

## 不确定性系统的非因果鲁棒学习控制

姜晓明<sup>1,2</sup>, 陈兴林<sup>1</sup>

(1. 哈尔滨工业大学 航天学院, 哈尔滨 150001; 2. 上海机电工程研究所, 上海 201109)

**摘要:** 针对不确定性系统提出一种非因果鲁棒学习控制方法. 该学习控制律的非因果学习部分通过标称系统的优化指标得到, 鲁棒部分通过设计鲁棒加权来实现. 首先, 不考虑鲁棒部分的具体形式, 推导出标称系统描述的学习控制律的鲁棒收敛性条件; 然后, 设计与系统不确定性相关的鲁棒加权, 由鲁棒收敛性条件得到鲁棒加权的设计原则; 最后, 通过仿真实验验证了所提出方法的有效性, 并分析了不同形式不确定性系统鲁棒设计的保守性.

**关键词:** 不确定性系统; 鲁棒学习控制; 非因果; 鲁棒收敛性

**中图分类号:** TP273

**文献标志码:** A

## Non-causal robust learning control for uncertain systems

JIANG Xiao-ming<sup>1,2</sup>, CHEN Xing-lin<sup>1</sup>

(1. School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China; 2. Shanghai Electro-Mechanical Engineering Institute, Shanghai 201109, China. Correspondent: JIANG Xiao-ming, E-mail: jiangxm@hit.edu.cn)

**Abstract:** A non-causal robust learning control method is presented for uncertain systems. According to the optimal index of the nominal system, the non-causal learning part of the method is developed, and the robust part is determined by designing robust weightings. Firstly, robust convergence conditions of learning control laws based on the nominal system are derived when specific forms of the robust part are not considered. Then, robust weightings which are related to uncertainties of the system are designed, and the method for designing robust weightings is drawn according to the robust convergence condition. Finally, simulations are implemented for the validating effectiveness of the method, and the conservatism of robust design of different uncertain systems is analyzed.

**Key words:** uncertain system; robust learning control; non-causality; robust convergence

### 0 引言

迭代学习控制<sup>[1-2]</sup>用于改善重复性运动过程的动态性能. Arimoto 最初提出迭代学习控制的一个前提是被控对象的动态特性不发生变化, 然而实际上无法保证对象特性在每个迭代周期内都严格一致. 因此, 针对不确定性系统的鲁棒迭代学习控制是有意义的.

鲁棒迭代学习控制的雏形是直接引入低通或者带通形式的滤波器<sup>[3]</sup>, 它简单易行, 虽然在一定程度上保证了系统的鲁棒收敛性, 但对系统的收敛性能有明显的衰减. 为了减小不确定性系统收敛性能的保守性, 引入鲁棒控制的思想, 构建学习控制律的鲁棒设计框架, 通过鲁棒综合的方法来提高系统的性能. 从频域的角度看, 文献[4-5]利用  $H_\infty$  手段设计迭代学习控制律, 得到了因果学习律; 文献[6-7]尝试构建了闭环鲁棒迭代学习控制律, 然而兼顾反馈性能和收敛

性能是困难的. 从时域的角度看, Ahn 等<sup>[8]</sup>另辟蹊径, 直接从系统脉冲响应的不确定性出发, 构建了基于区间不确定性的鲁棒迭代学习控制律, 其形式简单, 但适用范围有限; 文献[9-11]采用 LMI 方法分别设计了不同的鲁棒学习控制律, 然而不容易得到可行解. 无论是频域还是时域设计, 通过鲁棒综合方法得到的学习控制律几乎都是因果的, 所以难以取得好的收敛性能.

构建非因果的鲁棒迭代学习控制律对提高系统性能有重要的意义. 这类设计围绕着基于优化指标的迭代学习控制律<sup>[12]</sup>. 文献[13]分析了范数指标加权系数对学习系统鲁棒性的影响, 但只给出了鲁棒收敛性条件, 而缺少相应的鲁棒设计方法. 本文不仅给出了非因果鲁棒迭代学习控制律的鲁棒收敛性条件, 并且给出其设计方法.

