第 29 卷 第 12 期
Vol. 29 No. 12

控 制 与 决 策
Control and Decision

2014 年 12 月
Dec. 2014

文章编号: 1001-0920 (2014) 12-2207-05 **DOI:** 10.13195/j.kzyjc.2013.1260

梯形模糊互反判断矩阵的一致性及修正

吕智颖[1,2], 黄天民[1], 郑理伟[3], 梁学章[4]

(1. 西南交通大学 数学学院，成都 610031；2. 齐齐哈尔大学 理学院，齐齐哈尔 161006;
3. 成都信息工程学院 应用数学学院，成都 610225；4. 吉林大学 数学学院，长春 130012)

摘　要: 研究具有严格偏好关系的梯形模糊互反判断矩阵满意一致性的判定及其修正方法. 首先, 将梯形模糊互反判断矩阵转化为判断矩阵和排列矩阵; 然后, 根据梯形模糊互反判断矩阵的排列矩阵来判定是否具有满意一致性; 基于梯形模糊数的类质心, 给出将排列矩阵转化成上三角矩阵的方法, 从而实现方案的排序; 最后, 通过项目评估问题验证了所提出方法的实用性.

关键词: 梯形模糊数；互反判断矩阵；排列矩阵；满意一致性；类质心；风险投资

中图分类号: C934　　**文献标志码:** A

Consistency and correction of trapezoidal fuzzy number reciprocal judgment matrix

LV Zhi-ying[1,2], *HUANG Tian-min*[1], *ZHENG Li-wei*[3], *LIANG Xue-zhang*[4]

(1. College of Mathematics，Southwest Jiaotong University，Chengdu 610031，China；2. Department of Mathematics, Qiqihar University，Qiqihar 161006，China；3. College of Mathematics，Chengdu University of Information Technology, Chengdu 610225；4. College of Mathematics，Jilin University，Changchun 130012，China．Correspondent：LV Zhi-ying，E-mail：lvzhiying1979@163.com)

Abstract: The decision problem of the satisfying consistency is studied, as well as the approach for regulating consistency where the strict preference relation is given as the form of trapezoidal fuzzy number reciprocal judgment matrix. Firstly, the trapezoidal fuzzy number reciprocal judgment matrix is transformed to the judgment matrix and the permutation matrix. Then, it is judged whether a trapezoidal fuzzy number reciprocal judgment matrix has satisfying consistency according to its permutation matrix. Based on the similar centroid of trapezoidal fuzzy number, the method of transforming a permutation matrix to an upper triangular matrix is given and the priority of alternatives is derived. Finally, a project evaluation problem is given to illustrate the feasibility of the proposed method.

Key words: trapezoidal fuzzy number；reciprocal judgment matrix；permutation matrix；satisfying consistency；similar centroid；venture capital

0　引　言

在多属性决策中, 通常需要决策者对方案或者属性进行两两比较, 并构造 AHP (analytic hierarchy process) 判断矩阵[1]或模糊判断矩阵[2-8]. 因为人们对事物认识的模糊性, 专家难于用确定数描述其偏好程度, 所以模糊判断矩阵更容易被人们接受. 但在决策过程中, 往往专家们给出的判断矩阵难以一次性达到一致性的要求, 因此需要对判断矩阵的一致性进行判定及必要的调整. 目前, 对模糊判断矩阵的一致性研究已取得了一些成果[4-8]. 文献 [7] 对模糊判断矩阵的一致性进行研究, 给出了有关的定义和性质; 文献 [8] 针对模糊判断矩阵的一致性问题, 提出了一种新的一致性调整方法. 本文讨论具有严格偏好关系的梯形模糊互反判断矩阵满意一致性的判别方法, 以及当不具有满意一致性时的修正方法. 根据梯形模糊互反判断矩阵的排列矩阵类型来判断梯形模糊互反判断矩阵的满意一致性; 然后给出循环矩阵的定义, 并用它找出具有循环现象的方案. 通过对产生循环现象的方案顺序的修正得到对排列矩阵一致性的修正方法, 从而得出方案的优劣顺序.

收稿日期: 2013-09-10；**修回日期:** 2014-01-15.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (11271041)；中央高校科研业务费专项资金项目 (swjtu11ZT29).

作者简介: 吕智颖 (1979−), 女, 讲师, 博士生, 从事模糊多属性决策分析、格序决策等研究；黄天民 (1958−), 男, 教授, 博士生导师, 从事智能系统优化与控制、智能信息处理等研究.

