

多输入不确定系统的平滑非奇异终端滑模控制

王艳敏^a, 冯勇^a, 夏红伟^b, 申立群^a

(哈尔滨工业大学 a. 电气工程及自动化学院, b. 航天学院, 哈尔滨 150001)

摘要: 研究多输入通道的参数摄动和外部扰动对控制系统输入输出和内部状态稳定性的影响. 采用两次模型变换实现输入输出和内部状态解耦, 运用 Lyapunov 稳定定理建立系统收敛区域与不确定项范围的数学关系. 提出一种平滑非奇异终端滑模控制方法, 引入虚拟控制项以增加系统的相对阶, 利用鲁棒微分器合理提取微分信号, 实现系统的无抖振滑模控制. 仿真研究表明了所提出方法的有效性.

关键词: 非奇异终端滑模控制; 多输入控制系统; 稳定性; 抖振

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Smooth nonsingular terminal sliding mode control of uncertain multi-input systems

WANG Yan-min^a, FENG Yong^a, XIA Hong-wei^b, SHEN Li-qun^a

(a. School of Electrical Engineering and Automation, b. School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China. Correspondent: WANG Yan-min, E-mail: wangyanmin@hit.edu.cn)

Abstract: The stability of input-output and internal states of multi-input systems with parameter perturbations and external disturbance is investigated. Two model transformations are adopted to realize the decomposition of input-output and internal states. By using the Lyapunov stability theory, the mathematical relationship between the convergence region and the uncertainties is formulated. A smooth nonsingular terminal sliding mode control method is proposed. The virtual control item is introduced to increase the relative order, and the robust differentiator is used to get derivative, so that the free-chattering sliding mode control is realized. Simulation results show the effectiveness of the proposed method.

Keywords: nonsingular terminal sliding mode control; multi-input control system; stability; chattering

0 引言

强耦合性是制约多输入控制系统鲁棒稳定性的突出问题^[1]. 目前, 利用已有的解耦算法^[2]可使系统简化为正则形, 但耦合作用不等于简单的干扰, 会导致多个原本稳定的单回路系统失稳. 尤其当系统维数较高, 且存在参数摄动和外部扰动时, 如何实现输入输出和内部状态间的最大程度解耦, 进而研究不确定性对系统稳定性的影响, 具有重要的研究价值.

滑模控制是不确定系统一种有效的鲁棒控制方法. Feng 等^[3]提出了一种非奇异终端滑模 (NTSM) 控制方法, 它不同于线性滑模的渐近收敛性^[4]和终端滑模的控制奇异性^[3], 可保证系统全局有限时间收敛,

适用于高速、高精度控制系统. 然而, NTSM 目前多用于相对阶 ≥ 2 的机电系统 (如机械臂^[3]、永磁同步电机^[5]等), 且仍存在抖振问题^[4]. 为此, Feng 等^[6]尝试将 NTSM 与高阶滑模控制相结合, 虽然也能消除高频抖振信号, 却丧失了有限时间收敛性.

鉴于此, 本文提出一种平滑 NTSM 控制方法. 引入虚拟控制项, 人为增加系统的相对阶, 从本质上解决抖振问题, 并保证系统有限时间收敛. 将其扩展应用到相对阶为 1 的多输入不确定系统, 推导系统输入输出和内部状态的解耦, 利用 Lyapunov 稳定理论研究不稳定零动态的镇定, 进而实现系统的鲁棒稳定性控制.

收稿日期: 2013-10-07; 修回日期: 2014-04-01.

基金项目: 国家自然科学基金项目(51307035, 61304108); 高等学校博士学科点专项科研项目(20122302120012); 中国博士后科学基金项目(2013M541377); 中央高校基本科研业务费专项基金项目(2014015, 2012016); 国家留学基金委项目(201206125054).

作者简介: 王艳敏(1979—), 女, 讲师, 从事滑模控制的研究; 冯勇(1962—), 男, 教授, 博士生导师, 从事滑模与非线性控制等研究.