收稿日期: 2013-08-23; 修回日期: 2013-11-08.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61174038); 国家科技重大专项基金项目(2009ZX02207).

作者简介: 姜晓明(1985-), 男, 博士生, 从事迭代学习控制、超精密运动控制的研究; 陈兴林(1963-), 男, 教授, 博士生导师, 从事超精密运动控制、智能控制等研究.

## 1 鲁棒迭代学习控制

鲁棒迭代学习控制是针对不确定性系统设计的学习控制律,它要求系统在存在不确定性时满足一定的鲁棒收敛性条件.此时,系统的控制误差或控制量趋于终值.若离散系统的采样周期为  $dT$ ,系统输入为

$$u = [u(0) \quad u(1) \quad \cdots \quad u(N-1)]^T,$$

系统输出为

$$y = [y(1) \quad y(2) \quad \cdots \quad y(N)]^T,$$

则系统在有限长时间段  $[0, (N-1)dT]$  的数学描述为

$$y = P_0 u. \quad (1)$$

其中

$$P_0 = \begin{bmatrix} CB & 0 & \cdots & 0 \\ CAB & CB & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{N-1}B & CA^{N-2}B & \cdots & CB \end{bmatrix},$$

这里  $A$ 、 $B$ 、 $C$  为标称系统的状态阵.此外,不确定性加权阵为  $W$  和  $\Delta$ ,则乘性不确定性系统  $P$  描述为

$$P = P_0(I + W\Delta). \quad (2)$$

下面探讨学习控制系统的鲁棒收敛性条件.不失一般性,给出学习控制律的一般表达形式<sup>[2]</sup>

$$u_{i+1} = Q(u_i + Le_i). \quad (3)$$

其中:  $u_i$  为第  $i$  步迭代周期的控制量,  $u_{i+1}$  为第  $i+1$  步迭代周期的控制量,  $L$  为学习控制律,  $Q$  为低通滤波器.设学习律是因果的,  $L$  和  $Q$  都是下三角 Toeplitz 矩阵形式.若令系统的参考输入为  $r$ ,则系统的跟踪误差为  $e_i = r - y_i$ .对于式 (3) 描述的学习控制律,容易得到系统的鲁棒收敛条件,如下所述.

**引理 1** 对于不确定性系统 (2) 和学习控制律 (3),若系统的不确定性满足  $\|\Delta\|_2 < 1$ ,则当系统满足  $\|Q(I - P_0L - P_0W\Delta L)\|_2 < 1$  时,系统是鲁棒收敛的.

**证明** 对于式 (3) 描述的学习控制律,第  $i+1$  步迭代周期的误差为

$$e_{i+1} = Q(I - PL)e_i + (I - Q)r. \quad (4)$$

令

$$e_f = (I - Q(I - PL))^{-1}(I - Q)r, \quad (5)$$

则

$$\|e_{i+1} - e_f\|_2 =$$

$$\|Q(I - P_0L - P_0W\Delta L)\|_2 \|e_i - e_f\|_2.$$

因此,当  $\|Q(I - P_0L - P_0W\Delta L)\|_2 < 1$  时,系统是鲁棒收敛的.  $\square$

若令  $L = P_0^{-1}$ ,则得到如文献 [14] 所述的鲁棒收敛性条件  $\|QW\|_2 < 1$ .然而,通过上述收敛性条件

无法得到完整的鲁棒学习控制律.在具体的实施过程中需要反复地试凑,而在试凑过程得到的学习收敛律可能是保守的.