1 预备知识

定义 1 称模糊数 $\tilde{A}$ 为梯形模糊数, 如果 $\tilde{A}$ 的隶属函数 $f_{\tilde{A}}$ 满足

$$f_{\tilde{A}}=\begin{cases}\dfrac{x-a}{b-a},\ a\leqslant x\leqslant b;\\ 1,\ b\leqslant x\leqslant c;\\ \dfrac{x-d}{c-d},\ c\leqslant x\leqslant d;\\ 0,\ \text{otherwise}.\end{cases}\quad(1)$$

其中 $-\infty<a\leqslant b\leqslant c\leqslant d<+\infty$. 梯形模糊数 $\tilde{A}$ 可以表示为 $\tilde{A}=(a,b,c,d)$.

文献 [9] 基于类质心的概念比较了梯形模糊数的大小, 并讨论了可比性、规范性和弱可加性, 得到了较好的效果. 相关定义如下.

定义 2 设 $\tilde{A}=(a,b,c,d)$ 是梯形模糊数, 定义其 5 维表示为 $(\lambda,K_L,l,(b+c)/2,1/K_R)$. 其中: λ 表示梯形模糊数的高度, K_L 和 K_R 分别表示左隶属函数的斜率和右隶属函数斜率的绝对值, l 表示梯形模糊数上底的长度, $(b+c)/2$ 表示梯形模糊数上底的中点.

若比较两个梯形模糊数的大小, 则只需考虑以上决定梯形模糊数的位置和大小的 5 个变量.

定义 3 设 $\tilde{A}=(a,b,c,d)$ 是梯形模糊数, 则其 5 维表示为 $(\lambda,K_L,l,(b+c)/2,1/K_R)$, 设相应的权值向量为 $\omega=(\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5)^{\mathrm{T}}$. 其中: $\omega_i\geqslant 0$, $\sum\limits_{i=1}^{5}\omega_i=1$, 这里 ω_i 表示决策者对不同变量的权重, $\omega_i\in[0.1,0.6]$. 若

$$\alpha=\omega_1\lambda+\omega_2K_L+\omega_3l+\frac{\omega_4(b+c)}{2}+\frac{\omega_5}{K_R},$$

则称 α 为 $\tilde{A}$ 的类质心.

引理 1 设 $\tilde{A}_1,\tilde{A}_2$ 是两个梯形模糊数, α_1,α_2 分别是 $\tilde{A}_1,\tilde{A}_2$ 的类质心, 当 $\alpha_1>\alpha_2$ 时, 有 $\tilde{A}_1>\tilde{A}_2$.

2 主要结果

2.1 梯形模糊互反判断矩阵的排列矩阵的定义

定义 4 设 $P=(\tilde{P_{ij}})_{n\times n}$ 为判断矩阵, 其中 $\tilde{P_{ij}}=(a_{ij},b_{ij},c_{ij},d_{ij})$ (而 $\tilde{P_{ji}}=(a_{ji},b_{ji},c_{ji},d_{ji})$) 为梯形模糊数, 且 $1/9\leqslant a_{ij}\leqslant b_{ij}\leqslant c_{ij}\leqslant d_{ij}\leqslant 9$, 如果对于任意的 $i,j=1,2,\cdots,n$, 均有: 1) $a_{ii}=b_{ii}=c_{ii}=d_{ii}=1,\forall i$; 2) $a_{ji}=1/d_{ij}$, $b_{ji}=1/c_{ij}$, $c_{ji}=1/b_{ij}$, $d_{ji}=1/a_{ij},\forall i\neq j$. 则称 P 是梯形模糊互反判断矩阵.

矩阵元素 $\tilde{P_{ij}}$ 表示决策者认为方案 x_i 对方案 x_j 的相对重要程度. 对于任意的 $i,j=1,2,\cdots,n$, 都有当 $a_{ij}=b_{ij}=c_{ij}=d_{ij}$ 时, P 为数字判断矩阵 $P=(a_{ij})_{n\times n}$.