1 改进的平滑 NTSM 控制方法

针对二阶系统 $\ddot{x} = f(x, \dot{x}, u, t)$, Feng 等^[3]提出的 NTSM 滑动模态通常设计为

$$s = x_1 + \beta x_2^{p/q} = 0. \quad (1)$$

其中: 系统状态 $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$; 设计参数 $\beta > 0$; p 和 q 为奇数, 且 $1 < p/q < 2$. 由于二阶系统相对滑模变量 s 相对阶为 1, 控制 u 显含在 \dot{s} 中. 在滑模存在条件 $\dot{V} = s\dot{s} < 0$ 的约束下, u 直接包含切换控制项 $\text{sign}(\cdot)$, 继而诱发高频抖振^[4].

本文主要进行两方面改进: 拓展 NTSM 在一阶系统 $\dot{x} = f(x, u, t)$ 的应用; 消除控制律中的 $\text{sign}(\cdot)$, 实现连续滑模控制. 为此, 引入虚拟控制量

$$v = \dot{u}, \quad (2)$$

使得系统状态 x 相对于新的控制量 v 的相对阶为 2, 人为增加了系统动态的光滑度. 然而, 一阶系统的状态微分 \dot{x} 未知, 难以直接设计 NTSM 滑模面 (1). 为此, 利用鲁棒精确微分器^[7]实时获取微分, 即

$$\begin{cases} \dot{y} = v_0, \\ v_0 = v_1 - \lambda_0 |y - x|^{1/2} \text{sign}(y - x), \\ v_1 = -\lambda_1 \text{sign}(v_1 - v_0), \end{cases} \quad (3)$$

其中 λ_0 和 λ_1 为设计参数. 经有限收敛时间后, $x_2 = \dot{x} = v_1$ 可直接用来设计 NTSM 控制器. 同时, 实际控制量

$$u = \int v dt \quad (4)$$

会经过积分作用而处处连续, 实现无抖振 NTSM 控制.

2 多输入不确定系统的鲁棒稳定性控制

考虑如下—阶多输入不确定系统:

$$\dot{x} = Ax + (B + \Delta B)u + f. \quad (5)$$

其中: $x \in \mathbf{R}^n$, $u \in \mathbf{R}^m$, $1 \leq m \leq n$; 常数阵 $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbf{R}^{n \times m}$, (A, B) 可控, r 为系统能控性指数, $\text{rank } B = n_1$, $n_1 \leq m$; $\Delta B = Bd$ 为多输入通道内的时变不确定性, $d \in \mathbf{R}^{m \times m}$, $\|d\| \leq l_d$; $f \in \mathbf{R}^n$ 为非匹配外部扰动, 假设 f 及其导数 \dot{f} 存在且有界. 不特殊声明, 文中 $\|\cdot\|$ 均表示向量或矩阵的欧氏范数.

2.1 两次模型变换

由于 (A, B) 可控, 根据系统的能控指数 r , 通过两次线性模型变换将系统解耦成 r 个子系统. 首先, 根据文献 [2] 作第 1 次状态变换

$$y = F_1 x. \quad (6)$$

其中变换阵 $F_1 \in \mathbf{R}^{n \times n}$, 使得系统变为块控标准型

$$\begin{aligned} \dot{y} &= A'y + (B' + \Delta B')u + f', \\ A' &= F_1 A F_1^{-1}, \end{aligned}$$

$$B' = F_1 B = [0, B_{1,0}^T]^T, \quad (7)$$

$B_{1,0} \in \mathbf{R}^{n_1 \times m}$ 由输入阵 B 的 n_1 线性无关行组成, 即 $\text{rank } B_{1,0} = n_1$, $\Delta B' = B'd$, $f' = F_1 f$.

