

网络化多胞型系统的变增益 H_∞ 控制

李 玮^{1a,2}, 王 青^{1a}, 董朝阳^{1b}

(1. 北京航空航天大学 a. 自动化科学与电气工程学院, b. 航空科学与工程学院, 北京 100191; 2. 中国舰船研究院, 北京 100192)

摘 要: 研究参数变化速率有界的网络化多胞型系统的变增益 H_∞ 控制问题. 采用时滞状态增广方法处理状态传输时延, 得到切换多胞型系统模型; 考虑参数变化速率约束与参数传输时延影响, 给出对当前参数、次刻参数和时滞参数三元组的多胞描述方法; 进而基于参数依赖切换 Lyapunov 函数方法给出变增益 H_∞ 控制器的 LMI 设计准则. 该方法将已有结果推广至包含网络传输时延的情形, 具有较低的保守性. 仿真实例表明了所提出方法的有效性.

关键词: 多胞型系统; 网络控制系统; 有界参数变化速率; 变增益 H_∞ 控制; 参数依赖 Lyapunov 函数

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Gain-scheduled H_∞ control of networked polytopic systems

LI Wei^{1a,2}, WANG Qing^{1a}, DONG Chao-yang^{1b}

(1a. School of Automation Science and Electrical Engineering, 1b. School of Aeronautic Science and Engineering, Beihang University, Beijing 100191, China; 2. China Ship Research and Development Academy, Beijing 100192, China. Correspondent: LI Wei, E-mail: liwei1900@gmail.com)

Abstract: The problem of gain-scheduled H_∞ control for networked polytopic systems with bounded rates of parameter variations is investigated. The state transmission delays are handled via state augmentation technique so that a switched polytopic system model is obtained. Considering the bounded variation rates and the parameter transmission delays, a vector polytope model is achieved to describe the triplet of the current, the forthcoming and the delayed parameters. By means of switched parameter-dependent Lyapunov functions, the design criterion of the gain-scheduled H_∞ controller is given in terms of LMIs. The presented method extends existing results for polytopic systems to allow for network-induced delays and qualifies relatively lower conservativeness. A simulation example shows the effectiveness of the proposed approach.

Keywords: polytopic systems; networked control systems; bounded rates of parameter variations; gain-scheduled H_∞ control; parameter-dependent Lyapunov functions

0 引 言

多胞型系统是指系统参数矩阵取值于由若干顶点矩阵所构成的矩阵多胞的参数时变系统. 作为一类重要的线性变参数 (LPV) 系统, 多胞型系统以其良好的分析性质受到了控制工程领域的广泛关注, 相关理论方法已在机器人、高超声速飞行器复杂动力学系统的控制中得到应用^[1-2].

考虑到实际物理系统在正常运行情况下通常不会发生参数突变, 即系统参数变化速率有界, 此时, 若基于参数任意快变条件下的理论结果^[3]对多胞型系统进行分析与综合将会引入较大的保守性. 针对这一问题, 众多学者采用多胞建模方法处理有界参数变化速率, 得到了适用于速率有界多胞型系统的理论方

法. 在连续系统方面, Geromel 等^[4]和 Chesi 等^[5]提出了对有界参数变化速率的多胞描述方法, 并分别基于多胞型和齐次多项式型的参数依赖 Lyapunov 函数, 给出了低保守性的稳定性条件. 对于离散系统, 由于其参数变化速率隐式地依赖于系统参数本身, 其建模方法较之连续系统更为复杂. Oliveira 等^[6]基于解析几何方法系统地给出了离散时间速率有界参数的多胞建模步骤, 并在此基础上完成了系统稳定性分析与镇定控制. De Caigny 等^[7-8]沿用文献 [6] 的模型描述方法, 进一步探讨了多胞型系统的变增益输出反馈 H_2/H_∞ 控制问题.

目前, 控制系统的网络化集成正逐步取代传统的点到点连接方式, 已成为工业控制领域的新标准. 关

收稿日期: 2013-09-09; 修回日期: 2014-01-14.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61273083).

作者简介: 李玮(1986—), 男, 博士, 从事切换系统、网络控制系统的研究; 王青(1968—), 女, 教授, 博士生导师, 从事飞行器控制、网络控制系统等研究.

于网络化控制系统(NCSs)的研究虽已持续多年^[9-10],但针对网络化多胞型系统的工作却鲜有报道.对于多胞型系统,共享网络的引入不仅会诱发状态时滞,还可能导致控制器与被控对象间的参数异步现象,这使得有关速率有界多胞型系统的理论结果难以直接推广至包含网络时延的情形.

本文针对参数变化速率有界的网络化多胞型系统,研究其变增益 H_∞ 控制器的设计方法.首先针对状态时滞影响,基于状态增广方法得到无时滞的切换多胞型系统模型;然后考虑参数速率约束与参数异步现象,采用解析几何方法给出对当前参数、时刻参数和时滞参数三元组的多胞描述方法;最后,基于参数依赖切换Lyapunov函数方法给出保证闭环系统 H_∞ 性能的变增益控制器设计准则.

1 系统建模与问题描述

1.1 网络化多胞型系统的建模

考虑图1所示的网络化多胞型系统模型.