本文的设计思路是通过优化指标得到相应的非因果鲁棒学习控制律.虽然基于优化指标的学习控制律被广泛研究,但更多地集中在鲁棒收敛性条件的分析上,鲜有文献给出针对一般不确定性(例如乘性或加性不确定性)系统的鲁棒设计结果.针对不确定性系统的鲁棒优化问题为

$$\begin{aligned} \min_{u_{i+1}} \max_{\Delta} J(\Delta) = \\ \min_{u_{i+1}} \max_{\Delta} \frac{1}{2} [e_{i+1}^T(\Delta) S e_{i+1}(\Delta) + \\ Au_{i+1}^T R Au_{i+1} + u_{i+1}^T T u_{i+1}]. \end{aligned} \quad (6)$$

其中

$$e_{i+1}(\Delta) = r - Pu_{i+1}, \quad Au_{i+1} = u_{i+1} - u_i.$$

若令  $S = I$ ,  $R = \alpha I$ ,  $T = \beta I$ ,  $\Delta = 0$ ,利用优化理论  $\partial J(0)/\partial u_{i+1}$ ,结合式 (3) 的描述形式,给出针对标称系统  $P_0$  的优化学习控制律

$$\begin{cases} L = (\alpha I + P_0^T P_0)^{-1} P_0^T, \\ Q = (\alpha I + P_0^T P_0 + \beta I)^{-1} (\alpha I + P_0^T P_0), \end{cases} \quad (7)$$

其中  $L$  包含了  $P_0$  的转置形式,即  $L$  的主对角线上方存在不为零的元素.此时,设  $k$  为系统的采样时刻,控制量  $u_{i+1}(k)$  不仅与  $e_i(k-1)$ ,  $e_i(k-2)$ ,  $\cdots$  有关,而且与  $e_i(k+1)$ ,  $e_i(k+2)$ ,  $\cdots$  有关,学习控制律在时域上是非因果的.当  $\Delta \neq 0$  时,选择相应的鲁棒加权将得到针对一般不确定性系统的鲁棒迭代学习控制律,具体设计将在下一节中展开.

## 2 非因果鲁棒学习控制

本节将针对两种不同形式的不确定性系统给出非因果鲁棒学习控制律的收敛性条件,并通过收敛性条件进一步推导出学习控制律的鲁棒设计结果.

### 2.1 乘性不确定性情况

首先给出乘性不确定性系统的鲁棒收敛性条件,若不考虑滤波器  $Q$  的具体形式,得到如下引理.

**引理 2** 对于式 (2) 所述的系统和式 (7) 所述的非因果学习律,当  $\|\Delta\|_2 < 1$  时,若系统满足  $\|QW\|_2 < 1$ ,则不确定性系统是鲁棒收敛的.

**证明** 对于式 (7) 所述的非因果学习律

$$L = (\alpha I + P_0^T P_0)^{-1} P_0^T,$$

误差为

$$e_i = y_d - P_0(I + W\Delta)u_i,$$

则

$$\begin{aligned}
u_{i+1} = & \\
Q(u_i + (\alpha I + P_0^T P_0)^{-1} P_0^T e_i) = & \\
Q(u_i - (\alpha I + P_0^T P_0)^{-1} P_0^T P_0 (I + W \Delta) u_i) + & \\
Q(\alpha I + P_0^T P_0)^{-1} P_0^T y_d. & \quad (8)
\end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned}
u_f = & \\
(I - Q + Q(\alpha I + P_0^T P_0)^{-1} P_0^T P_0 (I + W \Delta))^{-1} \times & \\
Q(\alpha I + P_0^T P_0)^{-1} P_0^T y_d, &
\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}
\delta u_{i+1} = & \\
(Q(I - (\alpha I + P_0^T P_0)^{-1} P_0^T P_0 (I + W \Delta))) \delta u_i, &
\end{aligned}$$

其中  $\delta u_i = u_i - u_f$ . 得到不确定性系统的鲁棒收敛条件

$$\|Q(I - (\alpha I + P_0^T P_0)^{-1} P_0^T P_0 (I + W \Delta))\|_2 < 1. \quad (9)$$

进一步, 上述条件等价于

$$\|Q(\alpha I - P_0^T P_0 W \Delta)\|_2 < \|\alpha I + P_0^T P_0\|_2. \quad (10)$$