为了消除状态耦合, 作第 2 次状态变换^[6,8]

$$y = F_2 z, \quad (8)$$

将系统 (7) 进一步变换为

$$\dot{z} = A''z + (B'' + \Delta B'')u + f''. \quad (9)$$

其中

$$A'' = (F_2)^{-1} A' F_2$$

$$B'' = (F_2)^{-1} B' = [0, B_{1,0}^T]^T,$$

$$\Delta B'' = B'' d, f'' = (F_2)^{-1} f',$$

$$F_2 =$$

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -K_{r-1,r} & I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -K_{r-2,r} & -K_{r-2,r-1} & I & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -K_{2,r} & -K_{2,r-1} & -K_{2,r-2} & \dots & I & 0 \\ -K_{1,r} & -K_{1,r-1} & -K_{1,r-2} & \dots & -K_{1,2} & I \end{bmatrix},$$

$$K_{i,i+1} =$$

$$B_{i+1,i}^+ (K_{i+1,i+2} B_{i+2,i+1} + A'_{i+1,i+1} - N_{i+1}),$$

$$i = 1, 2, \dots, r-1,$$

$$K_{i,j} = B_{i+1,i}^+ \left(K_{i+1,j} N_j + A'_{i+1,j} + \right.$$

$$\left. K_{i+1,j+1} B_{j+1,j} - \sum_{k=j-1}^{i+1} A'_{i+1,k} K_{k,j} \right),$$

$$i = 1, 2, \dots, r-2, j = i+2, i+3, \dots, r,$$

$B_{i+1,i}^+$ 为 $B_{i+1,i}$ 的 Moore-Penrose 逆, 即

$$B_{i+1,i}^+ = B_{i+1,i}^T [B_{i+1,i} B_{i+1,i}^T]^{-1}.$$

将系统 (9) 写成分块形式, 相应地系统分解为如下解耦的内部子系统和输入输出子系统:

$$\dot{z}_i = N_i z_i + B_{i,i-1} z_{i-1} + f''_{ui}, \quad i = 2, 3, \dots, r; \quad (10)$$

$$\dot{z}_1 = \sum_{i=1}^r A''_{1,i} z_i + (B_{1,0} + B_{1,0} d)u + f''_m. \quad (11)$$

其中

$$z = [z_r^T, \dots, z_1^T]^T, z_i \in \mathbf{R}^{n_i}, i = 1, 2, \dots, r;$$

$$f'' = [f''_{ur}^T, \dots, f''_{u2}^T, f''_m^T]^T,$$

$$f''_{ui} \in \mathbf{R}^{n_i}, i = 2, 3, \dots, r;$$

$$f''_m \in \mathbf{R}^{n_1}, N_i \in \mathbf{R}^{n_i}.$$

2.2 输入输出子系统的自适应平滑 NTSM 控制

利用所提出的平滑 NTSM 方法实现输入输出子系统 (11) 的鲁棒有限时间收敛. 由于存在时变不确定

性 $\mathbf{B}_{1,0}\mathbf{d}$, 难以直接求其逆矩阵, 引入参考模型

$$\dot{\mathbf{z}}_f = \sum_{i=1}^r \mathbf{A}_{1,i}'' \mathbf{z}_i - \varepsilon \mathbf{B}_{1,0} \mathbf{u} + \mathbf{w}. \quad (12)$$

其中: $\mathbf{z}_f \in \mathbf{R}^{n_1}$; $\varepsilon \in \mathbf{R}^1$ 为设计参数; $\mathbf{w} \in \mathbf{R}^{n_1}$ 为自适应控制律. 系统(11)的控制器设计包含 \mathbf{u} 、 \mathbf{v} 两部分.