由梯形模糊数的定义可知, 对于梯形模糊数 $\tilde{P_{ij}}=(a_{ij},b_{ij},c_{ij},d_{ij})$, 有 $a_{ij}\leqslant b_{ij}\leqslant c_{ij}\leqslant d_{ij}$, 因此:

1) 若 $a_{ij}\geqslant 1$, 则有 $d_{ij}\geqslant c_{ij}\geqslant b_{ij}\geqslant a_{ij}\geqslant 1$, 此时方案 x_i 优于方案 x_j;

2) 若 $d_{ij}\leqslant 1$, 则有 $a_{ij}\leqslant b_{ij}\leqslant c_{ij}\leqslant d_{ij}\leqslant 1$, 此时方案 x_i 劣于方案 x_j.

由此可得梯形模糊互反判断矩阵的偏好矩阵的定义.

定义 5 设 $P=(\tilde{P_{ij}})_{n\times n}$ 为梯形模糊互反判断矩阵, 称 $S=(s_{ij})_{n\times n}$ 为 P 的偏好关系矩阵, 其中

$$s_{ij}=\begin{cases}1,\ a_{ij}\geqslant 1;\\ 0,\ d_{ij}\leqslant 1.\end{cases}\quad(2)$$

定义 6 在梯形模糊互反判断矩阵 $P=(\tilde{P_{ij}})_{n\times n}$ 的偏好关系矩阵 $S=(s_{ij})_{n\times n}$ 中, 称 $S_i^L=\sum\limits_{j=1}^{n}s_{ij}$ 为第 i 个方案的行偏好值. 将 $S=(s_{ij})_{n\times n}$ 按照 S_i^L 的大小从上到下重新排列, 按照重新排列后的方案顺序得到新的判断矩阵称为 P 的排列矩阵, 记为 $T=(t_{ij})_{n\times n}$.

2.2 梯形模糊互反判断矩阵满意一致性的判定

定义 7 如果在由对梯形模糊互反判断矩阵 $P=(\tilde{P_{ij}})_{n\times n}$ 所确定的方案的比较结果中出现形如 $x_i\succ x_j\succ x_k\succ x_i$ 的现象, 则称这种现象为循环现象. 若方案间的优劣关系具有传递性, 无等价方案且不存在循环现象, 则称梯形模糊互反判断矩阵 P 具有满意一致性.

定理 1 具有严格偏好关系的梯形模糊互反判断矩阵 $P=(\tilde{P_{ij}})_{n\times n}$ 具有满意一致性的充要条件为其排列矩阵 $T=(t_{ij})_{n\times n}$ 是上三角矩阵.

证明 首先证明充分性. 若梯形模糊互反判断矩阵 $P=(\tilde{P_{ij}})_{n\times n}$ 的排列矩阵 $T=(t_{ij})_{n\times n}$ 是上三角矩阵, 则由排列矩阵的定义可知, 从第 1 行到最后一行, 行偏好值逐渐减少, 相应地, 方案的优先性也逐渐降低, 所以不存在循环现象和等价方案, 因此梯形模糊互反判断矩 P 具有满意一致性.

下面证明必要性. 若梯形模糊互反判断矩阵 $P=(\tilde{P_{ij}})_{n\times n}$ 具有满意一致性, 则由满意一致性的定义可知方案的优劣关系具有传递性, 且不存在等价关系和循环现象. 假设具有严格偏好关系的方案优劣顺序为 $x_{\sigma(1)}\succ x_{\sigma(2)}\succ\cdots\succ x_{\sigma(n)}$, σ 为原方案集按照方案的优劣顺序排列后方案的下标值与原方案集下标值的对应, 则在 $P=(\tilde{P_{ij}})_{n\times n}$ 的排列矩阵 $T=(t_{ij})_{n\times n}$ 中, 每行的行偏好值不同, $T^L_{\sigma(1)}=n$, $T^L_{\sigma(2)}=n-1,\cdots,T^L_{\sigma(n)}=1$, 因此 $P=(\tilde{P_{ij}})_{n\times n}$ 的排列矩阵 $T=(t_{ij})_{n\times n}$ 是上三角矩阵. □

