

## 最优控制问题的 Legendre 伪谱法求解及其应用

徐少兵, 李升波, 成波

(清华大学汽车安全与节能国家重点实验室, 北京 100084)

**摘要:** 伪谱法通过全局插值多项式参数化状态和控制变量, 将最优控制问题(OCP)转化为非线性规划问题(NLP)进行求解, 是一类具有更高求解效率的直接法. 总结 Legendre 伪谱法转化 Bolza 型最优控制问题的基本框架, 推导 OCP 伴随变量与 NLP 问题 KKT 乘子的映射关系, 建立基于拟牛顿法的 LGL 配点数值计算方法, 并针对非光滑系统, 进一步研究分段伪谱逼近策略. 基于上述理论开发通用 OCP 求解器, 并对 3 个典型最优控制问题进行求解, 结果表明了所提出方法和求解器的有效性.

**关键词:** 最优控制; 伪谱法; 非线性规划; 数值求解

**中图分类号:** TP273.5

**文献标志码:** A

## Theory and application of Legendre pseudo-spectral method for solving optimal control problem

XU Shao-bing, LI Sheng-bo, CHENG Bo

(State Key Laboratory of Automotive Safety and Energy, Tsinghua University, Beijing 100084, China. Correspondent: LI Sheng-bo, E-mail: lishbo@mail.tsinghua.edu.cn)

**Abstract:** The pseudo-spectral method approximates control and state variables through global interpolation polynomials, then discrete the optimal control problem(OCP) to a nonlinear programming problem(NLP) effectively. It's a kind of direct method with higher solving efficiency. The basic framework of the Legendre pseudo-spectral method converting the Bolza OCP into NLP is summarized, and the mapping between the costates of OCP and the KKT multiplier to NLP is derived. Furthermore, a numerical method is elaborated based on the quasi-Newton method in order to calculate the LGL collocation accurately. The multiphase strategy is also being introduced for non-smooth systems. Finally, a universal optimal control solver POPS(pseudo-spectral optimal control problem solver) is developed based on the Legendre pseudo-spectral method in Matlab. Three typical optimal control problems are solved by using the solver POPS, and the results show the effectiveness of the proposed method and solver POPS.

**Key words:** optimal control; pseudo-spectral method; nonlinear programming; numerical implementation

### 0 引言

最优控制理论始于 20 世纪 50 年代, 先后建立了变分法、极大值原理等间接法和打靶法、配点法等直接法. 相对于间接法, 直接法无需推导一阶必要条件, 具有初值敏感度低、收敛半径大等优点<sup>[1-2]</sup>, 伪谱法属于一类典型的直接法. Elnagar 等<sup>[3]</sup>首次将伪谱法转化理论应用于动态系统的最优控制(OCP), 证明了该方法可以高效地将最优控制问题转化为非线性规划问题. Fahroo 等<sup>[4-7]</sup>对伪谱法的转化原理、收敛速度、求解效率等方面作了深入探究, 奠定了伪谱法求解最优控制问题的理论基础.

伪谱法的基本原理如下: 在正交配点处将连续最优控制问题离散化, 并通过全局插值多项式逼近状态和控制变量, 从而将 OCP 转化为非线性规划问题(NLP)<sup>[4,8-9]</sup>. 常用的伪谱法有 Gauss 伪谱法、Radau 伪谱法、Legendre 伪谱法、Chebyshev 伪谱法<sup>[10]</sup>, 积分方法分别对应于 LG 积分(Legendre-Gauss)、LGR 积分(Legendre-Gauss-Radau)、LGL 积分(Legendre-Gauss-Lobatto)和 CGL 积分(Chebyshev-Gauss-Lobatto). Ross 等<sup>[11]</sup>证明了 4 种伪谱法转化得到的 NLP 均以谱精度收敛于 OCP 的最优解. Lloyd<sup>[12]</sup>给出了不同函数的谱精度, 一般光滑函数的谱精度为  $O(N^{-m})$ , 函数越光

收稿日期: 2013-10-18; 修回日期: 2014-01-16.

基金项目: 国家自然科学基金项目(51205228); 清华大学自主科研计划项目(2012THZ0).

作者简介: 徐少兵(1989—), 男, 博士生, 从事最优控制、经济性驾驶与辅助的研究; 成波(1962—), 男, 教授, 博士生导师, 从事汽车智能安全技术、汽车人机工程等研究.

滑谱精度越高,针对具有无穷阶微分的函数,  $m$  可取任意整数,解析函数则具有更高的谱精度  $O(c^N)$  ( $0 < c < 1$ ),因此伪谱法的收敛速度远高于其他配点法. Huntington 等<sup>[13]</sup>详细比较了3种伪谱法的优劣,一般而言, Gauss 伪谱法和 Radau 伪谱法求解精度比较接近,在伴随状态估计方面略优于 Legendre 伪谱法. 实际上,3种方法在处理不同问题时各有优劣,求解效果与具体问题的特点密切相关. 文献[2]指出,针对末端非完全自由的最优控制问题, Legendre 伪谱法具有更好的收敛效果,特别是当末端约束为初始状态或终端状态的函数时, Gauss 和 Radau 伪谱法可能不收敛. 文献[14]阐述了无穷时域最优控制问题的伪谱法求解原理,其基本思想是将无穷时域转化到有限域  $[-1, 1]$ , 由于  $\tau = 1$  对应无穷大时间域,  $\tau = 1$  邻域为奇异弧段,此时 Radau 伪谱法更加适合. 伪谱法虽然已经开始应用于航天等领域,但是基础理论仍在不断发展,如 Divya 等<sup>[7]</sup>进一步对无穷时域转化方法进行改进,采用对数函数替代原来的线性转化函数,提高了计算精度和效率;文献[15]将 Legendre 伪谱法应用于线性反馈系统,重点证明了当控制变量不连续时可行解的存在性.

本文首先总结 Legendre 伪谱法求解 Bolza 型最优控制问题的基本框架,基于该框架推导 NLP 问题 KKT (Karush-Kuhn-Tucker) 乘子与最优控制问题伴随变量的映射关系;然后,为数值实现伪谱法求解,建立 LGL 配点、微分矩阵、积分权重的数值计算方法,并进一步阐述非光滑最优控制问题的分段逼近策略;最后,基于 Matlab 平台开发最优控制问题通用求解器 POPS (pseudo-spectral optimal control problem solver),利用3个典型的最优控制问题验证求解器的性能.