2.2.1 控制器 \mathbf{u} 的设计

定义偏差变量 $\mathbf{e} = \mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_f$, 由式(11)和(12), 得

$$\dot{\mathbf{e}} = (\varepsilon + 1)\mathbf{B}_{1,0} \left(\mathbf{I} + \frac{\mathbf{d}}{\varepsilon + 1} \right) \mathbf{u} - \mathbf{w} + \mathbf{f}_m'', \quad (13)$$

其中 $\varepsilon \gg l_d$. 因此, $\|\mathbf{d}/(\varepsilon + 1)\| \ll 1$, 式(13)简化为

$$\dot{\mathbf{e}} = (\varepsilon + 1)\mathbf{B}_{1,0} \mathbf{u} - \mathbf{w} + \mathbf{f}_m''. \quad (14)$$

针对偏差系统(14), 首先设计 NTSM 滑模面

$$\mathbf{s}_1 = \mathbf{e} + \mathbf{c}_1 \dot{\mathbf{e}}^{p_1/q_1}. \quad (15)$$

其中: $\mathbf{s}_1 \in \mathbf{R}^{n_1}$, $\mathbf{c}_1 = \text{diag}(c_{11}, c_{12}, \dots, c_{1n_1})$, $c_{1i} > 0$, $i = 1, 2, \dots, n_1$, p_1 和 q_1 为奇数, $1 < p_1/q_1 < 2$, $\dot{\mathbf{e}}^{p_1/q_1} = [\dot{e}_1^{p_1/q_1}, \dot{e}_2^{p_1/q_1}, \dots, \dot{e}_{n_1}^{p_1/q_1}]^T$ 由鲁棒微分器(3)实时获得.

根据滑模等效控制原理^[4]设计平滑 NTSM 控制器 $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{eq} + \mathbf{u}_n$, 其中 \mathbf{u}_{eq} 为等效控制项, 以保证 $\mathbf{e} = \dot{\mathbf{e}} = 0$ 存在. 暂时忽略不确定性 \mathbf{f}_m'' , 由式(14)推出

$$\mathbf{u}_{eq} = \frac{1}{\varepsilon + 1} \mathbf{B}_{1,0}^+ \mathbf{w}. \quad (16)$$

\mathbf{u}_n 为切换控制项以抑制系统扰动, 为了消除抖振问题, 引入虚拟控制 $\mathbf{v}_1 = \dot{\mathbf{u}}_n$.

定理 1 对于偏差系统(14), 若虚拟控制项 \mathbf{v}_1 设计如下:

$$\begin{cases} \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_{1eq} + \mathbf{v}_{1n}, \\ \mathbf{v}_{1eq} = -\frac{q_1}{(\varepsilon + 1)p_1} \mathbf{B}_{1,0}^+ \mathbf{c}_1^{-1} \dot{\mathbf{e}}^{2-p_1/q_1}, \\ \mathbf{v}_{1n} = -\frac{1}{\varepsilon + 1} \mathbf{B}_{1,0}^+ (\|\dot{\mathbf{f}}_m''\| + \eta_1) \text{sgn}(\mathbf{s}_1), \end{cases} \quad (17)$$

则偏差状态 \mathbf{e} 和 $\dot{\mathbf{e}}$ 将有限时间内收敛到零. 其中 $\eta_1 > 0$ 为控制增益.

证明 选取 Lyapunov 函数 $V = 0.5\mathbf{s}_1^T \mathbf{s}_1$, 对其求一阶时间导数, 并代入式(16)等效控制项 \mathbf{u}_{eq} , 有

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \mathbf{s}_1^T \dot{\mathbf{s}}_1 = \\ & \mathbf{s}_1^T \left(\frac{p_1}{q_1} \mathbf{c}_1 \text{diag}(\dot{\mathbf{e}}^{p_1/q_1 - 1}) \right) \left(\dot{\mathbf{e}} + \frac{q_1}{p_1} \mathbf{c}_1^{-1} \dot{\mathbf{e}}^{2-p_1/q_1} \right) = \\ & \mathbf{s}_1^T \left(\frac{p_1}{q_1} \mathbf{c}_1 \text{diag}(\dot{\mathbf{e}}^{p_1/q_1 - 1}) \right) \left((\varepsilon + 1)\mathbf{B}_{1,0}(\mathbf{v}_{1eq} + \mathbf{v}_{1n}) + \right. \\ & \left. \frac{q_1}{p_1} \mathbf{c}_1^{-1} \dot{\mathbf{e}}^{2-p_1/q_1} + \dot{\mathbf{f}}_m'' \right). \end{aligned}$$