当  $\|QW\|_2 < 1$  且  $\|\Delta\|_2 < 1$  时, 有

$$\|QP_0^T P_0 W \Delta\|_2 < \|P_0^T P_0\|_2. \quad (11)$$

由系统低通滤波器的特点和 Toeplitz 矩阵的性质得

$$\|Q\alpha\|_2 + \|QP_0^T P_0 W \Delta\|_2 < \alpha + \|P_0^T P_0\|_2, \quad (12)$$

因而

$$\|Q(\alpha I - P_0^T P_0 W \Delta)\|_2 < \|Q\alpha\|_2 + \|QP_0^T P_0 W \Delta\|_2$$

成立, 最终有

$$\|Q(\alpha I - P_0^T P_0 W \Delta)\|_2 < \|\alpha I + P_0^T P_0\|_2. \quad (13)$$

所以不确定性系统是鲁棒收敛的.  $\square$

引理 2 给出了系统鲁棒收敛的充分不必要条件, 与上一节中基于系统逆的学习律收敛性条件是一致的. 然而, 在很多情况下上述条件可能是保守的. 下面将进一步给出非因果鲁棒学习控制律的设计结果.

**定理 1** 对于式 (2) 所述的系统和式 (7) 所述的非因果学习律和滤波器表达形式, 当  $\beta = \frac{1}{4} \|P_0 W\|_2^2$ , 且  $\|\Delta\|_2 < 1$  时, 系统是鲁棒收敛的.

**证明** 根据引理 2, 考虑式 (7) 所述的  $Q$  的加权形式, 由  $\|Q(\alpha I - P_0^T P_0 W \Delta)\|_2 < \|\alpha I + P_0^T P_0\|_2$  可知, 只要令

$$\|(\alpha I + \beta I + P_0^T P_0)^{-1} (\alpha I - P_0^T P_0 W \Delta)\|_2 < 1$$

成立即可. 当  $\beta = \frac{1}{4} \|P_0 W\|_2^2$  时, 由范数性质得

$$\|P_0^T P_0\|_2 + \beta > \|P_0^T P_0 W\|_2. \quad (14)$$

当  $\|\Delta\|_2 < 1$  时, 又有

$$\|P_0^T P_0 W \Delta\|_2 < \|P_0^T P_0 W\|_2 < \|P_0^T P_0\|_2 + \beta. \quad (15)$$

最终可以得到

$$\|\alpha I - P_0^T P_0 W \Delta\|_2 < \|\alpha I + \beta I + P_0^T P_0\|_2, \quad (16)$$

因此系统是鲁棒收敛的.  $\square$

通过定理 1 可以直接设计与乘性不确定性相关的鲁棒加权, 用于处理乘性不确定性系统的非因果鲁棒学习控制问题. 然而, 很多系统通过加性不确定性的描述更为方便, 造成的不确定性描述的保守性也更小, 所以下面将针对加性不确定性系统进行分析, 并给出相应的设计结果.

## 2.2 加性不确定性情况

下面给出系统在加性不确定性情况下的设计结果. 若不确定性系统描述为

$$P = P_0 + W \Delta, \quad (17)$$

则加性不确定性系统的鲁棒收敛条件如下所述.

**引理 3** 对于式 (17) 所述的系统和式 (7) 所述的非因果学习律, 当  $\|\Delta\|_2 < 1$  时, 若系统满足  $\|W\|_2 < \|P_0\|_2$ , 则不确定性系统是鲁棒收敛的.

**证明** 对于非因果学习律 (7), 系统误差为  $e_i = y_d - (P_0 + W \Delta) u_i$ , 则

$$\begin{aligned}
u_{i+1} = & \\
Q(u_i + (\alpha I + P_0^T P_0)^{-1} P_0^T e_i) = & \\
Q(I - (\alpha I + P_0^T P_0)^{-1} P_0^T (P_0 + W \Delta)) u_i + & \\
Q(\alpha I + P_0^T P_0)^{-1} P_0^T y_d. & \quad (18)
\end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned}
u_f = & \\
(I - Q + Q(\alpha I + P_0^T P_0)^{-1} P_0^T (P_0 + W \Delta))^{-1} \times & \\
Q(\alpha I + P_0^T P_0)^{-1} P_0^T y_d, & \quad (19)
\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}
\delta u_{i+1} = & \\
Q(I - (\alpha I + P_0^T P_0)^{-1} P_0^T (P_0 + W \Delta)) \delta u_i, & \quad (20)
\end{aligned}$$