## 1 求解原理和计算框架

### 1.1 最优控制问题描述

Bolza 型最优控制问题一般描述为:求解最优控制律  $u(t) \in R^{N_u}$ ,使得系统从一个状态转移至另一状态过程中的性能函数最小,其数学描述为

$$\begin{aligned} \min J &= \phi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} G(x(t), u(t), t) dt; \\ \text{s.t. } \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), t), \\ \varphi(x(t_0), x(t_f), t_0, t_f) &= 0, \\ C_1(x(t), u(t), t) &= 0, \\ C_2(x(t), u(t), t) &\leq 0. \end{aligned} \quad (1)$$

其中:  $J \in R$  为性能指标,  $\phi \in R$  为 Mayer 型性能指标,  $G \in R$  为 Lagrange 型性能指标,  $t \in R$  为时间变量,  $x \in R^{N_x}$  为状态向量,  $u \in R^{N_u}$  为控制向量,  $f(\cdot) : R^{N_x} \times R^{N_u} \times R \rightarrow R^{N_x}$  为状态方程函数向量,  $\varphi : R^{N_x}$

$\times R^{N_x} \times R \times R \rightarrow R^{N_\varphi}$  为初始和终端约束函数向量,  $C_1 : R^{N_x} \times R^{N_u} \times R \rightarrow R^{N_{c_1}}$  和  $C_2 : R^{N_x} \times R^{N_u} \times R \rightarrow R^{N_{c_2}}$  分别为等式和不等式路径约束函数向量.

### 1.2 Legendre 伪谱法的基本框架

Legendre 伪谱法将状态和控制变量在 LGL 点离散,通过 Lagrange 插值多项式逼近状态和控制变量,从而将状态方程的微分运算和性能函数中的积分运算转化为代数运算,最终将 OCP 转化为以节点处的状态、控制变量为待优化参量的 NLP. 具体转化步骤如下.

Step 1: 时域变换. 将定义时域  $[t_0, t_f]$  转换到区间  $[-1, 1]$ , 以满足 Legendre 正交多项式的定义区间

$$\tau = \frac{2t - t_f - t_0}{t_f - t_0}, \tau \in [-1, 1]. \quad (2)$$

Step 2: 配点和离散化. Legendre 伪谱法配点为 LGL 点,即 Legendre 正交多项式一阶导数的根和  $\tau = -1, 1$  两点,等价于多项式  $(1 - \tau^2)\dot{P}_N(\tau)$  的根,其中  $N$  为 Legendre 正交多项式的阶数. LGL 配点共有  $N + 1$  个,记为  $\tau_i (i = 0, 1, \dots, N)$ . 将状态和控制变量在配点处离散,形成  $N + 1$  个离散状态变量  $\{X_0, X_1, \dots, X_N\}$  和  $N + 1$  个离散控制变量  $\{U_0, U_1, \dots, U_N\}$ . 其中:  $X_i \in R^{N_x}, U_i \in R^{N_u}$ .

利用 Lagrange 插值多项式逼近  $x(\tau)$  和  $u(\tau)$ , 有

$$\begin{aligned} x(\tau) &\approx X(\tau) = \sum_{i=0}^N L_i(\tau) X_i, \\ u(\tau) &\approx U(\tau) = \sum_{i=0}^N L_i(\tau) U_i, \end{aligned} \quad (3)$$

其中  $L_i(\tau)$  为 Lagrange 插值基函数,且有

$$L_i(\tau) = \prod_{j=0, j \neq i}^N \frac{\tau - \tau_j}{\tau_i - \tau_j}. \quad (4)$$

Step 3: 状态方程转化. 将状态变量通过插值多项式参数化后,对状态的微分运算可以近似为对插值基函数的微分运算,即

$$\dot{x}(\tau_k) \approx \dot{X}_k = \sum_{i=0}^N \dot{L}_i(\tau_k) X_i = \sum_{i=0}^N D_{ki} X_i. \quad (5)$$

其中:  $k = 0, 1, \dots, N$ ;  $D^{(N+1) \times (N+1)}$  为微分矩阵,表示各 Lagrange 基函数在各 LGL 配点处的微分值,具有明确的数学表达<sup>[2]</sup>,即

$$D_{ki} = \begin{cases} \frac{P_N(\tau_k)}{P_N(\tau_i)(\tau_k - \tau_i)}, & i \neq k; \\ -N(N+1)/4, & i = k = 0; \\ N(N+1)/4, & i = k = N; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (6)$$

由此可将状态方程约束转化为  $N + 1$  组 LGL 配点处的等式约束,有

$$\sum_{i=0}^N D_{ki} X_i - \frac{t_f - t_0}{2} f(X_k, U_k, \tau_k) = 0. \quad (7)$$

Step 4: 性能函数转化. 性能函数中积分项可通过 Gauss-Lobatto 积分方法转化, 转化后的性能函数为

$$J = \phi + \frac{t_f - t_0}{2} \sum_{i=0}^N w_i G(X_i, U_i, \tau_i), \quad (8)$$

其中  $w$  为积分权重, 定义<sup>[3]</sup>为

$$w_i = \int_{-1}^1 l_i(\tau) d\tau = \frac{2}{N(N+1)P_N^2(\tau_i)}. \quad (9)$$

性能函数的转化误差项<sup>[16,18]</sup>为

$$R_{N+1} = \frac{-(N+1)N^3 2^{2N+1} ((N-1)!)^4}{(2N+1)((2N)!)^3} G^{2N}(\xi), \quad (10)$$

其中  $\xi \in (-1, 1)$ . 由此可知, 若使用  $N+1$  个 LGL 配点, 则任意不高于  $2N-1$  阶多项式的积分误差均为 0, 因此, 从理论上讲, Gauss-Lobatto 积分代数精度可达  $2N-1$  次, 这种高效的积分方法是伪谱法精确求解的基础.