2.3 排列矩阵 $T=(t_{ij})_{n\times n}$ 元素的修正

定义 8 在梯形模糊互反判断矩阵 $P=(\tilde{P_{ij}})_{n\times n}$ 的排列矩阵 $T=(t_{ij})_{n\times n}$ 中, 形如

$$\begin{array}{ccc} & x_{\sigma(i)} & x_{\sigma(h)} \\ \begin{array}{c} x_{\sigma(j)} \\ x_{\sigma(i)} \end{array} & \multicolumn{2}{c}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}} \end{array},\quad \begin{array}{ccc} & x_{\sigma(h)} & x_{\sigma(i)} \\ \begin{array}{c} x_{\sigma(i)} \\ x_{\sigma(j)} \end{array} & \multicolumn{2}{c}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} \end{array},$$

$$\begin{array}{ccc} & x_{\sigma(h)} & x_{\sigma(i)} \\ \begin{array}{c} x_{\sigma(j)} \\ x_{\sigma(i)} \end{array} & \multicolumn{2}{c}{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}} \end{array},\quad \begin{array}{ccc} & x_{\sigma(i)} & x_{\sigma(h)} \\ \begin{array}{c} x_{\sigma(i)} \\ x_{\sigma(j)} \end{array} & \multicolumn{2}{c}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}} \end{array}$$

形式的二阶主子式称为由方案 $x_{\sigma(i)}$, $x_{\sigma(j)}$, $x_{\sigma(k)}$ 构成的循环矩阵, 这里 σ 为原方案集按照 P 的排列矩阵 T 所对应方案的下标值与原方案集下标值的对应.

定理 2　梯形模糊互反判断矩阵 $P=(\tilde{P_{ij}})_{n\times n}$ 不具有满意一致性, 当且仅当其排列矩阵 $T=(t_{ij})_{n\times n}$ 的二阶主子式中存在循环矩阵.

证明　首先证明充分性. 如果梯形模糊互反判断矩阵 $P=(\tilde{P_{ij}})_{n\times n}$ 的排列矩阵中存在循环矩阵, 则在构成循环矩阵的 3 个方案的比较结果中出现了循环现象, 因此梯形模糊互反判断矩阵 P 不具有满意一致性.

下面证明必要性. 由定理 1 可知, 若梯形模糊互反判断矩阵 $P=(\tilde{P_{ij}})_{n\times n}$ 不具有满意一致性, 则说明排列矩阵 $T=(t_{ij})_{n\times n}$ 不是上三角形矩阵. 设 $t_{ji}=1$, $j>i$, 则 $t_{ij}=0$. 假设在 T 中从第 1 行到最后一行对应的方案为 $x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \cdots, x_{\sigma(i)}, \cdots, x_{\sigma(j)}, \cdots, x_{\sigma(n)}$, 这里 σ 为原方案集按照 P 的排列矩阵 $T=(t_{ij})_{n\times n}$ 所对应方案的下标值与原方案集下标值的对应. 只需证明存在包含 $t_{ji}=1$ 的循环矩阵.

1) 讨论包含 t_{ji} 和 t_{ii} 的循环矩阵. 假设在第 i 行 t_{ii} 的后面有 $t_{ia_1}=t_{ia_2}=\cdots=t_{ia_e}=1$, 且在第 i 行 t_{ii} 的前面有 $t_{ic}=1$. 如果相应地在第 j 行有 $t_{ja_1}=t_{ja_1}=\cdots=t_{ja_e}=1$, 则当 $t_{jc}=0$ 时, 有

$$\begin{array}{ccc} & x_{\sigma(c)} & x_{\sigma(i)} \\ \begin{array}{c} x_{\sigma(i)} \\ x_{\sigma(j)} \end{array} & \multicolumn{2}{c}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} \end{array}$$

形式的循环矩阵. 当 $t_{jc}=1$ 时, 由于 $t_{ji}=1$ 且 $t_{jj}=1$, 在第 j 行中 1 的个数比在第 i 行中 1 的个数多, 与排列矩阵的定义矛盾, 因此在 $t_{ja_1}, t_{ja_2}, \cdots, t_{ja_e}$ 中一定存在 0. 假设 $t_{jd}=0$, 其中 $d\in\{a_1, a_2, \cdots, a_e\}$, 则存在

$$\begin{array}{ccc} & x_{\sigma(i)} & x_{\sigma(d)} \\ \begin{array}{c} x_{\sigma(i)} \\ x_{\sigma(j)} \end{array} & \multicolumn{2}{c}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}} \end{array}$$

形式的循环矩阵. 假设在第 i 行 t_{ii} 的前面没有 1, 则无论 t_{ji} 的前面是否存在 1, 在 $\{t_{ja_1}, t_{ja_2}, \cdots, t_{ja_e}\}$ 中一定存在 0, 否则在第 j 行中 1 的个数比在第 i 行中 1 的个数多, 与排列矩阵的定义矛盾. 假设 $t_{jf}=0$, 其中 $f\in\{a_1, a_2, \cdots, a_e\}$, 则有

$$\begin{array}{ccc} & x_{\sigma(i)} & x_{\sigma(f)} \\ \begin{array}{c} x_{\sigma(i)} \\ x_{\sigma(j)} \end{array} & \multicolumn{2}{c}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}} \end{array}$$

形式的循环矩阵.