其中  $\delta u_i = u_i - u_f$ . 得到不确定性系统的鲁棒收敛条件

$$\|Q(I - (\alpha I + P_0^T P_0)^{-1} P_0^T (P_0 + W \Delta))\|_2 < 1. \quad (21)$$

进一步, 上述条件等价于

$$\|Q(\alpha I - P_0^T W \Delta)\|_2 < \|\alpha I + P_0^T P_0\|_2. \quad (22)$$

当  $\|W\|_2 < \|P_0\|_2$  且  $\|\Delta\|_2 < 1$  时, 由低通滤波器和 Toeplitz 矩阵的性质可以得到

$$\|QP_0^T W \Delta\|_2 < \|P_0^T P_0\|_2. \quad (23)$$

可以进一步得到不确定性系统是鲁棒收敛的.  $\square$

引理 3 的收敛性条件与滤波器的设计无关, 即当

满足引理 3 的条件时, 无论滤波器的带宽多大, 都不会影响系统的鲁棒收敛性. 当不满足引理 3 的收敛性条件时, 通过上述引理可进一步得到系统的非因果鲁棒学习控制律, 如下所述.

**定理 2** 对于式 (17) 所述的系统和式 (7) 所述的非因果学习控制律以及滤波器表达式, 当  $\beta = \frac{1}{4}\|W\|_2^2$  且  $\|\Delta\|_2 < 1$  时, 不确定性系统是鲁棒收敛的.

**证明** 根据引理 3, 结合式 (7) 描述的学习控制律及滤波器, 只要令

$$\begin{aligned} & \|(\alpha I + P_0^T P_0 + \beta I)^{-1}(\alpha I + \\ & P_0^T P_0)(\alpha I - P_0^T W \Delta)\|_2 < \\ & \|\alpha I + P_0^T P_0\|_2 \end{aligned}$$

成立即可. 当  $\beta = \frac{1}{4}\|W\|_2^2$  时, 由范数性质得

$$\frac{1}{4}\|W\|_2^2 + \|P_0\|_2^2 > \|P_0 W\|_2. \quad (24)$$

当  $\|\Delta\|_2 < 1$  时, 进一步可以得到

$$\|(\alpha I + P_0^T P_0 + \beta I)\|_2 > \|(\alpha I + P_0 W \Delta)\|_2. \quad (25)$$

进而, 如下关系

$$\|(\alpha I + P_0^T P_0 + \beta I)^{-1}(\alpha I - P_0^T W \Delta)\|_2 < 1$$

成立, 因此系统是鲁棒收敛的.  $\square$

加性不确定性系统的鲁棒收敛性条件与乘性不确定性有明显的不同, 因为其鲁棒收敛性条件与  $Q$  的设计无关, 所以无法通过鲁棒分析的手段得到相应的设计结果. 当系统的加性不确定性不满足引理 3 时, 只能通过鲁棒设计的手段来得到鲁棒学习控制律. 对上述设计结果的验证将在下一节中展开.

### 3 仿真分析

#### 3.1 乘性不确定性情况

对上述鲁棒迭代学习控制律加以验证. 若某直线运动平台的标称闭环系统  $P_2$  及乘性不确定性  $W_1$  的频域描述分别为

$$\begin{cases} P_2(z) = \frac{0.0056218(z-0.9812)(z-0.912)}{(z^2-1.969z+0.9699)(z^2-1.843z+0.8593)}, \\ W_1(z) = \frac{1.0472(z^2-2z+0.9999)}{z^2-1.546z+0.6761}. \end{cases} \quad (26)$$

令闭环系统  $P_2$  的 Markov 矩阵表达式为  $P_0$ , 乘性不确定性  $W_1$  的 Markov 表达式为  $W_d$ . 由引理 2 的收敛性条件, 不妨令  $\alpha = 1$ , 采用二分法确定滤波器  $Q$  的鲁棒加权  $\beta$ , 将该方法称为鲁棒分析法 1. 当  $\beta = 0.505$  时,  $\|QW_d\|_2 = 0.9975$ , 满足鲁棒收敛性条件. 若系统的参考轨迹为 S 曲线, 此时系统跟踪误差的 2 范数沿迭代周期的特性如图 1 所示, 系统是鲁

棒收敛的, 在第 20 步迭代周期内的误差 2 范数的最大值为  $3.48 \times 10^{-5}$  m.