Step 5: 将 OCP 转为 NLP. 通过以上步骤, 原最优控制问题可以转化为以配点处控制变量、状态变量为待优化变量的 NLP 问题, 即

$$\begin{aligned} \min J &= \phi + \frac{t_f - t_0}{2} \sum_{i=0}^N w_i G(X_i, U_i, \tau_i); \\ \text{s.t. } &\left\| \sum_{i=0}^N D_{ki} X_i - \frac{t_f - t_0}{2} f(X_k, U_k, \tau_k) \right\|_{\infty} \leq \delta, \\ &\|\varphi(X_0, X_N, \tau_0, \tau_N)\|_{\infty} \leq \delta, \\ &\|C_1(X_k, U_k, \tau_k)\| \leq \delta, \\ &C_2(X_k, U_k, \tau_k) \leq 0, k, i = 0, 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (11)$$

实际求解中, 为了避免数值计算不稳定, 对等式约束引入松弛量  $\delta$ . 式 (11) 所述的 NLP 中, 待优化参数个数为  $(N_x + N_u) \times N$ . 对于末端时间自由的问题, 可将末端时间也作为待优化参量, 则待优化变量个数为  $(N_x + N_u) \times N + 1$ . 该转化框架具有较好的通用性, 转化得到的 NLP 属于高维稀疏问题<sup>[17]</sup>, 可选用成熟的稀疏 NLP 求解器进行求解, 如 SNOPT、IPOPT 等.

注意到, 对于  $N+1$  个 LGL 配点, 若控制变量、状态变量不高于  $N$  阶, 性能指标中被积函数不高于  $2N-1$  阶, 则 Lagrange 插值可精确逼近  $x$  和  $u$ , 且 Gauss-Lobatto 积分可精确转化性能函数, 此时伪谱法理论上可精确收敛于 OCP 的真实解.

### 1.3 伴随状态与 KKT 乘子映射关系

伴随状态是评估求解结果最优性的重要变量, 但伪谱法无法直接求解伴随状态. 文献 [4] 指出, NLP 的 KKT 乘子与 OCP 的离散伴随状态存在一定的映射关系, 从而可间接求解伴随状态. 下文将针对同时含有

初始和终端约束、等式和不等式约束的 Bolza 型问题推导其映射关系.

构造最优控制问题的哈密顿方程为

$$H = \frac{t_f - t_0}{2} G + \frac{t_f - t_0}{2} \lambda^T f + \mu_1^T C_1 + \mu_2^T C_2, \quad (12)$$

其中  $\lambda$ 、 $\mu_1$  和  $\mu_2$  为最优控制问题的伴随状态. 伴随方程为

$$\dot{\lambda}(\tau_k) = - \left( \frac{\partial H}{\partial x} \right) (\tau_k). \quad (13)$$

同时, 伴随状态  $\lambda$  的微分满足

$$\dot{\lambda}(\tau_k) = \sum_{i=0}^N D_{ki} \lambda(\tau_i). \quad (14)$$

综合式 (13) 和 (14), 得到

$$\begin{aligned} &\frac{t_f - t_0}{2} \left[ \frac{\partial G}{\partial x} + \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^T \lambda(\tau_k) \right] + \\ &\left( \frac{\partial C_1}{\partial x} \right)^T \mu_1(\tau_k) + \left( \frac{\partial C_2}{\partial x} \right)^T \mu_2(\tau_k) = \\ &- \sum_{i=0}^N D_{ki} \lambda(\tau_i). \end{aligned} \quad (15)$$

式 (11) 所述 NLP 的拉格朗日函数为

$$\begin{aligned} \tilde{J} &= \\ &\phi + \frac{t_f - t_0}{2} \sum_{i=0}^N w_i G_i + \tilde{v}^T \varphi + \\ &\sum_{i=0}^N \left[ \tilde{\lambda}_i^T \left( \frac{t_f - t_0}{2} f_i - \dot{X}_i \right) + \tilde{\mu}_{1i}^T C_{1i} + \tilde{\mu}_{2i}^T C_{2i} \right], \end{aligned} \quad (16)$$

其中  $\tilde{\lambda}$ 、 $\tilde{\mu}_1$ 、 $\tilde{\mu}_2$ 、 $\tilde{v}$  为 NLP 的 KKT 乘子. 由 KKT 条件可知

$$\frac{\partial \tilde{J}}{\partial X_k} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{J}}{\partial U_k} = 0, \quad C_{1k} = 0, \quad \tilde{\mu}_{2k}^T C_{2k} = 0. \quad (17)$$

首先, 考虑  $\tilde{J}$  对  $X_k (k = 1, 2, \dots, N-1)$  的偏微分, 有

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{J}}{\partial X_k} &= \\ &\frac{t_f - t_0}{2} \left[ \frac{\partial G_k}{\partial X_k} w_k + \left( \frac{\partial f_k}{\partial X_k} \right)^T \tilde{\lambda}_k \right] + \\ &\left( \frac{\partial C_{1k}}{\partial X_k} \right)^T \tilde{\mu}_{1k} + \left( \frac{\partial C_{2k}}{\partial X_k} \right)^T \tilde{\mu}_{2k} - \frac{\partial}{\partial X_k} \sum_{i=0}^N \tilde{\lambda}_i^T \dot{X}_i = 0, \end{aligned} \quad (18)$$

其中

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X_k} \sum_{i=0}^N \tilde{\lambda}_i^T \dot{X}_i &= \\ \sum_{i=0}^N \tilde{\lambda}_i^T \left( \frac{\partial}{\partial X_k} \sum_{n=0}^N D_{in} X_n \right) &= \sum_{i=0}^N D_{ik} \tilde{\lambda}_i. \end{aligned} \quad (19)$$

考虑到

$$\begin{cases} D_{ik} = D_{ki} = 0, i = k; \\ w_i D_{ik} = -w_k D_{ki}, i \neq k. \end{cases} \quad (20)$$