设计切换控制律(17), 因为 \mathbf{c}_1 为对角阵, 所以 $\mathbf{c}_1 \text{diag}(\dot{\mathbf{e}}^{p_1/q_1 - 1})$ 也是对角阵, 即

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\eta_1 \frac{p_1}{q_1} (\mathbf{c}_1 \text{diag}(\dot{\mathbf{e}}^{p_1/q_1 - 1})) \mathbf{s}_1^T \text{sgn}(\mathbf{s}_1) \leq \\ & -\eta_1 \frac{p_1}{q_1} \sum_{i=1}^{n_1} c_{1i} \dot{e}_i^{p_1/q_1 - 1} |s_{1i}| \leq 0. \end{aligned}$$

若系统未达稳定, 即 $\|\mathbf{s}_1\| \neq 0$, 则当且仅当 $i \in [1, n_1]$, $\dot{e}_i = 0$ 时, $\dot{V} = 0$. 但是 $\dot{e}_i = 0, e_i \neq 0$ 是系统暂态点, $\dot{V} = 0$ 也不能保持, 因此, 满足滑模存在条件, 继而由式(14) $\mathbf{s}_1 = 0$ 可计算出偏差状态 $\dot{\mathbf{e}}$ 和 \mathbf{e} 在有限时间

$$t_1 = \frac{p_1}{p_1 - q_1} \max_{i=1,2,\dots,n_1} (c_{1i} e_i(0)^{\frac{p_1}{p_1 - q_1}})$$

内收敛到零. \square

2.2.2 控制器 \mathbf{v} 的设计

当参考模型(12)跟踪上输入输出子系统(11)后, 有

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}} &= 0, \\ \mathbf{u} &= \frac{1}{\varepsilon + 1} \mathbf{B}_{1,0}^+ (\mathbf{w} - \mathbf{f}_m''), \end{aligned}$$

式(12)变为

$$\dot{\mathbf{z}}_f = \sum_{i=1}^r \mathbf{A}_{1,i}'' \mathbf{z}_i + \frac{1}{\varepsilon + 1} \mathbf{w} - \frac{\varepsilon}{\varepsilon + 1} \mathbf{f}_m''. \quad (18)$$

与 \mathbf{u} 设计类似, 滑模面设计为

$$\mathbf{s}_2 = \mathbf{z}_f + \mathbf{c}_2 \dot{\mathbf{z}}_f^{p_2/q_2}, \quad (19)$$

其中 $\mathbf{s}_2, \mathbf{c}_2, p_2, q_2$ 和 $\dot{\mathbf{z}}_f^{p_2/q_2}$ 与前文定义相同.

定理 2 对于参考模型系统(18), 若采取如下平滑 NTSM 控制律:

$$\begin{cases} \mathbf{w} = \mathbf{w}_{eq} + \mathbf{w}_n, \\ \mathbf{w}_{eq} = -(\varepsilon + 1) \sum_{i=1}^r \mathbf{A}_{1,i}'' \mathbf{z}_i, \\ \mathbf{w}_n = \int \mathbf{v}_2 dt, \\ \mathbf{v}_2 = -\frac{q_2}{p_2} (\varepsilon + 1) \mathbf{c}_2^{-1} \dot{\mathbf{z}}_f^{2-p_2/q_2} - (\varepsilon \rho + \eta_2) \text{sgn}(\mathbf{s}_2), \end{cases} \quad (20)$$

则状态 $\dot{\mathbf{z}}_f$ 和 \mathbf{z}_f 有限时间收敛到零. 其中 $\eta_2 > 0$ 为控制增益.