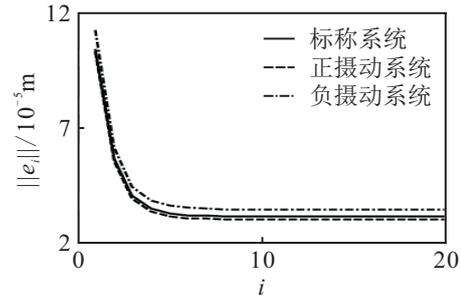


图 1 鲁棒分析法 1 的误差 2 范数

为了便于对比, 令  $\alpha$  不变, 利用定理 1 的“鲁棒设计法 1”可以得到系统的鲁棒加权

$$\beta = \frac{1}{4}\|P_0 W_d\|_2^2 = 9.7722 \times 10^{-4}.$$

此时, 系统跟踪误差 2 范数的收敛特性如图 2 所示. 系统是鲁棒收敛的, 系统跟踪误差 2 范数的最大值为  $1.27 \times 10^{-6}$  m. 因此, 采用鲁棒设计法 1 的跟踪性能要明显优于鲁棒分析法 1, 鲁棒分析的方法具有明显的设计保守性.

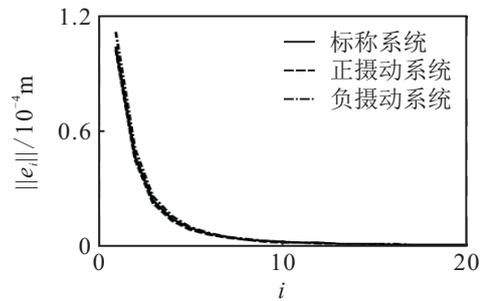


图 2 鲁棒设计法 1 的误差 2 范数

#### 3.2 加性不确定性情况

对于相同的标称被控对象, 若系统存在加性不确定性, 不失一般性, 将 3.1 节的乘性不确定性转化为加性不确定性, 则加性不确定性  $W_2$  的频域描述为

$$W_2(z) = \frac{0.005887(z-0.9812)(z-0.912)}{(z^2-1.969z+0.9699)(z^2-1.843z+0.8593)} \times \frac{(z^2-2z+0.9999)}{(z^2-1.546z+0.6761)}. \quad (27)$$

令  $W_2$  的 Markov 表达式为  $W_a$ , 根据引理 3 判断系统是否满足收敛性要求. 经过计算得知, 系统满足鲁棒收敛性条件, 即无论鲁棒加权  $\beta$  多大, 系统都是鲁棒收敛的. 这也说明了在相同的不确定性下, 采用加性不确定描述时, 系统设计的保守性更小. 为验证定理 2, 将加性不确定性放大, 使之不满足引理 3 的收敛性条件. 此时, 加性不确定性  $W_3$  的频域描述为

$$W_3(z) =$$

$$\frac{0.1177(z - 0.9812)(z - 0.912)}{(z^2 - 1.969z + 0.9699)(z^2 - 1.843z + 0.8593)} \times \frac{(z^2 - 2z + 0.9999)}{(z^2 - 1.546z + 0.6761)} \quad (28)$$

令不确定性  $W_3$  的 Markov 表达形式为  $W_b$ , 此时  $\|W_b\|_2 = 1.25 > \|P_0\|_2$ , 即不满足引理 3 的收敛性条件. 利用定理 2 的“鲁棒设计法 2”设计系统的鲁棒加权

$$\beta = \frac{1}{4} \|W_b\|_2^2 = 0.39,$$

则得到的系统误差 2 范数如图 3 所示. 此时, 系统是鲁棒收敛的, 仿真结果验证了定理 2 的有效性.