综合式 (18)~(20), 得到

$$\begin{aligned} & \frac{t_f - t_0}{2} \left[ \frac{\partial G_k}{\partial X_k} + \left( \frac{\partial f_k}{\partial X_k} \right)^T \frac{\tilde{\lambda}_k}{w_k} \right] + \left( \frac{\partial C_{1k}}{\partial X_k} \right)^T \frac{\tilde{\mu}_{1k}}{w_k} + \\ & \left( \frac{\partial C_{2k}}{\partial X_k} \right)^T \frac{\tilde{\mu}_{2k}}{w_k} = - \sum_{i=0}^N D_{ki} \frac{\tilde{\lambda}_i}{w_i}. \end{aligned} \quad (21)$$

比较式(21)和(15),若两式等价,则有

$$\lambda(\tau_k) = \frac{\tilde{\lambda}_k}{w_k}, \quad k = 1, 2, \dots, N-1. \quad (22)$$

式(22)为 $k = 1, 2, \dots, N-1$ 时 $\lambda(\tau_k)$ 与 $\tilde{\lambda}_k$ 的映射关系.当 $k = 0, N$ 时,对 $\lambda(t_0)$ 、 $\lambda(t_N)$ 推导其映射关系需要考虑函数 $\phi$ 和 $\varphi$ 的影响.考虑 $\tilde{J}$ 对 $X_0$ 的偏微分

$$\begin{aligned} & \frac{t_f - t_0}{2} \left[ \frac{\partial G_0}{\partial X_0} w_0 + \left( \frac{\partial f_0}{\partial X_0} \right)^T \tilde{\lambda}_0 \right] + \left( \frac{\partial C_{10}}{\partial X_0} \right)^T \tilde{\mu}_{10} + \\ & \left( \frac{\partial C_{20}}{\partial X_0} \right)^T \tilde{\mu}_{20} + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial X_0} \right)^T \tilde{v} - \sum_{i=0}^N D_{i0} \tilde{\lambda}_i = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

由于

$$D_{00} = -1/(2w_0), \quad w_i D_{i0} = -w_0 D_{0i}, \quad i \neq 0, \quad (24)$$

有

$$\sum_{i=0}^N D_{i0} \tilde{\lambda}_i = -w_0 \sum_{i=0}^N D_{0i} \frac{\tilde{\lambda}_i}{w_i} - \frac{\tilde{\lambda}_0}{w_0}. \quad (25)$$

综合式(23)~(25),可得

$$\begin{aligned} & \frac{t_f - t_0}{2} \left[ \frac{\partial G_0}{\partial X_0} + \left( \frac{\partial f_0}{\partial X_0} \right)^T \frac{\tilde{\lambda}_0}{w_0} \right] + \\ & \left( \frac{\partial C_{10}}{\partial X_0} \right)^T \frac{\tilde{\mu}_{10}}{w_0} + \left( \frac{\partial C_{20}}{\partial X_0} \right)^T \frac{\tilde{\mu}_{20}}{w_0} = \\ & - \sum_{i=0}^N D_{0i} \frac{\tilde{\lambda}_i}{w_i} - \frac{1}{w_0} \left( \tilde{\lambda}_0 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial X_0} \right)^T \tilde{v}_0 \right). \end{aligned} \quad (26)$$

$\tilde{J}$ 对 $X_N$ 的偏微分推导与 $X_0$ 类似,其结果为

$$\begin{aligned} & \frac{t_f - t_0}{2} \left[ \frac{\partial G_N}{\partial X_N} + \left( \frac{\partial f_N}{\partial X_N} \right)^T \frac{\tilde{\lambda}_N}{w_N} \right] + \\ & \left( \frac{\partial C_{1N}}{\partial X_N} \right)^T \frac{\tilde{\mu}_{1N}}{w_N} + \left( \frac{\partial C_{2N}}{\partial X_N} \right)^T \frac{\tilde{\mu}_{2N}}{w_N} = \\ & - \sum_{i=0}^N D_{Ni} \frac{\tilde{\lambda}_i}{w_i} + \frac{1}{w_N} \left( \tilde{\lambda}_N - \frac{\partial \phi}{\partial X_N} - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial X_N} \right)^T \tilde{v}_0 \right). \end{aligned} \quad (27)$$

通过将式(26)与(15)对比可知,若两式等价,则式(15)中含 $\lambda(t_0)$ 项与式(26)中含 $\tilde{v}_0$ 和 $\tilde{\lambda}_0$ 项构成等式关系,即 $\lambda(t_0)$ 同时取决于 $\tilde{v}_0$ 和 $\tilde{\lambda}_0$ .因此,若无新增加的求解条件,则无法建立 $\lambda(t_0)$ 与 $\tilde{\lambda}_0$ 的严格映射关系,该理论同样适用于 $\lambda(t_N)$ 和 $\tilde{\lambda}_N$ 的映射关系.针对此问题,一种解决方案是基于最优控制问题的横截条件新增加一组封闭条件,从而建立 $\lambda(\tau_0)$ 与 $\tilde{\lambda}_0$ 和 $\tilde{v}_0$ 之间、 $\lambda(\tau_N)$ 与 $\tilde{\lambda}_N$ 和 $\tilde{v}_N$ 之间的映射关系<sup>[19]</sup>.新增的封闭条件为

$$\begin{aligned} & \frac{\tilde{\lambda}_0}{w_0} + \left( \frac{\partial \varphi_0}{\partial X_N} \right)^T \tilde{v}_0 = 0, \\ & \frac{\tilde{\lambda}_N}{w_N} - \frac{\partial \phi}{\partial X_N} - \left( \frac{\partial \varphi_f}{\partial X_N} \right)^T \tilde{v}_f = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

通过增加封闭条件(28),得到 $k = 0, N$ 时的映射关系

$$\lambda(t_0) = \frac{\tilde{\lambda}_0}{w_0}, \quad \lambda(t_N) = \frac{\tilde{\lambda}_N}{w_N}. \quad (29)$$

考虑 $\tilde{J}$ 对 $U_k(k = 0, 1, \dots, N)$ 的偏微分,类似推导可得

$$\mu_1(t_k) = \tilde{\mu}_{1k}/w_k, \quad \mu_2(t_k) = \tilde{\mu}_{2k}/w_k. \quad (30)$$

综上,式(22)、(29)和(30)建立了NLP的KKT乘子与OCP伴随状态的映射关系,为伴随状态的间接计算提供了理论依据.