2) 讨论包含 t_{ji} 和 t_{jj} 形成的循环矩阵. 假设在第 j 列中 t_{jj} 的上面有 $t_{b_1j}=t_{b_2j}=\cdots=t_{b_lj}=1$, 且在第 j 列中 t_{jj} 的下面有 $t_{gj}=1$. 如果 $t_{b_1i}=t_{b_2i}=\cdots=t_{b_li}=1$, 则当 $t_{gi}=0$ 时, 有

$$\begin{array}{ccc} & x_{\sigma(i)} & x_{\sigma(j)} \\ \begin{array}{c} x_{\sigma(j)} \\ x_{\sigma(g)} \end{array} & \multicolumn{2}{c}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} \end{array}$$

形式的循环矩阵. 当 $t_{gi}=1$ 时, 由于 $t_{ji}=1$ 和 $t_{ii}=1$, 第 j 列中 1 的个数比第 i 列中 1 的个数少, 与排列矩阵的定义矛盾, 因此在 $\{t_{b_1i}, t_{b_2i}, \cdots, t_{b_li}\}$ 中必存在 0. 假设 $t_{hi}=0$, 其中 $h\in\{b_1, b_2, \cdots, b_l\}$, 则存在

$$\begin{array}{ccc} & x_{\sigma(i)} & x_{\sigma(j)} \\ \begin{array}{c} x_{\sigma(h)} \\ x_{\sigma(j)} \end{array} & \multicolumn{2}{c}{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}} \end{array}$$

形式的循环矩阵. 假设在第 j 列中 t_{jj} 的下面没有 1, 则无论 t_{ji} 的下面是否存在 1, 第 i 列比第 j 列多了一个 $t_{ji}=1$ 的元素, 从而在第 j 列中 1 的个数比在第 i 列中 1 的个数少, 与排列矩阵的定义矛盾, 因此在 $\{t_{b_1i}, t_{b_2i}, \cdots, t_{b_li}\}$ 中必存在 0. 设 $t_{mi}=0$, 其中 $m\in\{b_1, b_2, \cdots, b_l\}$, 则有

$$\begin{array}{ccc} & x_{\sigma(i)} & x_{\sigma(j)} \\ \begin{array}{c} x_{\sigma(m)} \\ x_{\sigma(j)} \end{array} & \multicolumn{2}{c}{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}} \end{array}$$

形式的循环矩阵. □

由定理 1 可以检验具有严格偏好关系的梯形模糊互反判断矩阵 $P=(\tilde{P_{ij}})_{n\times n}$ 是否具有满意一致性. 当不一致时, 由定理 2 可以找出一个循环矩阵, 进而找出产生这个循环现象的方案 $x_{\sigma(i)}, x_{\sigma(j)}$ 和 $x_{\sigma(h)}$. 按照一定的办法给出这些方案的顺序使得循环矩阵逐渐减少, 最终得到 P 的排列矩阵 $T'=(t'_{ij})_{n\times n}$ 是上三角矩阵.

综合上述结论, 可以得出梯形模糊互反判断矩阵一致性的判定及其排列矩阵元素的修正方法, 具体步骤如下.

Step 1: 根据定义 5 计算出 $P=(\tilde{P_{ij}})_{n\times n}$ 的偏好关系矩阵 $S_1=(s_{1ij})_{n\times n}$.

Step 2: 根据定义 6 计算出 $P=(\tilde{P_{ij}})_{n\times n}$ 的排列矩阵 $T_1=(t_{1ij})_{n\times n}$.

Step 3: 根据定理 1 判断 $T_k=(t_{kij})_{n\times n}$ $(k=1$,

$2,\cdots,n)$ 是否为上三角矩阵, 若是, 则转到 Step 7, 否则进行下一步.

Step 4: 找出 $T_k=(t_{kij})_{n\times n}$ 的一个循环矩阵及构成这个循环矩阵的方案.