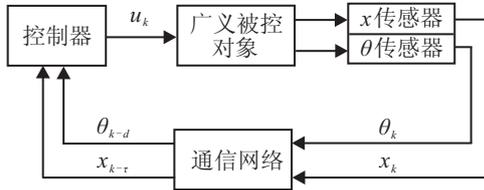


图1 网络化多胞型系统结构

广义被控对象为如下离散时间多胞型系统:

$$\begin{cases} x_{k+1} = A(\theta_k)x_k + B(\theta_k)u_k + E(\theta_k)\omega_k, \\ z_k = C(\theta_k)x_k + D(\theta_k)u_k + F(\theta_k)\omega_k. \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x_k \in \mathbf{R}^{n_x}$ 为系统状态; $u_k \in \mathbf{R}^{n_u}$ 为控制输入; $\omega_k \in \mathbf{R}^{n_\omega}$ 为扰动输入; $z_k \in \mathbf{R}^{n_z}$ 为被调输出; $\theta_k = [\theta_{1,k} \cdots \theta_{N,k}]^T$ 为时变的参数向量,取值于如下 N 维单位单形体:

$$A_N := \left\{ \lambda \in \mathbf{R}^N : \sum_{l \in \Gamma_N} \lambda_l = 1; \lambda_l \geq 0, l \in \Gamma_N \right\},$$

$\Gamma_N := \{1, 2, \dots, N\}$; $A(\theta_k), B(\theta_k), C(\theta_k), D(\theta_k), E(\theta_k), F(\theta_k)$ 为适当维数的参数依赖矩阵且满足

$$\begin{bmatrix} A(\theta_k) & B(\theta_k) & E(\theta_k) \\ C(\theta_k) & D(\theta_k) & F(\theta_k) \end{bmatrix} = \sum_{l \in \Gamma_N} \theta_{l,k} \begin{bmatrix} A_l & B_l & E_l \\ C_l & D_l & F_l \end{bmatrix},$$

$A_l, B_l, C_l, D_l, E_l, F_l, l \in \Gamma_N$ 为适当维数的已知矩阵.

假定图1所示闭环系统各环节均采用时钟驱动方式且时钟同步,传感器与控制器之间基于共享网络实现数据传输.网络的引入导致传感器控制器通道存在传输时延,假设参数向量传输时延 d_k 和状态向量传输时延 τ_k 分别满足 $0 \leq d_k \leq \bar{d}$ 和 $0 \leq \tau_k \leq \bar{\tau}$,其中 $\bar{d} \geq 0, \bar{\tau} \geq 0$ 为时延上界.在不引起混淆的情况下,分别采用 d 和 τ 表示 d_k 和 τ_k .

考虑网络时延的影响,采用如下依赖于时滞参数

θ_{k-d} 和状态时延 τ 的变增益状态反馈控制器:

$$u_k = K(\theta_{k-d}, \tau)x_{k-\tau}. \quad (2)$$

令 $\xi_k = [x_k^T \ x_{k-1}^T \ \cdots \ x_{k-\bar{\tau}}^T]^T$,由式(1)和(2)得到如下闭环系统:

$$\begin{cases} \xi_{k+1} = \bar{A}_{cl}(\theta_k, \theta_{k-d}, \tau)\xi_k + \bar{E}(\theta_k)\omega_k, \\ z_k = \bar{C}_{cl}(\theta_k, \theta_{k-d}, \tau)\xi_k + \bar{F}(\theta_k)\omega_k. \end{cases} \quad (3)$$

其中

$$\bar{A}_{cl}(\theta_k, \theta_{k-d}, \tau) = \bar{A}(\theta_k) + \bar{B}(\theta_k)K(\theta_{k-d}, \tau)H(\tau),$$

$$\bar{C}_{cl}(\theta_k, \theta_{k-d}, \tau) = \bar{C}(\theta_k) + \bar{D}(\theta_k)K(\theta_{k-d}, \tau)H(\tau),$$

$$\begin{bmatrix} \bar{A}(\theta_k) & \bar{B}(\theta_k) & \bar{E}(\theta_k) \\ \bar{C}(\theta_k) & \bar{D}(\theta_k) & \bar{F}(\theta_k) \end{bmatrix} =$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c|c} A(\theta_k) & 0 & \cdots & \cdots & 0 & B(\theta_k) & E(\theta_k) \\ I & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & \cdots & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ \hline C(\theta_k) & 0 & \cdots & \cdots & 0 & D(\theta_k) & F(\theta_k) \end{array} \right],$$

$$H(\tau) = [0 \ \cdots \ 0 \ I \ 0 \ \cdots \ 0].$$

I 位于第 $(\tau+1)$ 块

定义切换信号 $\sigma_k := \tau + 1$,显然有 $\sigma_k \in \Gamma_L$,其中 $L = \bar{\tau} + 1$.记 $K_\sigma(\theta_{k-d}) = K(\theta_{k-d}, \tau)$, $H_\sigma = H(\tau)$,则控制器(2)转化为如下参数依赖的静态输出反馈切换控制器:

$$u_k = K_\sigma(\theta_{k-d})H_\sigma\xi_k; \quad (4)$$

相应地,闭环系统(3)转化为如下切换多胞型系统:

$$\begin{cases} \xi_{k+1} = \bar{A}_{cl,\sigma}(\theta_k, \theta_{k-d})\xi_k + \bar{E}(\theta_k)\omega_k, \\ z_k = \bar{C}_{cl,\sigma}(\theta_k, \theta_{k-d})\xi_k + \bar{F}(\theta_k)\omega_k. \end{cases} \quad (5)$$