#### 1.4 配点、积分权重、微分矩阵的数值计算

在Legendre伪谱法的数值实现中,必须高精度求解LGL配点.由于多项式 $\dot{P}_N(\tau)$ 的根没有明确的解析表达,通过构造Legendre多项式直接求解 $\dot{P}_N(\tau)$ 的根精度较低,难以满足数值计算要求.针对该问题,本文结合Legendre多项式的迭代特性,通过拟牛顿法实现 $\dot{P}_N(\tau)$ 根的迭代求解.

拟牛顿法包括迭代初值选取和迭代规律设计.为了快速求得 $N+1$ 阶多项式 $g(z) = (1-z^2)\dot{P}_N(z)$ 的根,迭代初值选择具有明确数学表达的 $N$ 阶Chebyshev多项式的极点(包括第1类、第2类极点),有

$$z_k = \cos\left(\frac{\pi k}{N}\right), \quad k = 0, 1, \dots, N. \quad (31)$$

拟牛顿法的基本迭代规律为

$$z_{n+1} = z_n - \frac{g(z_n)}{(g(z_n) - g(\bar{z}))/\Delta z}, \quad (32)$$

其中 $\bar{z}$ 为 $g(z)$ 的理论根.由于 $g(\bar{z}) \equiv 0$ ,式(32)可简化为

$$z_{n+1} = z_n - \Delta z, \quad (33)$$

其中 $\Delta z$ 可根据Legendre多项式的递推性质进行构造.Legendre多项式与其导数满足递推关系

$$z\dot{P}_N(z) - \dot{P}_{N-1}(z) = NP_N(z). \quad (34)$$

进而可构造

$$\begin{aligned} \Delta z &= \frac{zP_N(z) - P_{N-1}(z)}{z\dot{P}_N(z) - \dot{P}_{N-1}(z)} = \\ & \frac{zP_N(z) - P_{N-1}(z)}{NP_N(z)}. \end{aligned} \quad (35)$$

式(35)需要计算 $P_N(z)$ 、 $P_{N-1}(z)$ 的值,可通过Legendre多项式的迭代关系计算,有

$$\begin{aligned} P_{m+1}(z) &= \\ & \frac{2m+1}{m+1} zP_m(z) - \frac{m}{m+1} P_{m-1}(z). \end{aligned} \quad (36)$$

至此形成LGL配点的迭代计算方法.

Step 1: 由式(31)确定初值.

Step 2: 针对每个配点,迭代循环,步骤记为 $n$ .

Step 2.1: 递推计算 $P_N(z)$ 和 $P_{N-1}(z)$ ,其中初值

为  $P_1(z_n) = 1, P_2(z_n) = z_n$ . 通过式 (36) 递推计算  $P_m(z_n), m = 3, 4, \dots, N$ ;

Step 2.2: 通过式 (33) 和 (35) 迭代计算  $z_{n+1}$ .

Step 3: 当  $e = \max(|z_{n+1} - z_n|) < \varepsilon$  时, 退出循环.

利用该方法计算 500 个配点, 当  $\varepsilon$  设置为  $10^{-16}$  时, CPU 耗时仅 35 ms (Matlab 平台, 主频 3.2 G), 表明该方法可满足计算要求.

Legendre 伪谱法中, 在精确求解配点  $z$ 、构造  $P_N(z)$  的基础上, 可通过式 (6) 计算微分矩阵, 通过式 (9) 计算积分权重.

## 2 非光滑问题分段伪谱逼近策略

由伪谱法的原理可知, 伪谱法对于连续光滑问题收敛速度较快, 但对于非光滑问题的谱精度较低, 大量增加配点会降低计算效率. 解决该问题可采用分段逼近策略<sup>[20]</sup>, 其基本思想为: 针对非光滑问题的特点, 将原问题分为多段, 每段内分别采用伪谱法转化, 段与段之间根据需要增加连接约束, 从而将非光滑问题转化为多段光滑问题的组合.

对于分段位置已知的最优控制问题, 分段逼近策略简洁明晰. 若原问题在  $\{T_1, T_2, \dots, T_{P-1}\}$  处分段, 则可将问题转化为  $P$  段光滑问题, 每段分别设置不同的性能函数、状态方程、路径约束. 性能函数为各段性能指标的综合, 记为

$$J = \phi + \sum_{p=1}^P \frac{t_f^p - t_0^p}{2} \sum_{k=0}^N w_k^p G^p(X_k^p, U_k^p, \tau_k^p, t_0^p, t_f^p). \quad (37)$$

两段之间可根据问题特点设置连接约束, 如对于 bang-bang 控制系统, 设置两段之间状态变量必须连续, 控制变量可存在跳变. 将连接约束记为

$$C_3(X_f^i, U_f^i, t_f^i, X_0^j, U_0^j, t_0^j) = 0, \quad 1 \leq i, j \leq P. \quad (38)$$

然而, 实际最优控制问题中, 大多分段点是未知的, 解决该问题可采取两类处理策略:

1) 将分段位置也作为优化参数, 通过后续优化得到具体的分段点. 该方法从计算角度而言, 增加了 NLP 问题的复杂程度, 一般只适用于分段点个数较少的低维问题.

2) 先通过伪谱法全局计算问题一次, 通过计算结果辨识出状态或控制的突变区域, 将该区域作为单独的一段形成多段问题.

基于第 2 类策略, 设计如下算法.

Step 1: 通过伪谱法全局初步计算.

Step 2: 在初步计算的基础上, 通过微分矩阵计算各维控制变量的变化率  $\dot{U} = DU$ .

Step 3: 设置控制变量变化率阈值向量  $H$ , 对于

任意维度  $j (j = 1, 2, \dots, N_u)$ , 任意  $i \in [m_1, m_2] \in (0, N)$ , 若存在  $\dot{U}_{ji} > H_j$ , 则将时域  $[\tau_{m_1-1}, \tau_{m_2+1}]$  作为突变区域, 并将该区域作为新的一段.

Step 4: 对形成的多段问题增加突变区域配点个数以提高计算精度, 适当减少光滑区域配点个数以提高计算效率, 通过对多段问题再次计算得到新的最优解.