Step 5: 按照如下方法修正产生循环现象的方案顺序:

1) 若产生循环现象的方案 $x_{\sigma(i)}, x_{\sigma(j)}$ 和 $x_{\sigma(h)}$ 对应的行偏好值都不相等, 则将行偏好值最小的方案作为 3 个方案中的最劣方案;

2) 若方案 $x_{\sigma(i)}, x_{\sigma(j)}$ 和 $x_{\sigma(h)}$ 中有一个方案的行偏好值大于另外两个具有相等行偏好值的方案, 则最劣方案为下三角处出现元素 1 的行所对应的方案;

3) 若方案 $x_{\sigma(i)}$, $x_{\sigma(j)}$ 和 $x_{\sigma(h)}$ 的行偏好值都相等, 则由定义 3 可知, 在梯形模糊互反判断矩阵 $P=(\tilde{P_{ij}})_{n\times n}$ 中, $\tilde{P_{ij}}=(a_{ij},b_{ij},c_{ij},d_{ij})$ 的类质心为

$$\alpha_{ij}=\omega_1+\frac{\omega_2}{b_{ij}-a_{ij}}+\omega_3(c_{ij}-b_{ij})+\frac{\omega_4(b_{ij}+c_{ij})}{2}+\omega_5(d_{ij}-c_{ij}).$$

计算 3 个方案在梯形模糊互反判断矩阵 $P=(\tilde{P_{ij}})_{n\times n}$ 中所在行的偏好值的类质心 (由于 P 的每行都包含对角线上的元素 1, 比较时可以不考虑), 将类质心之和最小的行所对应的方案作为最劣方案. 假设修正后得出方案 $x_{\sigma(i)}$, $x_{\sigma(j)}$ 和 $x_{\sigma(h)}$ 的优劣顺序为 $x_{\sigma(i)}\succ x_{\sigma(j)}\succ x_{\sigma(h)}$, 相应地在排列矩阵 $T=(t_{kij})_{n\times n}$ 中将 $t_{khi}=1$ 改为 $t_{khi}=0$, 将 $t_{kih}=0$ 改为 $t_{kih}=1$, 其他元素都不变, 从而可以得到新的偏好关系矩阵 $S_{k+1}=(s_{(k+1)ij})_{n\times n}$.

Step 6: 重新排列 $S_{k+1}=(s_{(k+1)ij})_{n\times n}$, 得到排列矩阵 $T_{k+1}=(t_{(k+1)ij})_{n\times n}$, 转到 Step 3.

Step 7: 给出方案的优劣顺序.

3 实例分析

风险投资是将资本投向蕴藏着失败风险的高新技术及其产品的研究开发领域, 旨在促使高新技术成果尽快商品化、产业化, 以取得高资本收益的一种投资过程. 在投资过程中, 项目筛选是至关重要的[10]. 现考查某个风险投资公司进行项目投资, 给出 5 个备选方案, 用 $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$ 表示, 从风险因素对项目进行评估. 假设综合决策者们给出的偏好信息得到群体决定的梯形模糊互反判断矩阵 P 如下:

$$\begin{array}{c} \\ x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5\end{array}\\ \left[\begin{array}{ccccc}
1 & (2,2.5,3,4) & (1/4,1/3,1/2,1) & (1/3,1/2,1/2,1) & (2,3,3,5)\\
(1/4,1/3,2/5,1/2) & 1 & (2,3,4,5) & (2,3,3,4) & (1/3,1/2,1/2,1)\\
(1,2,3,4) & (1/5,1/4,1/3,1/2) & 1 & (1/5,1/3,1/2,1) & (1,2,2,3)\\
(1,2,2,3) & (1/4,1/3,1/3,1/2) & (1,2,3,5) & 1 & (2,3,5,6)\\
(1/5,1/3,1/3,1/2) & (1,2,2,3) & (1/3,1/2,1/2,1) & (1/6,1/5,1/3,1/2) & 1
\end{array}\right]\end{array}.$$

判断 P 的满意一致性, 并给出方案的优劣顺序.