其中: $\bar{A}_{cl,\sigma}(\theta_k, \theta_{k-d}) = \bar{A}(\theta_k) + \bar{B}(\theta_k)K_\sigma(\theta_{k-d})H_\sigma$,
 $\bar{C}_{cl,\sigma}(\theta_k, \theta_{k-d}) = \bar{C}(\theta_k) + \bar{D}(\theta_k)K_\sigma(\theta_{k-d})H_\sigma$.

注1 通过状态增广将有界时滞系统处理为无时滞切换系统,便于应用切换Lyapunov函数方法处理时滞系统问题.其优势在于:1)切换Lyapunov函数在形式上较Lyapunov-Krasovskii泛函更具一般性,因而可导出具有更低保守性的分析结果^[11-12];2)与Lyapunov-Krasovskii泛函相比,切换Lyapunov函数不包含积分项和重积分项,从而更易于结合参数依赖Lyapunov函数方法处理时变系统问题.

1.2 速率有界时变参数的多胞描述

对于任意整数 κ ,以 $\Delta^\kappa\theta_{l,k}$ 表示时变参数 $\theta_{l,k}, l \in \Gamma_N$ 的 κ 拍前向增量,即

$$\Delta^\kappa\theta_{l,k} := \theta_{l,k+\kappa} - \theta_{l,k}. \quad (6)$$

假定 $\Delta^1\theta_{l,k}$ 具有幅值上界 $a \in (0, 1]$,则 $\Delta^\kappa\theta_{l,k}$ 满足

$$-|\kappa|a \leq \Delta^\kappa \theta_{l,k} \leq |\kappa|a. \quad (7)$$

为便于表述, 分别将 θ_k, θ_{k+1} 和 θ_{k-d} 简记为 θ, θ_+ 和 θ_- . 对于 $\bar{d} = 0, 0 < \bar{d} < a^{-1} - 1, \bar{d} = a^{-1} - 1, a^{-1} - 1 < \bar{d} < a^{-1}$ 以及 $\bar{d} \geq a^{-1}$ 等情况, $(\theta, \theta_+, \theta_-)$ 所对应的多胞顶点集各不相同, 以下仅针对 $0 < \bar{d} < a^{-1} - 1$ 的情况给出具体建模步骤, 其他情况下的处理方式类同.

由 $\theta_k \in A_N, \forall k \in N$ 可知

$$-\theta_{l,k} \leq \Delta^\kappa \theta_{l,k} \leq 1 - \theta_{l,k}. \quad (8)$$

分别以 $\mathcal{F}(\cdot)$ 和 $\text{Co}\{\cdot\}$ 表示变量值域和向量多胞. 容易得到, 式 (7) 和 (8) 约束下 $[\theta_{l,k} \ \Delta^1 \theta_{l,k}]^T$ 的多胞描述为

$$\begin{aligned} \mathcal{F}([\theta_{l,k} \ \Delta^1 \theta_{l,k}]^T) &= \text{Co}\{v_i^+, i \in \Gamma_6\}, \\ [v_1^+ \ \dots \ v_6^+] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & a & 1-a & 1 & 1 \\ 0 & a & -a & a & 0 & -a \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (9)$$

仿照式 (9) 的推导过程可以得到对 $[\theta_{l,k} \ \Delta^{-d} \theta_{l,k}]^T$ 的多胞描述, 即

$$\begin{aligned} \mathcal{F}([\theta_{l,k} \ \Delta^{-d} \theta_{l,k}]^T) &= \text{Co}\{v_i^-, i \in \Gamma_6\}, \\ [v_1^- \ \dots \ v_6^-] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \bar{d}a & 1-\bar{d}a & 1 & 1 \\ 0 & \bar{d}a & -\bar{d}a & \bar{d}a & 0 & -\bar{d}a \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (10)$$

对式 (9) 中的多胞顶点集 $\{v_i^+, i \in \Gamma_6\}$ 进行冗余扩张, 增加 $\theta_{l,k} \in \{\bar{d}a, 1 - \bar{d}a\}$ 情况下的多胞顶点

$$[v_7^+ \ \dots \ v_{10}^+] = \begin{bmatrix} \bar{d}a & \bar{d}a & 1-\bar{d}a & 1-\bar{d}a \\ -a & a & -a & a \end{bmatrix}. \quad (11)$$

同理, 对式 (10) 中的多胞顶点集 $\{v_i^-, i \in \Gamma_6\}$ 进行扩张, 得到 $\theta_{l,k} \in \{a, 1 - a\}$ 情况下的冗余多胞顶点

$$[v_7^- \ \dots \ v_{10}^-] = \begin{bmatrix} a & a & 1-a & 1-a \\ -a & \bar{d}a & -\bar{d}a & a \end{bmatrix}. \quad (12)$$