证明 选取 Lyapunov 函数 $V = 0.5\mathbf{s}_2^T \mathbf{s}_2$, 其稳定性证明与定理 1 类似. 由式(19) $\mathbf{s}_2 = 0$ 得到状态 $\dot{\mathbf{z}}_f$ 和 \mathbf{z}_f 的收敛时间为

$$t_2 = t_1 + \frac{p_2}{p_2 - q_2} \max_{i=1,2,\dots,n_1} (c_{2i} z_{fi}(t_1)^{\frac{p_2}{p_2 - q_2}}). \quad \square$$

2.3 非匹配外部扰动对系统内部稳定性的影响

当输入输出子系统状态 \mathbf{z}_1 收敛到零后, 内部子系统(10)变为带有扰动的零动态子系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}}_i = \mathbf{N}_i \mathbf{z}_i + \mathbf{B}_{i,i-1} \mathbf{z}_{i-1} + \mathbf{f}_{ui}'', \quad i = 3, 4, \dots, r, \\ \dot{\mathbf{z}}_2 = \mathbf{N}_2 \mathbf{z}_2 + \mathbf{f}_{u2}''. \end{cases} \quad (21)$$

根据 Lyapunov 稳定定理, 设计矩阵 \mathbf{N}_i ($i = 2, 3, \dots, r$) 特征值应全为负, 以保证零动态子系统(21)在平衡点 $\mathbf{z}_i = 0$ 的局部稳定性. 设计

$$\mathbf{N}_i = -\lambda_i \mathbf{I}_{n_i}, \quad -\lambda_2 < \dots < -\lambda_r < 0,$$

使得 $\mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3, \dots, \mathbf{z}_r$ 顺序收敛.

定理 3 对于零动态子系统 (21), 存在对称正定阵 $P_i, Q_i \in R^{n_i \times n_i}$ ($i = 2, 3, \dots, r$), 满足

$$P_i N_i + N_i^T P_i = -Q_i,$$

则 z_2, z_3, \dots, z_r 渐近收敛到 Ω_i 内, 有

$$\Omega_i = \{z_i \in R^{n_i} : \|z_i\| \leq \tau_i\}. \quad (22)$$

其中

$$\tau_i = \frac{2(\|f''_{ui}\| + \tau_{i-1} \|B_{i,i-1}\|)}{\mu_i},$$

$$\mu_i = \frac{\lambda_{\min}(Q_i)}{\lambda_{\max}(P_i)},$$

$\lambda_{\min}(Q_i)$ 和 $\lambda_{\max}(P_i)$ 分别为 Q_i 和 P_i 的最大和最小特征值, $\tau_1 = 0$.

证明 选取 Lyapunov 函数 $V_i = z_i^T P_i z_i$, 求导数

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &= \dot{z}_i^T P_i z_i + z_i^T P_i \dot{z}_i = \\ & z_i^T (N_i^T P_i + P_i N_i) z_i + 2f''_{ui}{}^T P_i z_i + 2z_i^T P_i B_{i,i-1} z_{i-1} = \\ & -z_i^T Q_i z_i + 2f''_{ui}{}^T P_i z_i + 2z_i^T P_i B_{i,i-1} z_{i-1} \leq \\ & -\lambda_{\min}(Q_i) \|z_i\|^2 + 2\lambda_{\max}(P_i) \|z_i\| \|f''_{ui}\| + \\ & 2\lambda_{\max}(P_i) \|z_i\| \|B_{i,i-1}\| \|z_{i-1}\| = \\ & -\|z_i\| \lambda_{\max}(P_i) (\mu_i \|z_i\| - 2\|f''_{ui}\| - 2\tau_{i-1} \|B_{i,i-1}\|). \end{aligned}$$