该方法本质上是对最优解不同区域差别化设置配点密度. 对于光滑区域, 设置较少的配点即可达到较好的精度; 对于非光滑区域, 需要设置较多的配点以提高谱精度. 因此, 在相同精度的要求下, 该方法相对全局计算可降低配点个数, 从而提高计算效率.

## 3 算法实现和应用

基于上述算法, 本文在 Matlab 平台上开发了最优控制问题的通用求解器 POPS, 主要由 4 部分组成:

1) 面向使用者的问题设置部分;

2) OCP 转 NLP 部分, 基于伪谱法转化原理, 将问题离散化并转化为标准的 NLP;

3) 求解 NLP 部分; 4) 优化结果标准形式输出.

POPS 可用于求解具有如下特征的最优控制问题:

1) 光滑或非光滑;

2) 初始/终端状态、终端时间存在约束, 或者自由、固定;

3) 存在非线性路径约束、微分形式和积分形式约束.

为检验求解器的有效性, 选择如下 3 个典型最优控制问题进行求解.

### 3.1 低阶线性最优控制问题

例 1 简化的卫星姿态控制问题, 其性能函数为标准二次型, 控制变量存在边界约束, 数学描述如下:

$$\begin{aligned} \min J &= \int_0^2 \frac{1}{2} u^2 dt; \\ \text{s.t. } \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad |u| \leq 2, \\ x(0) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x(2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (39)$$

为验证求解器对连续光滑问题的求解性能, 忽略控制变量的边界约束, 通过变分法可知问题的理论解为

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 0.5t^3 - 1.75t^2 + t + 1, \\ x_2(t) &= 1.5t^2 - 3.5t + 1, \\ u(t) &= 3t - 3.5, \quad J_{\min} = 3.25. \end{aligned} \quad (40)$$

通过 POPS 求解器求解, 设置配点个数为 50, 计算结果见图 1 ( $x_1, x_2, u$ ). 性能指标为 3.249 999 998 98,

相对理论值 3.25 的误差小于  $10^{-8}$ . 理论上, 该问题最优控制律为三次多项式, 其四次导数恒等于 0, 伪谱法最少通过 4 个配点即可精确逼近. 表 1 为不同配点个数的计算精度和耗时. 结果表明, 点数大于等于 4 时, 性能指标均可以以  $10^{-8}$  逼近理论解, 但耗时随配点个数的增加而快速增加.

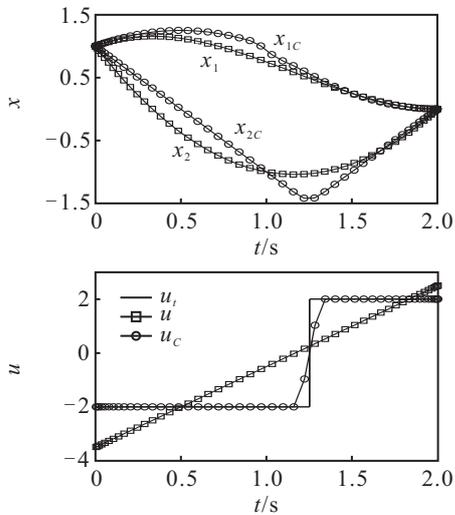


图 1 卫星姿态控制问题求解结果

表 1 不同配点求解精度和效率

配点	$u$ 无约束		$u$ 有约束	
	$e(J_{\min})$	耗时/s	$J_{\min}$	耗时/s
3	1.67	0.078	-	-
4	2.04e-09	0.08	-	-
10	2.08e-09	0.13	3.11	0.099
50	1.01e-09	0.84	3.82	0.28
150	1.55e-09	17.61	3.94	1.81
300	-2.60 e-09	104.19	3.97	8.97
理论 $J$	3.25		4.00	-

考虑控制变量的边界约束, 由极大值原理可知理论解为具有一次切换的 bang-bang 控制, 即

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= \begin{cases} -t^2 + t + 1, & t < 1.25; \\ t^2 - 4t + 4, & t \geq 1.25. \end{cases} \\
 x_2(t) &= \begin{cases} -2t + 1, & t < 1.25; \\ 2t - 4, & t \geq 1.25. \end{cases} \\
 u(t) &= \begin{cases} -2, & t < 1.25; \\ 2, & t \geq 1.25. \end{cases} \\
 J_{\min} &= 4. \tag{41}
 \end{aligned}$$

通过 POPS 求解器求解, 设置配点个数为 50, 计算结果如图 1 所示 ( $x_{1C}, x_{2C}, u_C$ ), 其中  $u_t$  为控制量理论解, 性能指标为 3.815 749 6. 选择不同配点计算结果如表 1 所示. 结果表明, 对于最优控制律存在跳变的非光滑问题, 伪谱法无法严格精确逼近, 增加配点数目可在一定程度上提高求解精度, 但同时也会带来计算量的增加.

若采用多段逼近策略, 则首先利用 30 个配点初步计算, 控制变量变化率如图 2 所示. 根据变化率将原问题分为 3 段处理, 配点个数分别设置为 8、25、8, 新配点 (NP) 与原先配点 (OP) 见图 2. 计算结果显示, 性能指标为 3.969 4, 精度与全局 300 个配点计算结果一致, 而计算耗时仅 0.41 s, 远小于 300 个配点的计算耗时 8.97 s. 在光滑区域和突变区域选择不同的配点密度虽然并未从机理上避免谱方法对非光滑问题谱精度较低的缺陷, 但可以在一定精度要求下降低配点个数, 并提高计算效率.