对 $\{v_i^+, i \in \Gamma_{10}\}$ 和 $\{v_i^-, i \in \Gamma_{10}\}$ 中具有相同 $\theta_{l,k}$ 值的向量进行组合, 即得到 $[\theta_{l,k} \ \Delta^1 \theta_{l,k} \ \Delta^{-d} \theta_{l,k}]^T$ 对应的多胞顶点向量

$$\begin{aligned} [v_1 \ \dots \ v_{16}] &= \\ &\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & a & a & \bar{d}a & \bar{d}a & 1-\bar{d}a \\ 0 & 0 & a & a & -a & -a & -a & a & -a \\ 0 & \bar{d}a & 0 & \bar{d}a & -a & \bar{d}a & -\bar{d}a & -\bar{d}a & \bar{d}a \\ 1-\bar{d}a & 1-a & 1-a & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & a & a & -a & -a & 0 & 0 \\ \bar{d}a & -\bar{d}a & a & -\bar{d}a & 0 & -\bar{d}a & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

由式 (6) 可知, $[\theta_{l,k} \ \theta_{l,k+1} \ \theta_{l,k-d}]^T$ 对应的多胞顶点向量为

$$\{Tv_i, i \in \Gamma_{16}\}, T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

对 $\mathcal{F}([\theta_{l,k} \ \theta_{l,k+1} \ \theta_{l,k-d}]^T) (l \in \Gamma_N)$ 求笛卡尔积, 并去除不满足 $\theta_k, \theta_{k+1}, \theta_{k-d} \in A_N$ 的顶点向量, 即可得到

$$\mathcal{F}([\theta^T \ \theta_+^T \ \theta_-^T]^T) = \text{Co}\{[f_i^T \ g_i^T \ h_i^T]^T, i \in \Gamma_M\}. \quad (13)$$

其中: $f_i, g_i, h_i \in \mathbf{R}^N; M$ 为多胞顶点个数. 式 (13) 表明, 对于任意 $k \in \mathbf{N}$, 必存在 $\mu = [\mu_1 \ \dots \ \mu_M]^T \in A_M$, 满足

$$(\theta, \theta_+, \theta_-) = \sum_{i \in \Gamma_M} \mu_i (f_i, g_i, h_i). \quad (14)$$

注 2 需要指出, 尽管基于文献 [6] 容易得到对 (θ_k, θ_{k+1}) 二元组的多胞描述, 然而将其推广到 $(\theta, \theta_+, \theta_-)$ 的情况却并不直接. 本文基于式 (11) 和 (12) 的冗余顶点扩张技巧给出对 $(\theta, \theta_+, \theta_-)$ 三元组的多胞描述. 如式 (14) 所示, $(\theta, \theta_+, \theta_-)$ 的多胞化表示实现了将变化速率有界约束下的 3 个 N 维参数向量 θ, θ_+ 和 θ_- 映射为无约束的单个 M 维参数向量 μ , 这为有限维 LMI 设计准则的推导奠定了基础.

定义 1 给定 $\gamma > 0$, 若闭环系统 (5) 对于任意切换信号 σ 和所有容许的参数变化过程 θ , 满足:

1) 系统渐近稳定; 2) 零初始条件下, $\sum_{k=0}^{\infty} z_k^T z_k \leq$

$\gamma^2 \sum_{k=0}^{\infty} \omega_k^T \omega_k$ 对于任意 $\omega \in l_2[0, \infty)$ 成立. 则称闭环系统 (5) 渐近稳定且满足 H_∞ 性能指标 γ .

本文的目的是: 设计参数依赖的静态输出反馈切换控制器 (4), 使得切换多胞型系统 (5) 渐近稳定且满足给定的 H_∞ 性能指标 γ .

2 主要结果

引理 1 给定 $\gamma > 0$, 若存在参数依赖的正定矩阵 $X_p(\lambda) \in \mathbf{R}^{Ln_x \times Ln_x}$, 矩阵 $G_p(\lambda) \in \mathbf{R}^{Ln_x \times Ln_x}$, $\lambda \in A_N$, $p \in \Gamma_L$, 使得对于任意 $(p, q) \in \Gamma_L \times \Gamma_L$, 满足

$$\begin{bmatrix} -X_q(\theta_+) & 0 & \bar{A}_{cl,p}(\theta, \theta_-)G_p(\theta_-) & \bar{E}(\theta) \\ * & -I & \bar{C}_{cl,p}(\theta, \theta_-)G_p(\theta_-) & \bar{F}(\theta) \\ * & * & \Xi & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0, \quad (15)$$

其中 $\Xi = X_p(\theta) - G_p(\theta_-) - G_p(\theta_-)^T$, 则闭环系统 (5) 渐近稳定且满足 H_∞ 性能指标 γ .

证明 由 $X_p(\theta) > 0$ 可得

$$\begin{aligned} -G_p(\theta_-)^T X_p(\theta)^{-1} G_p(\theta_-) &\leq \\ X_p(\theta) - G_p(\theta_-) - G_p(\theta_-)^T. \end{aligned} \quad (16)$$

结合式 (15) 和 (16) 有

$$\begin{bmatrix} -X_q(\theta_+) & 0 & \bar{A}_{cl,p}(\theta, \theta_-)G_p(\theta_-) & \bar{E}(\theta) \\ * & -I & \bar{C}_{cl,p}(\theta, \theta_-)G_p(\theta_-) & \bar{F}(\theta) \\ * & * & \bar{\Xi} & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0, \quad (17)$$

其中 $\bar{\Xi} = -G_p(\theta_-)^T X_p(\theta)^{-1} G_p(\theta_-)$.