由定义 5 可得 $P=(\tilde{P_{ij}})_{5\times 5}$ 的偏好关系矩阵为

$$S_1=\begin{array}{c} \\ x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5\end{array}\\ \left[\begin{array}{ccccc}
1&1&0&0&1\\
0&1&1&1&0\\
1&0&1&0&1\\
1&0&1&1&1\\
0&1&0&0&1
\end{array}\right]\end{array},$$

由定义 6 可得 $P=(\tilde{P_{ij}})_{4\times 4}$ 的排列矩阵为

$$T_1=\begin{array}{c} \\ x_4\\ x_2\\ x_3\\ x_1\\ x_5\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc} x_4 & x_2 & x_3 & x_1 & x_5\end{array}\\ \left[\begin{array}{ccccc}
1&0&1&1&1\\
1&1&1&0&0\\
0&0&1&1&1\\
0&1&0&1&1\\
0&1&0&0&1
\end{array}\right]\end{array}.$$

T_1 不是上三角矩阵, 由定理 1 可知 P 不具有满意一致性. 在 T_1 的下三角出现 $t_{142}=1$, 由循环矩阵的定义及定理 2 得出包含 t_{142} 的循环矩阵为

$$\begin{array}{c} \\ x_2\\ x_1\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cc} x_2 & x_3\end{array}\\ \left[\begin{array}{cc}1&1\\1&0\end{array}\right]\end{array},\quad \begin{array}{c} \\ x_3\\ x_1\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cc} x_2 & x_1\end{array}\\ \left[\begin{array}{cc}0&1\\1&1\end{array}\right]\end{array}.$$

这两个矩阵显然是由 x_1, x_2, x_3 构成的循环矩阵, 出现的循环现象为 $x_1\succ x_2\succ x_3\succ x_1$. 通过比较 3 个方案所在行的行偏好值的大小可知 $S_1^L=S_2^L=S_3^L=3$, 计算方案 x_1, x_2 和 x_3 在梯形模糊互反判断矩阵 P 中所在行的偏好值的类质心之和的大小, 取 $\omega=(0.2,0.2,0.2,0.2,0.2)$, 可得

$$\alpha_1=\alpha_{12}+\alpha_{13}+\alpha_{14}+\alpha_{15}=7.266,$$

$$\alpha_2=\alpha_{21}+\alpha_{23}+\alpha_{24}+\alpha_{25}=7.068,$$

$$\alpha_3=\alpha_{31}+\alpha_{32}+\alpha_{34}+\alpha_{35}=8.524.$$

将类质心之和最小的行所对应的方案 x_2 作为最劣方案, 因此 3 个方案的优劣顺序为 $x_3\succ x_1\succ x_2$, 即 $x_{\sigma_{(3)}}\succ x_{\sigma_{(4)}}\succ x_{\sigma_{(2)}}$. 相应地, 在排列矩阵 T_1 中将 $t_{132}=0$ 改为 $t_{132}=1$, 将 $t_{123}=1$ 改为 $t_{123}=0$. 修正

后的偏好关系矩阵为

$$S_2=\begin{array}{c}\\ x_4\\ x_2\\ x_3\\ x_1\\ x_5\end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_4 & x_2 & x_3 & x_1 & x_5\end{array}\\ \begin{bmatrix}1&0&1&1&1\\1&1&0&0&0\\0&1&1&1&1\\0&1&0&1&1\\0&1&0&0&1\end{bmatrix}\end{array},$$

进而得到排列矩阵为

$$T_2=\begin{array}{c}\\ x_4\\ x_3\\ x_1\\ x_2\\ x_5\end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_4 & x_3 & x_1 & x_2 & x_5\end{array}\\ \begin{bmatrix}1&1&1&0&1\\0&1&1&1&1\\0&0&1&1&1\\1&0&0&1&0\\0&0&0&1&1\end{bmatrix}\end{array}.$$

在 T_2 的下三角中出现 $t_{241}=1$, 由循环矩阵的定义及定理 2 得出包含 $t_{241}=1$ 的循环矩阵为

$$\begin{array}{c}\\ x_1\\ x_2\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cc} x_4 & x_2\end{array}\\ \begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}\end{array},\quad \begin{array}{c}\\ x_4\\ x_2\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cc} x_4 & x_1\end{array}\\ \begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}\end{array}.$$

它们显然是由 x_1, x_2, x_4 构成的循环矩阵, 出现的循环现象为 $x_1\succ x_2\succ x_4\succ x_1$. 比较 3 个方案所在行的行偏好值的大小可知 $S_4^L=4$, $S_1^L=3$, $S_2^L=2$, 将行偏好值最小的方案 x_2 作为 3 个方案中最劣方案, 因此 3 个方案的优劣顺序为 $x_4\succ x_1\succ x_2$, 即 $x_{\sigma(1)}\succ x_{\sigma(3)}\succ x_{\sigma(4)}$. 相应地, 在排列矩阵 T_2 中将 $t_{241}=1$ 改为 $t_{241}=0$, 将 $t_{214}=0$ 改为 $t_{214}=1$.

