step 3: 利用定理 1 计算 GM(1,1) 的时间响应序列及其还原值的表达式, 并进行预测.

3　算例分析

以 2002～2011 年的国家能源消费需求数据作

为基本数据[17], 在能源消费需求预测中应用原始GM(1,1)模型和优化背景值以后的GM (1,1) (以下简称优化的GM(1,1)), 以比较两个模型的预测精度; 以2002～2009年能源消费需求数据作为原始数据, 对2010、2011两年的能源消费需求进行预测; 用2010、2011两年的实际数据作为检验数据. 具体过程以区间[1, 2]为例, 每个区间插入3个点将其平均分成4份, 其他区间类似.

Step 1 计算 α.

$$\alpha=\ln\frac{x^{(0)}(k)}{x^{(0)}(k-1)}=\ln\frac{x^{(0)}(2)}{x^{(0)}(1)}=\ln\frac{18.38}{15.93}=0.1431.$$

Step 2 计算 A.

$$A=\frac{x^{(0)}(k)}{\Big(\dfrac{x^{(0)}(k)}{x^{(0)}(k-1)}\Big)^{k-1}\Big(1-\dfrac{x^{(0)}(k-1)}{x^{(0)}(k)}\Big)}=\frac{18.38}{\Big(\dfrac{18.38}{15.93}\Big)^{2-1}\Big(1-\dfrac{15.93}{18.38}\Big)}=119.51.$$

Step 3 计算 B.

$$B=x^{(0)}(k_1)-A=15.93-119.51=-103.58.$$

Step 4 计算每个小区间的端点值, 利用动态序列模型 $x^{(1)}(t)=A\mathrm{e}^{\alpha(t-1)}+B,\ t\geqslant 1$, 即

$$x^{(1)}(t)=119.51\mathrm{e}^{0.1431(t-1)}-103.58.$$

得

$$x^{(1)}(t_1)=\begin{cases}20.28,\ t_1=5/4;\\24.79,\ t_1=6/4;\\34.31,\ t_1=7/4.\end{cases}$$

则有 $f(a)=x^{(1)}(1)=15.93$, $f(b)=34.31$.

Step 5 计算优化的背景值.

$$z^{(1)}(k)=\int_{k-1}^{k}x^{(1)}(t)\mathrm{d}t\Rightarrow$$

$$z^{(1)}(2)=\int_{1}^{2}x^{(1)}(t)\mathrm{d}t=\frac{h}{2}\Big(f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(a+k\cdot h)\Big)=\frac{15.93+34.31+2(20.28+24.79+29.47)}{8}=24.9125.$$

同理得到

$$z^{(1)}(3)=44.6215,\ z^{(1)}(4)=67.9784,$$
$$z^{(1)}(5)=93.0612,\ z^{(1)}(6)=121.1735,$$
$$z^{(1)}(7)=156.7850,\ z^{(1)}(8)=183.4950.$$

将上面的优化背景值代入GM(1,1)模型, 得到模拟预测值, 见表1.

表 1 能源消费需求预测比较

年份	序号	原始数据/10^8t	GM(1,1) 模型		优化的 GM(1,1) 模型	
			模拟预测值/10^8t	相对误差/%	模拟预测值/10^8t	相对误差/%
2002	1	15.93	15.93	0.00	15.93	0.00
2003	2	18.38	19.75	7.50	19.83	7.88
2004	3	21.35	21.36	0.05	21.33	0.09
2005	4	23.60	23.10	2.12	22.94	0.67
2006	5	25.87	24.98	3.44	24.67	4.63
2007	6	28.00	27.02	3.5	26.53	5.25
2008	7	29.14	29.23	0.31	28.53	2.09
2009	8	30.66	31.61	3.09	30.68	0.07
2010	9	32.50	34.19	5.2	32.99	1.51
2011	10	34.80	36.98	6.26	35.48	1.95
平均相对误差/%				3.15		2.41

4 结 论

根据灰色系统建模理论, 分析了原始GM(1,1)模型的建模原理及传统的GM(1,1)模型预测误差的根源, 认为影响灰色系统建模精度的一个重要因素是背景值构造. 本文从积分的几何意义出发, 利用函数逼近的思想, 结合复化梯形公式, 提出了一种新的重构背景值的方法. 根据重构背景值的GM(1,1)模型, 利用2002～2011年的能源消费需求数据进行模拟预测, 证明该模型能够显著提高预测精度. 该背景值的构造具有一定的理论意义和现实意义, 能够使GM(1,1)模型在实际应用中发挥更大的作用.

参考文献(References)

[1] 刘思峰, 党耀国, 方志耕, 等. 灰色系统理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2010: 146-153.
(Liu S F, Dang Y G, Fang Z G, et al. Grey system and its application[M]. Beijing: Science Press, 2010: 146-153.)