由式(15)有 $X_p(\theta) - G_p(\theta_-) - G_p(\theta_-)^{-1} < 0$, 从而可知 $G_p(\theta_-)$ 非奇异. 采用 $\text{diag}\{I, I, G_p(\theta_-)^{-1}, I\}$ 对式(17)两端进行合同变换, 得

$$\begin{bmatrix} -X_q(\theta_+) & 0 & \bar{A}_{cl,p}(\theta, \theta_-) & \bar{E}(\theta) \\ * & -I & \bar{C}_{cl,p}(\theta, \theta_-) & \bar{F}(\theta) \\ * & * & -X_p(\theta)^{-1} & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0. \quad (18)$$

为闭环系统(5)选取参数依赖切换 Lyapunov 函数 $V_\sigma(\xi_k, \theta) = \xi_k^T X_\sigma(\theta)^{-1} \xi_k$, 由式(18)容易证得系统(5)渐近稳定且满足 H_∞ 性能指标 γ . \square

引理 1 给出了保证闭环系统(5)渐近稳定且满足给定 H_∞ 性能的参数依赖矩阵不等式条件, 但其所涉矩阵变量为无穷维, 故无法直接用于控制综合. 基于 $(\theta, \theta_+, \theta_-)$ 的多胞描述, 下面的定理给出了控制器(4)的有限维 LMI 设计准则.

定理 1 给定 $\gamma > 0$, 若存在正定矩阵 $X_{p,l} \in \mathbf{R}^{L n_x \times L n_x}$, 矩阵 $U_{p,l} \in \mathbf{R}^{n_u \times n_x}$, 特定结构矩阵 $G_{p,l} \in \mathbf{R}^{L n_x \times L n_x}$, $(p, l) \in \Gamma_L \times \Gamma_N$, 以及矩阵 $\Psi_{p,q,i,j} \in \mathbf{R}^{n_\psi}$, $n_\psi = 2L n_x + n_\omega + n_z$, $(p, q) \in \Gamma_L \times \Gamma_L$, $1 \leq i < j \leq M$, 使得对于任意 $(p, q) \in \Gamma_L \times \Gamma_L$, $1 \leq i < j \leq M$, 如下线性矩阵不等式成立:

$$\Phi_{p,q,i,j} + \Phi_{p,q,j,i} \leq \Psi_{p,q,i,j} + \Psi_{p,q,i,j}^T, \quad (19)$$

$$\Psi_{p,q} := \begin{bmatrix} \Phi_{p,q,1,1} & \Psi_{p,q,1,2} & \cdots & \Psi_{p,q,1,M} \\ * & \ddots & \ddots & \vdots \\ * & * & \ddots & \Psi_{p,q,M-1,M} \\ * & * & * & \Phi_{p,q,M,M} \end{bmatrix} < 0. \quad (20)$$

则保证闭环系统(5)渐近稳定且满足 H_∞ 性能指标 γ 的控制器增益为

$$K_p(\lambda) = \left(\sum_{l \in \Gamma_N} \lambda_l U_{p,l} \right) \left(\sum_{l \in \Gamma_N} \lambda_l G_{p,l}^{p,p} \right)^{-1}, \quad \lambda \in \Lambda_N, p \in \Gamma_L. \quad (21)$$

式(19)中

$$\Phi_{p,q,i,j} = \begin{bmatrix} -X_q(g_i) & 0 & \Phi_{p,q,i,j}^{1,3} & \bar{E}(f_i) \\ * & -I & \Phi_{p,q,i,j}^{2,3} & \bar{F}(f_i) \\ * & * & \Phi_{p,q,i,j}^{3,3} & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix},$$

$$\Phi_{p,q,i,j}^{1,2} = \bar{A}(f_i) G_p(h_j) + \bar{B}(f_i) U_p(h_j) H_p,$$

$$\Phi_{p,q,i,j}^{2,3} = \bar{C}(f_i) G_p(h_j) + \bar{D}(f_i) U_p(h_j) H_p,$$

$$\Phi_{p,q,i,j}^{3,3} = X_p(f_i) - G_p(h_i) - G_p(h_i)^T,$$

$$(X_p(\lambda), G_p(\lambda), U_p(\lambda)) =$$

$$\sum_{l \in \Gamma_N} \lambda_l (X_{p,l}, G_{p,l}, U_{p,l}), \forall \lambda \in \Lambda_N.$$

这里, 矩阵变量 $G_{p,l}$ 满足如下结构:

$$G_{p,l} = \begin{bmatrix} G_{p,l}^{1,1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & G_{p,l}^{1,L} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ G_{p,l}^{p-1,1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & G_{p,l}^{p-1,L} \\ 0 & \cdots & 0 & G_{p,l}^{p,p} & 0 & \cdots & 0 \\ G_{p,l}^{p+1,1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & G_{p,l}^{p+1,L} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ G_{p,l}^{L,1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & G_{p,l}^{L,L} \end{bmatrix}, \quad (22)$$