根据 Lyapunov 稳定定理, 当 $z_i \notin \Omega_i, \dot{V}_i < 0$ 时, 即可得式 (22). 因为

$$\|z\| = \left(\sum_{i=1}^r \|z_i\|^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^r \tau_i^2\right)^{1/2},$$

由式 (6) 和 (8) 可进一步推出原系统状态 x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 的收敛范围为

$$\Omega_x = \left\{x \in R^n : \|x\| \leq \|F_1 F_2\| \left(\sum_{i=1}^r \tau_i^2\right)^{1/2}\right\}. \quad \square$$

3 仿真研究

对于不确定多输入系统 (5), 有

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, f = \sin(2t) \begin{bmatrix} -0.1 \\ 0.1 \\ -0.1 \\ 0.1 \\ 0.1 \\ 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, d = \sin(2t) \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}.$$

系统初值 $x(0) = [10.94, 19.09, 27.03, 45.56, 31.39,$

$-16.68, -14.09]^T$. 设计矩阵

$$B_{1,0} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, N_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$N_3 = -0.6.$$

控制器设计参数为

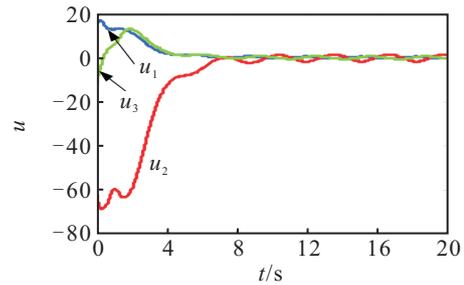
$$p_1 = p_2 = 5, q_1 = q_2 = 3, c_1 = \text{diag}(0.3, 0.3, 0.3),$$

$$c_2 = \text{diag}(0.8, 1, 0.7), \varepsilon = 10, \eta_1 = 20, \eta_2 = 80.$$

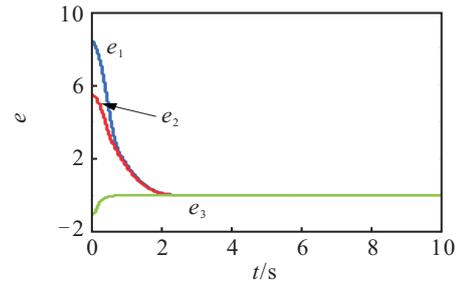
利用式 (3) 鲁棒微分器求得偏差 \dot{e}_i ($i = 1, 2, 3$) 的参数为

$$\lambda_{0e1} = 22, \lambda_{0e2} = \lambda_{0e3} = 15,$$

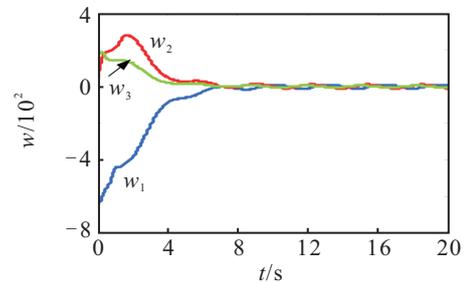
$$\lambda_{1e1} = \lambda_{1e2} = \lambda_{1e3} = 50.$$