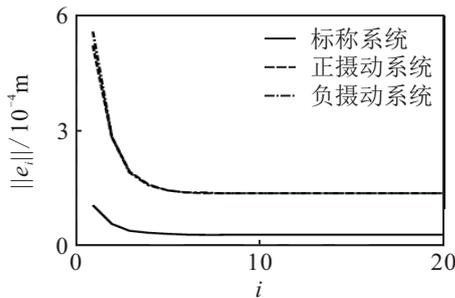


图 3 鲁棒设计法 2 的误差 2 范数

## 4 结 论

本文提出了一种不确定性系统的非因果鲁棒学习控制设计方法, 通过标称系统和鲁棒加权来描述非因果鲁棒学习控制律. 根据不确定性的形式分别给出了不同的鲁棒收敛性条件和鲁棒加权设计原则, 并将其分别应用于加性和乘性不确定性系统. 仿真结果验证了该方法的可行性.

## 参考文献(References)

- [1] Arimoto S, Kawamura S, Miyazaki F. Bettering operation of robots by learning[J]. J of Robotic Systems, 1984, 1(2): 123-140.
- [2] Bristow D A, Tharayil M, Alleyne A G. A survey of iterative learning control[J]. IEEE Control Systems Magazine, 2006, 26(3): 96-114.
- [3] Helfrich B E, Lee C, Bristow D A, et al. Combined  $H_\infty$ -feedback control and iterative learning control design with application to nanopositioning systems[J]. IEEE Trans on Control Systems Technology, 2010, 18(2): 336-350.
- [4] Amann N, Owens D H, Rogers E, et al. An  $H_\infty$  approach to linear iterative learning control design[J]. Int J of Adaptive Control and Signal Processing, 1996, 10(6): 767-781.
- [5] Lin M T, Yen C L, Tsai M S, et al. Application of robust iterative learning algorithm in motion control system[J]. Mechatronics, 2013, 23(5): 530-540.
- [6] Wang L M, Mo S Y, Qu H Y, et al.  $H_\infty$  design of 2D controller for batch processes with uncertainties and interval time-varying delays[J]. Control Engineering Practice, 2013, 21(10): 1321-1333.
- [7] Tayebi A, Abdul S, Zaremba M B. Robust iterative learning control design via  $\mu$ -synthesis[C]. Proc of 2005 IEEE Conference on Control Applications. Toronto: IEEE, 2005: 416-421.
- [8] Ahn H S, Moore K L, Chen Y Q. Iterative learning control: Robustness and monotonic convergence for interval systems[M]. London: Springer-Verlag, 2007: 69-80.
- [9] Meng Deyuan, Jia Yingmin, Du Junping, et al. Robust learning controller design for MIMO stochastic discrete-time systems: An  $H_\infty$ -based approach[J]. Int J of Adaptive Control and Signal Processing, 2011, 25(7): 653-670.
- [10] Paszke W, Rogers E, Galkowski K, et al. Robust finite frequency range iterative learning control design and experimental verification[J]. Control Engineering Practice, 2013, 21(10): 1310-1320.
- [11] Nguyen D H, Banjerdpongchai D. A convex optimization approach to robust iterative learning control for linear systems with time-varying parametric uncertainties[J]. Automatica, 2011, 47 (9): 2039-2043.
- [12] Gunnarsson S, Norrlof M. On the design of ILC algorithms using optimization[J]. Automatica, 2001, 37(12): 2011-2016.
- [13] Van de Wijdeven J, Donkers T, Bosgra O. Iterative learning control for uncertain systems: Robust monotonic convergence analysis[J]. Automatica, 2009, 45(10): 2383-2391.
- [14] Bristow D A, Alleyne A G. Monotonic convergence of iterative learning control for uncertain systems using a time-varying filter[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2008, 53(2): 582-585.

(责任编辑: 齐 霖)