证明 定义

$$G_p^h(\mu) = \sum_{i \in \Gamma_M} \mu_i G_p(h_i), U_p^h(\mu) = \sum_{i \in \Gamma_M} \mu_i U_p(h_i),$$

$$X_p^g(\mu) = \sum_{i \in \Gamma_M} \mu_i X_p(g_i), X_p^f(\mu) = \sum_{i \in \Gamma_M} \mu_i X_p(f_i),$$

$$\begin{bmatrix} \bar{A}^f(\mu) & \bar{B}^f(\mu) & \bar{E}^f(\mu) \\ \bar{C}^f(\mu) & \bar{D}^f(\mu) & \bar{F}^f(\mu) \end{bmatrix} = \sum_{i \in \Gamma_M} \mu_i \begin{bmatrix} \bar{A}(f_i) & \bar{B}(f_i) & \bar{E}(f_i) \\ \bar{C}(f_i) & \bar{D}(f_i) & \bar{F}(f_i) \end{bmatrix},$$

$$\Phi_{p,q}(\mu) = \begin{bmatrix} -X_p^g(\mu) & 0 & \Phi_{p,q}^{1,3} & \bar{E}^f(\mu) \\ * & -I & \Phi_{p,q}^{2,3} & \bar{F}^f(\mu) \\ * & * & \Phi_{p,q}^{3,3} & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix}.$$

其中

$$\Phi_{p,q}^{1,3}(\mu) = \bar{A}^f(\mu) G_p^h(\mu) + \bar{B}^f(\mu) U_p^h(\mu) H_p,$$

$$\Phi_{p,q}^{2,3}(\mu) = \bar{C}^f(\mu) G_p^h(\mu) + \bar{D}^f(\mu) U_p^h(\mu) H_p,$$

$$\Phi_{p,q}^{3,3}(\mu) = X_p^f(\mu) - G_p^h(\mu) - G_p^h(\mu)^T.$$

显然有

$$\Phi_{p,q}(\mu) = \sum_{i=1}^M \mu_i^2 \Phi_{p,q,i,i} + \sum_{i=1}^{M-1} \sum_{j=i+1}^M \mu_i \mu_j (\Phi_{p,q,i,j} + \Phi_{p,q,j,i}).$$

结合式(19)和(20), 进而有

$$\Phi_{p,q}(\mu) \leq (\mu \otimes I) \Psi_{p,q} (\mu \otimes I)^T < 0.$$

将不等式(15)左端表示为 $\Upsilon_{p,q}(\theta, \theta_+, \theta_-)$, 由式(14)、(21)和(22)可得 $\Upsilon_{p,q}(\theta, \theta_+, \theta_-) = \Phi_{p,q}(\mu)$, 从而保证引理 1 条件成立, 定理得证. \square

定理 1 采用附加矩阵变量的方式^[13]降低了设计准则的保守性. 需要指出, 矩阵变量 $\Psi_{p,q,i,j}$ 的维数和个数分别正比于 L 和 L^2 , 因此, 随着系统时延上界 τ 的增大, 控制器求解算法的复杂度将显著增加. 鉴于此, 令 $\Psi_{p,q,i,j} = 0$, $(p, q) \in \Gamma_L \times \Gamma_L$, $1 \leq i < j \leq M$, 得到如下简化的变增益 H_∞ 控制器设计准则.

推论 1 给定 $\gamma > 0$, 若存在正定矩阵 $X_{p,l} \in \mathbf{R}^{L n_x \times L n_x}$, 矩阵 $U_{p,l} \in \mathbf{R}^{n_u \times n_x}$, 式(19)所示特定结构矩阵 $G_{p,l}$, $(p, l) \in \Gamma_L \times \Gamma_N$, 使得对于任意 $(p, q) \in \Gamma_L \times \Gamma_L$, $1 \leq i \leq j \leq M$, 如下线性矩阵不等式成立:

$$\Phi_{p,q,i,j} + \Phi_{p,q,j,i} < 0, \quad (23)$$

其中 $\Phi_{p,q,i,j}$ 定义同定理 1, 则式(22)所示控制器增益

可保证闭环系统 (5) 渐近稳定且满足 H_∞ 性能指标 γ .

对于理想传输条件下的闭环系统 (5), 有 $\sigma_k \equiv 1$, $\theta_- = \theta$. 由 $\theta_- = \theta$ 可知式 (13) 和 (14) 中的多胞顶点向量满足 $h_i = f_i, i \in \Gamma_M$. 取消定理 1 中各矩阵变量对 p 和 q 的依赖关系, 并分别以 f_i 和 f_j 替换定理 1 中 h_i 和 h_j , 可得如下理想传输条件下的变增益 H_∞ 控制器设计准则.