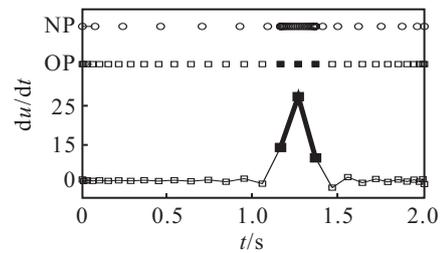


图 2 控制变量变化率和配点位置

### 3.2 高阶非线性最优控制问题

例 2 典型的飞行器轨迹优化问题<sup>[21-22]</sup>, 描述了飞行器运动过程中位移、速度、角度、角速度之间的关系, 其数学描述如下:

$$\begin{aligned}
 \min J &= -r(t_f); \\
 \text{s.t. } \dot{r} &= v_r, \quad \dot{\theta} = v_\theta/r, \quad \dot{v}_r = v_\theta^2/r - \mu/r^2 + a \sin \beta, \\
 \dot{v}_\theta &= -v_r v_\theta/r + a \cos \beta, \\
 (r, \theta, v_r, v_\theta)_{t_0=0} &= (1, 0, 0, 1), \\
 (v_r, v_\theta)_{t_f} &= (0, (\mu/r_{t_f})^{0.5}), \quad a = T/(m_0 - |\dot{m}|t). \tag{42}
 \end{aligned}$$

其中:  $\mu = 1, T = 0.1405, m_0 = 1, |\dot{m}| = 0.0749, t_f = 3.32$ . 由数学描述可知, 该问题具有强非线性和时变特性, 通过一阶必要条件构造两点边值问题进行求解过于繁琐, 难以得到理论最优解.

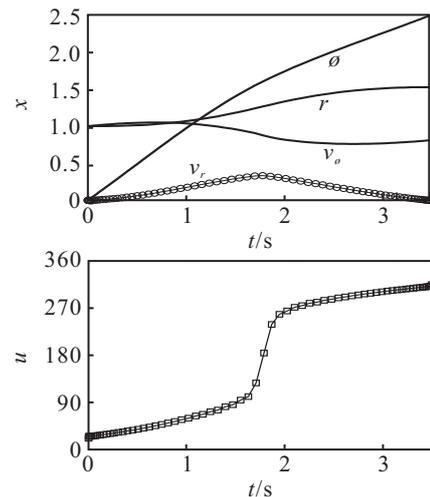


图 3 飞行器轨迹优化问题求解结果

通过 POPS 求解器求解, 设置配点个数为 70, 状态和控制变量求解结果如图 3 所示, 最优性能指标求解结果为  $-1.525\ 27$ , 与文献 [23] 中 DIDO 求解器求解结果 ( $-1.525$ ) 一致. 对该例的精确求解进一步表明了伪谱法在求解复杂最优控制问题中的优势和本文所开发的求解器的有效性.

### 3.3 非光滑最优控制问题

例 3 两段铰接机械臂轨迹控制问题为典型的多次切换 bang-bang 控制系统<sup>[24]</sup>, 其描述如下:

$$\begin{aligned} \min J &= t_f; \\ \text{s.t. } g_1 &= \sin(x_3) \left( \frac{9}{4} \cos(x_3) x_1^2 + 2x_2^2 \right) + \\ &\quad \frac{4}{3} (u_1 - u_2) - \frac{3}{2} \cos(x_3) u_2, \\ g_2 &= - \left( \sin x_3 \left( \frac{7}{2} x_1^2 + \frac{9}{4} \cos(x_3) x_2^2 \right) - \right. \\ &\quad \left. \frac{7}{3} u_2 + \frac{3}{2} \cos(x_3) (u_1 - u_2) \right), \\ g_3 &= \frac{31}{36} + \frac{9}{4} \sin^2(x_3), \\ \dot{x}_1 &= g_1/g_3, \dot{x}_2 = g_2/g_3, \dot{x}_3 = x_2 - x_1, \\ \dot{x}_4 &= x_1, \quad -1 \leq u_1, u_2 \leq 1, \\ x(0) &= [0 \ 0 \ 0.5 \ 0]^T, x(t_f) = [0 \ 0 \ 0.5 \ 0.522]^T. \end{aligned} \tag{43}$$

由数学描述可知, 性能函数为时间最优, 状态方程结构复杂且具有强非线性, 控制变量受边界约束, 通过极大值原理难以判断极值弧的切换结构. 以往文献大多采用动态规划法求解, 但该方法存在效率低、维数灾难等不足. 下面基于 POPS 求解器的多段逼近策略进行求解. 首先利用 POPS 求解器全局求解, 设置配点个数为 40, 求解结果显示, 最短时间为  $2.988\ 659\ \text{s}$ , 与文献 [25] 结果  $2.988\ 662\ \text{s}$  一致. 状态变量和控制变量求解结果如图 4 所示.

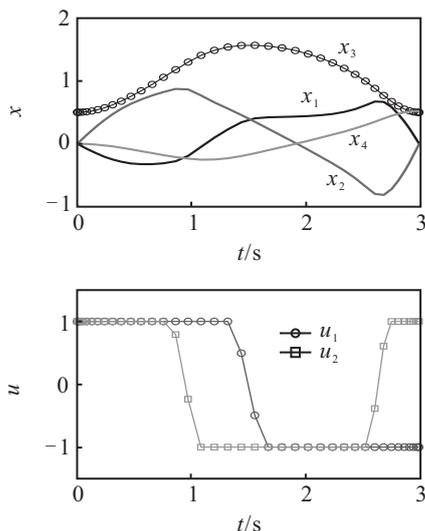


图 4 机器臂轨迹控制问题求解结果

由于最优控制律为多次切换的 bang-bang 控制, 可将该问题转化为多段最优控制问题处理. 图 5 为初步计算得到的控制变量变化率. 由图 5 可见, 时间域  $[0.86, 1.08]$ 、 $[1.32, 1.67]$ 、 $[2.52, 2.74]$  对应的控制变量变化较为剧烈, 可将其作为突变区域, 从而将该问题分为 7 段. 设置突变区域配点个数为 15, 平滑区域配点个数为 8, 共 77 个配点, 状态变量  $x_1$ 、 $x_2$  和控制变量  $u_1$  的求解结果如图 6 所示. 性能指标为  $2.983\ 10$ , 这一结果与全局 110 个配点的计算结果  $2.983\ 12$  一致. 该问题的求解表明, 光滑区域采用较少配点即可达到一定的精度, 因此针对非光滑区域提高配点密度比提高全局配点密度具有更好的针对性.