修正后的偏好关系矩阵为

$$S_3=\begin{array}{c}\\ x_4\\ x_3\\ x_1\\ x_2\\ x_5\end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_4 & x_3 & x_1 & x_2 & x_5\end{array}\\ \begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&1&1&1\\0&0&1&1&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&1&1\end{bmatrix}\end{array},$$

进而得到排列矩阵为

$$T_3=\begin{array}{c}\\ x_4\\ x_3\\ x_1\\ x_5\\ x_2\end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_4 & x_3 & x_1 & x_5 & x_2\end{array}\\ \begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&1&1&1\\0&0&1&1&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}\end{array}.$$

因为 T_3 为上三角矩阵, 所以完成了对 $P=(\tilde{P_{ij}})_{5\times5}$ 满意一致性的检验及修正, 方案的优劣顺序为 $x_4\succ x_3\succ x_1\succ x_5\succ x_2$.

4 结 论

本文引入了梯形模糊互反判断矩阵的定义, 利用具有严格偏好关系的梯形模糊互反判断矩阵的排列矩阵来判定梯形模糊互反判断矩阵的满意一致性, 随后通过循环矩阵找出不合乎逻辑的方案, 并给出梯形模糊互反判断矩阵的排列矩阵元素的修正方法. 该方法可在充分利用初始判断矩阵信息的基础上, 使修正后的判断矩阵满足一致性条件. 文中只将部分梯形模糊数去模糊化, 简化了计算. 在进一步的研究中, 将把本文方法推广到带有多个决策属性的决策问题中.

参考文献(References)

[1] 许树柏. 层次分析法原理 [M]. 天津: 天津大学出版社, 1988: 118-119.
(Xu S B. Theory of the analytical hierarchy process [M]. Tianjin: University Publishing House, 1988: 118-119.)

[2] Orlowsky S A. Decision making with a fuzzy preference relation[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1978, 1(3): 155-167.

[3] Fan Zhiping, Ma Jian, Jiang Yanping, et al. A goal programming approach to group decision making based on multiplicative preference relationsand fuzzy preference relations[J]. European J of Operational Research, 2006, 174(1): 311-321.

[4] 戴建华, 李军, 申文明, 等. 模糊判断矩阵的满意一致性检验[J]. 系统工程与电子技术, 2006, 28(8): 1174-1177.
(Dai J H, Li J, Shen W M, et al. Judgement of satisfying consistency on fuzzy judgement matrix[J]. Systems Engineering and Electronics, 2006, 28(8): 1174-1177.)

[5] Tien-Chin Wang, Yueh-Hsiang Chen. Applying fuzzy linguistic preference relations to the improvement of consistency of fuzzy AHP[J]. Information Sciences, 2008, 178: 3755-3765.

[6] 侯福均, 吴祈宗. 模糊判断矩阵的一致性检验及一致性改进方法[J]. 系统工程, 2003, 21(1): 110-116.
(Hou F J, Wu Q Z. Methods for identifying and improving the consistency of fuzzy judgment matrix[J]. Systems Engineering, 2003, 21(1): 110-116.)

[7] 樊治平, 姜艳萍, 肖四汉. 模糊判断矩阵的一致性及其性质[J]. 控制与决策, 2001, 16(1): 69-71.
(Fan Z P, Jiang Y P, Xiao S H. Consistency of fuzzy judgement matrix and its properties[J]. Control and Decision, 2001, 16(1): 69-71.)

[8] 和媛媛, 周德群, 王强. 基于模糊判断矩阵的一致性调整方法[J]. 系统工程与电子技术, 2008, 30(11): 2186-2189.
(He Y Y, Zhou D Q, Wang Q. Method for regulating consistency of fuzzy preference[J]. Systems Engineering and Electronics, 2008, 30(11): 2186-2189.)

[9] 兰继斌, 李勇. 基于类质心的梯形模糊数排序[J]. 淮北煤炭师范学院学报, 2008, 29(3): 5-7.
(Lan J B, Li Y. Ranking trapezoid fuzzy numbers base on similar centroid[J]. J of Huaibei Coal Industry Teachers' College, 2008, 29(3): 5-7.)

[10] Markowitz H M. Portfolio selection[J]. J of Finance, 1952, 7(1): 77-91.

(责任编辑: 滕 蓉)