推论 2 给定 $\gamma > 0$, 若存在正定矩阵 $X_l \in \mathbf{R}^{n_x \times n_x}$, 矩阵 $U_l \in \mathbf{R}^{n_u \times n_x}, G_l \in \mathbf{R}^{n_x \times n_x}, l \in \Gamma_N$, 以及矩阵 $\Psi_{i,j} \in \mathbf{R}^{(2n_x+n_\omega+n_z) \times (2n_x+n_\omega+n_z)}, 1 \leq i < j \leq M$, 使得对于任意 $1 \leq i < j \leq M$, 如下线性矩阵不等式成立:

$$\Phi_{i,j} + \Phi_{j,i} \leq \Psi_{i,j} + \Psi_{i,j}^T, \quad (24)$$

$$\Psi := \begin{bmatrix} \Phi_{1,1} & \Psi_{1,2} & \cdots & \Psi_{1,M} \\ * & \ddots & \ddots & \vdots \\ * & * & \ddots & \Psi_{M-1,M} \\ * & * & * & \Phi_{M,M} \end{bmatrix} < 0, \quad (25)$$

其中

$$\Phi_{i,j} = \begin{bmatrix} -X(g_i) & 0 & A(f_i)G(f_j)+B(f_i)U(f_j) & E(f_i) \\ * & -I & C(f_i)G(f_j)+D(f_i)U(f_j) & F(f_i) \\ * & * & X(f_i)-G(f_i)-G(f_i)^T & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix},$$

则保证闭环系统 (5) 渐近稳定且满足 H_∞ 性能指标 γ 的控制器增益为

$$K_1(\lambda) = \left(\sum_{l \in \Gamma_N} \lambda_l U_l \right) \left(\sum_{l \in \Gamma_N} \lambda_l G_l \right)^{-1}, \lambda \in A_N. \quad (26)$$

注 3 若令 $\Psi_{i,j} = 0, 1 \leq i < j \leq M$, 则推论 2 将退化为文献 [7] 定理 8 的全状态反馈情况. 因此, 基于推论 2 设计变增益 H_∞ 控制器可望获得优于文献 [7] 中定理 8 的控制性能.

3 数值仿真

考虑文献 [14] 中的仿真对象, 其顶点矩阵如下:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.280 & -0.315 \\ 0.630 & -0.840 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0.520 & 0.770 \\ -0.700 & -0.070 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, E_1 = E_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = C_2 = [1 \ 0], D_1 = D_2 = 0, F_1 = F_2 = 0.$$

给定设计条件: $a = 0.1, \bar{d} = 4, \bar{\tau} = 1, \gamma = 2.316$, 基于推论 1 求解控制器参数, 限于篇幅, 具体结果从略. 考虑外部扰动作用下系统的零状态响应, 系统参数向量初值设为 $\theta_s = [1 \ 0]^T, s = -4, \dots, 0$. 参数变化量 $\Delta^1 \theta_{l,k}, l \in \Gamma_N$ 为服从 $[0, 0.1]$ 上均匀分布的随机过程. 参数时延 d 和状态时延 τ 分别为服从 $\{0, \dots,$

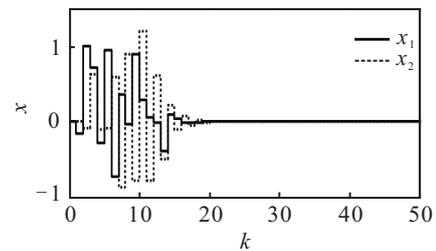
$4\}$ 和 $\{0, 1\}$ 上均匀分布的随机过程. 扰动输入 ω_k 采用如下分段函数:

$$\omega_k = \begin{cases} r_k, & 0 \leq k < 10; \\ 0, & 10 \leq k \leq 50. \end{cases}$$

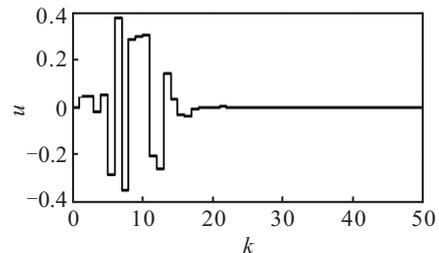
其中 r_k 为服从 $[-1, 1]$ 上均匀分布的随机过程. 采用文献 [7] 和本文设计方法所得到的闭环系统响应情况分别如图 2 和图 3 所示. 由仿真曲线可见, 基于本文方法的控制器在保证系统渐近稳定的同时, 具有较小的控制输出幅度. 采用

$$\gamma_p := \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{k=50} z_k^T z_k}{\sum_{k=1}^{k=50} \omega_k^T \omega_k}}$$

计算图 2 和图 3 仿真曲线所对应的 H_∞ 性能实测值 γ_p 分别为 1.121 和 0.891, 进一步表明了本文设计方法的优越性.

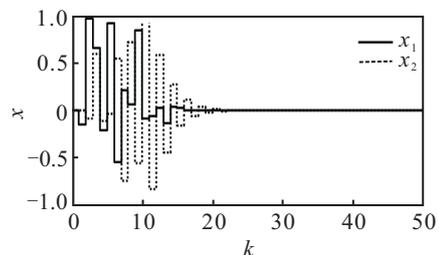


(a) 系统状态

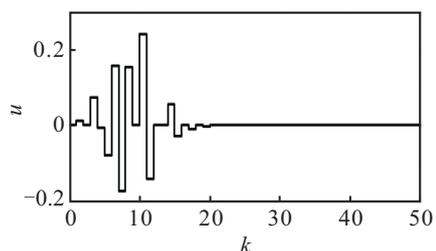


(b) 控制输入

图 2 基于文献 [7] 设计方法的闭环系统响应



(a) 系统状态



(b) 控制输入

图 3 基于本文设计方法的闭环系统响应

考虑理想传输情况, 将推论 2 设计准则与文献 [7] 中定理 8 进行对比. 表 1 给出了不同 α 值下最优 H_∞ 性能指标 γ_m 的计算结果. 可以看到对于给定的 α 值, 基于推论 2 所得到的 γ_m 值均低于文献 [7] 中定理 8 的计算结果.