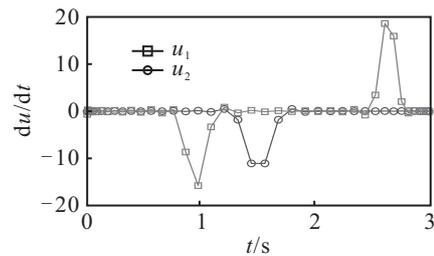


图 5 控制变量变化率

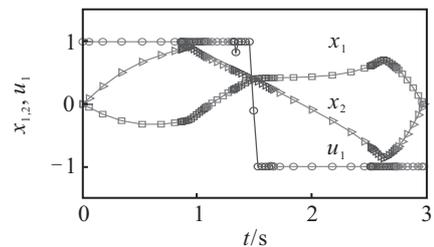


图 6 机器臂轨迹控制问题多相处理结构

## 4 结 论

相对传统配点法, 伪谱法是一种具有更高计算效率和精度的全局配点法. 本文总结了 Legendre 伪谱法将 OCP 转化为 NLP 的基本框架, 在此基础上推导了 Bolza 型最优控制问题伴随状态与非线性规划问题 KKT 乘子的映射关系, 即对于非边界配点, 伴随状态值等于 KKT 乘子除以对应配点处积分权重, 对于边界配点, 在增加封闭条件的基础上同样满足上述关系. 为数值实现 Legendre 伪谱法, 结合拟牛顿法和 Legendre 多项式的迭代特性, 建立了 LGL 配点求解算法, 从而实现配点、微分矩阵、积分权重的高效计算. 对于非光滑最优控制问题, 阐述了分段逼近策略求解过程, 其通过控制变量变化率检测突变区域, 并对突变和光滑区域差别化设置配点密度以提高计算效率. 最后, 在 Matlab 平台上开发了 Legendre 伪谱法的最优控制问题求解器 POPS, 并对 3 个典型最优控制问题进行求解, 表明了所提出方法和求解器的应用价值.

## 参考文献(References)

- [1] Benson D. A Gauss pseudospectral transcription for optimal control[D]. Cambridge: Massachusetts Institute of Technology, 2005: 19-24.
- [2] Fahroo F, Ross I M. Advances in pseudospectral methods for optimal control[C]. AIAA Guidance, Navigation and Control Conf and Exhibit. Honolulu: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2008: 18-21.
- [3] Elnagar G, Kazemi M A, Razzaghi M. The pseudospectral Legendre method for discretizing optimal control problems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1995, 40(10): 1793-1796.
- [4] Fahroo F, Ross I M. Costate estimation by a Legendre pseudospectral method[J]. J of Guidance, Control and Dynamics, 2001, 24(2): 270-277.
- [5] Gong Q, Kang W, Bedrossian N S, et al. Pseudospectral optimal control for military and industrial applications[C]. The 46th IEEE Conf on Decision and Control. New Orleans: IEEE, 2007: 4128-4142.
- [6] Ross I M, Fahroo F. Pseudospectral knotting methods for solving nonsmooth optimal control problems[J]. J of Guidance, Control and Dynamics, 2004, 27(3): 397-405.
- [7] Garg D, Hager W W, Rao A V. Pseudospectral methods for solving infinite-horizon optimal control problems[J]. Automatica, 2011, 47(4): 829-837.
- [8] Ross I M, Fahroo F. A direct method for solving nonsmooth optimal control problems[C]. The 15th Triennial World Congress. Barcelona: International Federation of Automatic Control, 2002.
- [9] Kang W, Ross I M, Gong Q. Pseudospectral optimal control and its convergence theorems[M]. Analysis and Design of Nonlinear Control Systems. Berlin: Springer, 2008: 109-124.
- [10] Garg D, Patterson M, Hager W W, et al. A unified framework for the numerical solution of optimal control problems using pseudospectral methods[J]. Automatica, 2010, 46(11): 1843-1851.
- [11] Ross I M, Fahroo F. Convergence of pseudospectral discretizations of optimal control problems[C]. The IEEE 40th Conf on Decision and Control. Orlando: IEEE, 2001: 3175-3177.
- [12] Trefethen L N. Spectral methods in Matlab[M]. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2000: 5-60.
- [13] Huntington G T, Benson D, Rao A V. A comparison of accuracy and computational efficiency of three pseudospectral methods[C]. Proc of the AIAA Guidance, Navigation and Control Conf. Hilton Head: AIAA, 2007: 1-25.
- [14] Fahroo F, Ross I M. Pseudospectral methods for infinite-horizon nonlinear optimal control problems[J]. J of Guidance, Control and Dynamics, 2008, 31(4): 927-936.
- [15] Ross I M, Fahroo F. Issues in the real-time computation of optimal control[J]. Mathematical And Computer Modelling, 2006, 43(9): 1172-1188.
- [16] Dirk P Laurie. Computation of Gauss-type quadrature formulas[J]. J of Computational and Applied Mathematics, 2001, 127(1): 201-217.
- [17] Patterson M A, Rao A. Exploiting sparsity in direct collocation pseudospectral methods for solving optimal control problems[J]. J of Spacecraft and Rockets, 2012, 49(2): 354-377.
- [18] Alfio Q, Riccardo S, Fausto S. Numerical mathematics[M]. New York: Springer-Verlag, 2000: 422-425.
- [19] Ross I M, Fahroo F. Legendre pseudospectral approximations of optimal control problems[C]. New Trends in Nonlinear Dynamics and Control and their Applications. Berlin: Springer, 2003: 327-342.
- [20] Gong Q, Fahroo F, Ross I M. Spectral algorithm for pseudospectral methods in optimal control[J]. J of Guidance, Control, and Dynamics, 2008, 31(3): 460-471.
- [21] Moyer H G, Pinkham G. Several trajectory optimization techniques, Part II: Application[R]. Grumman Aircraft Engineering Corp Bethpage NY, 1963.
- [22] Hager W W. Runge-Kutta methods in optimal control and the transformed adjoint system[J]. Numerische Mathematik, 2000, 87(2): 247-282.
- [23] Strizzi J, Ross I M, Fahroo F. Towards real-time computation of optimal controls for nonlinear systems[C]. Proc of the AIAA Guidance, Navigation and Control Conf. Monterey, 2002: 5-8.
- [24] Luus R. Iterative dynamic programming[M]. New York: CRC Press, 2010: 241-243.
- [25] Becerra V M. PSOPT optimal control solver user manual[R]. United Kingdom, 2010: 294-300.

(责任编辑: 郑晓蕾)