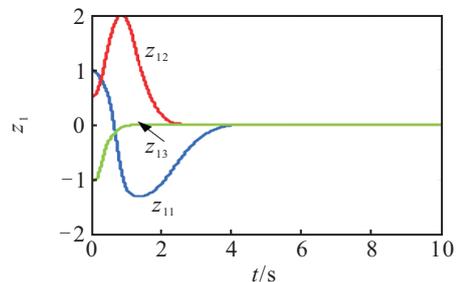
(a) 控制量 u



(b) 偏差状态 e



(c) 控制量 w



(d) 输入输出子系统状态 z_1

图 1 平滑 NTSM 控制器 u 和 w 设计

求得参考模型状态微分 \dot{z}_{zfi} ($i = 1, 2, 3$) 的参数为

$$\lambda_{0zf1} = 22, \lambda_{0zf2} = 15, \lambda_{0zf3} = 13,$$

$$\lambda_{1zf1} = \lambda_{1zf2} = \lambda_{1zf3} = 50.$$

图1为采用平滑NTSM方法设计的控制器 u 和 w 的仿真结果. 由图1可见, 控制信号 u 和 w 均平滑连续, 且分别驱使偏差状态 e (图1(b)) 和输入输出子系统状态 z_1 (图1(d)) 在有限时间收敛到零. 图2(a)为零动态子系统状态 z_2 和 z_3 的收敛曲线, 由式(21)利用LMI工具箱可分别求出其收敛域为 $\|z_2\| \leq 0.0710$, $\|z_3\| \leq 0.0533$. 图2(b)为原系统状态 x 的收敛曲线, 可进一步求出最大收敛范围为 $\|x\| \leq 4.4946$.

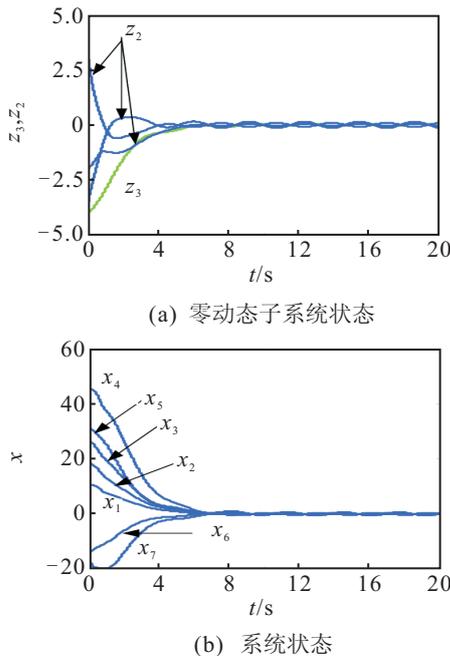


图2 零动态和系统状态的收敛曲线

4 结 论

针对NTSM存在的应用受限和抖振问题, 本文基于相对阶的概念提出一种改进的平滑NTSM方法. 人

为增加系统的相对阶, 从本质上解决抖振问题, 并将其拓展应用到相对阶为1的多输入不确定系统. 基于系统的能控性指数, 通过两次模型变换实现系统输入输出和内部状态解耦, 提出了一种模型参考自适应NTSM方法. 分析表明, 所提出的方法对多输入通道不确定性具有强鲁棒性, 并通过Lyapunov稳定理论建立了系统收敛域与非匹配外部扰动的数学关系.

参考文献(References)

- [1] Yu X H, Man Z H. Multi-input uncertain linear systems with terminal sliding-mode control[J]. Automatica, 1998, 34(3): 389-392.
- [2] David G L. Canonical forms for linear multivariable systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1967, 7: 290-293.
- [3] Feng Y, Yu X H, Man Z H. Non-singular adaptive terminal sliding mode control of rigid manipulators[J]. Automatica, 2002, 38(12): 2159-2167.
- [4] Utkin V I, Guldner J, Shi J X. Sliding mode control in electro-mechanical systems[M]. New York: CRC Press, 2009: 159-172.
- [5] Feng Y, Zheng J F, Yu X H, et al. Hybrid terminal sliding mode observer design method for a permanent magnet synchronous motor control system[J]. IEEE Trans on Industrial Electronics, 2009, 56(9): 3424-3431.
- [6] Feng Y, Han X W, Wang Y M, et al. Second-order terminal sliding mode control of uncertain multivariable systems[J]. Int J of Control, 2007, 80(6): 856-862.
- [7] Levant A. Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control[J]. Int J of Control, 2003, 76(9/10): 924-941.
- [8] Lukyanov A G, Utkin V I. Time-varying linear system decomposed control[C]. Proc of the American Conf. Pennsylvania, 1998: 2884-2888.

(责任编辑: 郑晓蕾)