表 1 最优 H_∞ 性能指标 γ_m 计算结果对比

方法	α				
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
定理 8 ^[7]	1.448	1.523	1.629	1.773	1.953
本文推论 2	1.435	1.505	1.605	1.741	1.919

方法	α				
	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
定理 8 ^[7]	2.180	2.458	2.802	3.158	3.533
本文推论 2	2.150	2.444	2.787	2.972	3.096

表 2 以 LMI 决策变量数 n_V 、不等式行数 n_L 和 CPU 运行时间 T_{CPU} 为指标, 给出了对两种方法计算复杂度的评价. 由表 1 和表 2 可见, 推论 2 以增加计算量为代价降低了设计的保守性, 提升了控制性能. 鉴于设计过程离线完成, 因此不影响推论 2 的工程适用性.

表 2 计算复杂度对比

方法	n_V	n_L	T_{CPU}/s
定理 8 ^[7]	22	130	1.953
本文推论 2	562	130	10.969

4 结 论

本文研究了一类参数变化速率有界的网络化多胞型系统的变增益 H_∞ 控制问题. 分别基于切换系统方法与多胞描述方法处理网络传输导致的系统状态时滞和参数时滞, 进而基于参数依赖切换 Lyapunov 函数方法, 以有限维 LMI 形式给出了变增益 H_∞ 控制器设计准则. 本文建模与综合方法将现有结果推广至包含网络传输时延的情形, 且具有较低的设计保守性. 数值仿真验证了所提出方法的有效性.

参考文献(References)

[1] 虞忠伟, 陈辉堂, 王月娟. 基于 LMI 方法的机器人 LPV 鲁棒 H_∞ 控制器设计[J]. 控制与决策, 2001, 16(2): 146-160.
(Yu Z W, Chen H T, Wang Y J. Robot manipulator LPV robust H_∞ controller design based on LMI approach[J]. Control and Decision, 2001, 16(2): 146-160.)

[2] Huang X Y, Wang Q, Wang Y L, et al. Adaptive augmentation of gain-scheduled controller for aerospace vehicles[J]. J of Systems Engineering and Electronics, 2013, 24(2): 272-280.

[3] Montagner V F, Oliveira R C L F, Peres P L D, et al. Linear matrix inequality characterisation for H_∞ and H_2 guaranteed cost gain-scheduling quadratic stabilisation of linear time-varying polytopic systems[J]. IET Control Theory and Applications, 2007, 1(6): 1726-1735.

[4] Geromel J C, Colaneri P. Robust stability of time varying polytopic systems[J]. Systems and Control Letters, 2006, 55(1): 81-85.

[5] Chesi G, Garulli A, Tesi A, et al. Robust stability of time-varying polytopic systems via parameter-dependent homogeneous Lyapunov functions[J]. Automatica, 2007, 43(2): 309-316.

[6] Oliveira R C L F, Peres P L D. Time-varying discrete-time linear systems with bounded rates of variation: Stability analysis and control design[J]. Automatica, 2009, 45(11): 2620-2626.

[7] De Caigny J, Camino J F, Oliveira R C L F, et al. Gain-scheduled H_2 and H_∞ control of discrete-time polytopic time-varying systems[J]. IET Control Theory and Applications, 2010, 4(3): 362-380.

[8] De Caigny J, Camino J F, Oliveira R C L F, et al. Gain-scheduled dynamic output feedback control for discrete-time LPV systems[J]. Int J of Robust and Nonlinear Control, 2012, 22(5): 535-558.

[9] Hespanha J P, Naghshtabrizi P, Xu Y G. A survey of recent results in networked control systems[J]. Proc of IEEE, 2007, 95(1): 138-162.

[10] Gupta R A, Chow M Y. Networked control system: Overview and research trends[J]. IEEE Trans on Industrial Electronics, 2010, 57(7): 2527-2535.

[11] Hetel L, Daafouz J, Iung C. Equivalence between the Lyapunov-Krasovskii functionals approach for discrete delay systems and that of the stability conditions for switched systems[J]. Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, 2008, 2(3): 697-705.

[12] Hu K, Yuan J Q. Delay-dependent H_∞ control of linear discrete-time systems with time-varying delay via switched system approach[J]. Int J of Adaptive Control and Signal Processing, 2009, 23(12): 1104-1112.

[13] Zhang L X, Shi P, Boukas E-K, et al. H_∞ control of switched linear discrete-time systems with polytopic uncertainties[J]. Optimal Control Applications and Methods, 2006, 27(5): 273-291.

[14] Deaecto G S, Geromel J C. H_∞ state feedback switched control for discrete time-varying polytopic systems[J]. Int J of Control, 2013, 86(4): 591-598.