[2] 谭冠军. GM(1,1)模型背景值构造方法和应用(I)[J]. 系统工程理论与实践, 2000, 20(4): 98-103.
(Tan G J. The structure method and application of background value in grey system GM (1,1) model (I)[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2000, 20(4): 98-103.)

[3] 谭冠军. GM(1,1) 模型背景值构造方法和应用 (II)[J]. 系统工程理论与实践, 2000, 20(5): 125-132.
(Tan G J. The structure method and application of background value in grey system GM(1,1) model (II)[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2000, 20(5): 125-132.)

[4] 谭冠军. GM(1,1) 模型背景值构造方法和应用 (III)[J]. 系统工程理论与实践, 2000, 20(6): 70-74.
(Tan G J. The structure method and application of background value in grey system GM(1,1) model (III)[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2000, 20(6): 70-74.)

[5] 李俊峰, 戴文战. 基于插值和Newton-Cotes公式的GM(1,1) 模型的背景值构造新方法及应用[J]. 系统工程理论与实践, 2002, 22(10): 122-126.
(Li J F, Dai W Z. A new approach of background value-building and its application based on data interpolation and Newton-Cores formula[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2002, 22(10): 122-126.)

[6] 唐万梅, 向长合. 基于二次插值的 GM(1,1) 模型预测方法的改进[J]. 中国管理科学, 2006, 14(6): 109-112.
(Tang W M, Xiang C H. The improvements of forecasting method in GM(1,1) model based on quadratic interpolation[J]. Chinese J of Management Science, 2006, 14(6): 109-112.)

[7] 罗党, 刘思峰, 党耀国. 灰色模型 GM(1,1)优化[J]. 中国工程科学, 2003, 5(8): 50-53.
(Luo D, Liu S F, Dang Y G. The optimization of grey model GM(1,1)[J]. Engineering Science, 2003, 5(8): 50-53.)

[8] 熊萍萍, 党耀国, 王正新. MGM(1,m) 模型背景值优化[J]. 控制与决策, 2011, 26(6): 806-810.
(Xing P P, Dang Y G, Wang Z X. Optimization of background value in MGM(1,m) model[J]. Control and Decision, 2011, 26(6): 806-810.)

[9] 王叶梅, 党耀国, 王正新. 非等间距 GM(1,1) 模型背景值的优化[J]. 中国管理科学, 2008, 16(4): 159-162.
(Wang Y M, Dang Y G, Wang Z X. The optimization of background value in non-equidistant GM(1,1) model[J]. Chinese J of Management Science, 2008, 16(4): 159-162.)

[10] 戴文战, 熊伟, 杨爱萍. 基于函数 cot(x^α) 变换及背景值优化的灰色建模[J]. 浙江大学学报: 工学版, 2010, 44(7): 1368-1372.
(Dai W Z, Xiong W, Yang A P. Grey modeling based on cot(x^α) transform and background value optimization[J]. J of Zhejiang University: Engineering Science, 2010, 44(7): 1368-1372.)

[11] 穆海林, 王文超, 宁亚东, 等. 基于改进灰色模型的能源消费预测研究[J]. 大连理工大学学报, 2011, 51(4): 493-497.
(Mu H L, Wang W C, Ning Y D, et al. Study of energy consumption prediction based on improved grey model[J]. J of Dalian University of Technology, 2011, 51(4): 493-497.)

[12] 刘乐, 王洪国, 王宝伟. 基于背景值构造方法的 GM(1,1) 模型优化[J]. 统计与决策, 2009, 277(1): 153-155.
(Liu L, Wang H G, Wang B W. GM(1,1) model optimization based on construction of background value[J]. Statistics and Decision, 2009, 277(1): 153-155.)

[13] Wang Z X, Dang Y G, Liu S F. The optimization of background value in model[J]. J of Grey System, 2007, 10(2): 69-74.

[14] Wang F X. Improvement on unequal interval gray forecast model[J]. Fuzzy Information and Engineering, 2006, 6(1): 118-123.

[15] 李星毅, 李奎, 施化吉, 等. 背景值优化的 GM(1,1) 预测模型及应用[J]. 电子科技大学学报, 2011, 40(6): 911-914.
(Li X Y, Li K, Shi J H. Optimization of GM(1,1) prediction model based on background value and its application[J]. J of University of Electronic Science and Technology of China, 2011, 40(6): 911-914.)

[16] 李庆扬, 王能超, 易大义. 数值分析[M]. 武汉: 华中理工大学出版社, 2000: 126-127.
(Li Q Y, Wang N C, Yi D Y. Numerical analysis[M]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology Press, 2000: 126-127.)

[17] 国家统计局. 中国统计年鉴 2011[M]. 北京: 中国统计出版社, 2012: 336-337.
(National Bureau of Statistics of China. China statistical yearbook 2011[M]. Beijing: Statistical Press of China, 2012: 336-337.)

(责任编辑: 齐 霁)