

## 基于平均单调博弈广义解的收益再分配模型

李翠<sup>1,2</sup>, 薛昱<sup>3</sup>, 王文胜<sup>4</sup>

(1. 西安理工大学 经济与管理学院, 西安 710048; 2. 西安财经学院 信息学院, 西安 710100;  
3. 北京信息控制研究所 研究生管理部, 北京 100037; 4. 西北工业大学 自动化学院, 西安 710072)

**摘要:** 对经典合作博弈的核心及谈判集解进行延拓, 定义了广义核心及广义谈判集的概念, 提出广义比例分配模型及简化博弈模型, 探讨了平均单调博弈与广义简化博弈的对应关系以及广义比例分配与广义核心解的包含关系, 证明了平均单调博弈广义核心解与谈判集解的等价性质. 研究结果丰富了对合作博弈解的研究及其在收益再分配领域中的应用需求, 说明了平均单调博弈广义核心解的非空性, 进而保证了其最优再分配方案的存在性.

**关键词:** 简化博弈; 平均单调博弈; 广义核心; 广义谈判集; 再分配

中图分类号: O225

文献标志码: A

## Model of profit reallocation based on generalized solution in average monotonic game

LI Cui<sup>1,2</sup>, XUE Yu<sup>3</sup>, WANG Wen-sheng<sup>4</sup>

(1. School of Economics and Management, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China; 2. School of Information, Xi'an University of Finance and Economics, Xi'an 710100, China; 3. Graduate Management Department, Beijing Institute of Information Control, Beijing 100037, China; 4. School of Automation, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China. Correspondent: LI Cui, E-mail: bxdlicui@163.com)

**Abstract:** The core and bargaining set of classical cooperative game are expanded, and the generalized core and bargaining set are defined. The models of the generalized proportional distribution and the reduced game are provided, the correspondence between average monotonic game and generalized reduced game is discussed, and the inclusion relationship between generalized proportional distribution and generalized core is provided. The equivalence property of the generalized core and bargaining set in average monotonic game is proved. The result not only enriches the study of solutions in cooperative game and application requirements in the field of profit reallocation, but also provides the nonempty property of the generalized core in the average monotonic game, which indicates that the optimal reallocation scheme is existent.

**Keywords:** reduced game; average monotonic game; generalized core; generalized bargaining set; reallocation

## 0 引言

随着博弈论的发展, 合作博弈及其解集在各种联盟收益分配领域中已具有广泛的应用价值<sup>[1-3]</sup>. 目前, 对合作博弈的研究热点仍是如何定义某种解的概念或某一类博弈模型, 前人对合作博弈所做的研究大都是在传统解的意义下将合作博弈的总收益值一次性全部分配给所有参与者, 较少考虑收益再分配问题. 在实际应用中, 很多情况需要保留一部分收益, 即只分配总收益值的一部分, 几乎所有企业联盟都会倾向于保留一部分收益以利于再发展.

合作博弈主要研究的是参与者如何构成联盟, 联盟的总收益如何进行最优分配的问题. 也可将合作博弈描述为各参与者进行相互谈判的过程, 参与者之间通过谈判达成一致意见, 进而组建联盟. 合作博弈的核心解诠释了联盟中的每一个成员通过合作获得的收益不会少于其单独行动时所获得的收益. 谈判集是参与者之间针对谈判议题而提出的一种解集. 本文提出广义核心及广义谈判集作为经典合作博弈相应解的拓展, 通过系数  $r$  的调整实现对博弈  $(N, v)$  总收益值  $v(N)$  的部分保留, 解决收益再分配问题, 并对平均

收稿日期: 2013-11-05; 修回日期: 2014-04-11.

基金项目: 国防基础科研项目基金项目(A0420131501); 全国统计科学研究计划项目(2013LY069); 陕西省教育厅专项科研计划项目(14JK1274).

作者简介: 李翠(1979—), 女, 讲师, 博士, 从事博弈论、知识管理等研究; 薛昱(1990—), 男, 博士生, 从事系统工程、知识管理的研究.

单调博弈的广义核心和广义谈判集解的等价关系进行刻画.

### 1 平均单调博弈及其广义核心解

在合作博弈中,可转移效用(T.U.)博弈的特征函数为  $v: 2^N \rightarrow R$ ,它描述了无论其他参与者可能采取何种行动,当决定合作时,每个参与者能够获得的最大收益或最小成本.平均单调博弈作为一种可转移效用合作博弈,覆盖了大多数能获得递增平均收益的经济情况.广义地讲,如果一个正的非零向量  $\alpha \in R_+^n \setminus \{0\}$  存在,则博弈特征函数表明了关于  $\alpha$  的递增平均值.

基于递增平均值的概念, Sprumont<sup>[4]</sup>提到了两种类型的博弈: 1) 递增平均值博弈, 即  $(v(S)/|S|) \leq (v(T)/|T|), \forall S \subseteq T$ ; 2) 递增相对值博弈, 即

$$\left( v(S) / \sum_{i \in S} v(\{i\}) \right) \leq \left( v(T) / \sum_{i \in T} v(\{i\}) \right), \forall S \subseteq T.$$

实际上, 如果对第 1) 种博取得  $\alpha = (1, 1, \dots, 1)$ , 对第 2) 种博取得  $\alpha = (v(\{1\}), v(\{2\}), \dots, v(\{n\}))$ , 则这两种博弈都属于平均单调博弈.

对于  $n$  人合作博弈, 令  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  为所有参与者的集合, 其中  $N$  的任意非空子集称为联盟<sup>[5]</sup>.  $n$  人合作博弈是一个二元偶  $(N, v)$ , 其中  $v: 2^N \rightarrow R$  为一实值函数, 博弈的特征函数满足:

1) 空性.  $v(\emptyset) = 0$ .

2) 超可加性. 如果  $S \cup T = \emptyset$ , 则  $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$ .

关于参与者集合  $N$  的合作博弈的集合可记为  $G^N$ .

令  $R^N$  代表实值向量  $x$  的空间, 有

$$x = (x_i)_{i \in N}, R_+^N = \{x \in R^N; x_i \geq 0, \forall i \in N\},$$

$$x(S) = \sum_{i \in S} x_i, x(\emptyset) = 0, x|_S = (x_i)_{i \in S}.$$

**定义 1** 令  $r$  和  $c_i (1 \leq i \leq n)$  为实数, 且满足  $0 < r \leq 1, 0 < c_i \leq 1 (1 \leq i \leq n), r \geq \max\{c_i : i \in N\} \geq \max\{c_i : i \in S\}, \forall S \subseteq N$ . 合作博弈的一个广义转归即为一个收益分配向量  $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , 满足

$$\sum_{i \in N} x_i = x(N) = r \cdot v(N), r \geq \max\{c_i : i \in N\}; \quad (1)$$

$$x_i \geq c_i \cdot v(\{i\}), i \in N. \quad (2)$$

式(1)说明, 结合实际情况, 通过调整系数  $r$  可实现保留博弈总收益值的一部分用于再分配或再发展, 而不是一次性全部分完; 式(2)说明, 每个参与者加入联盟获得的收益都不少于单独行动时的收益. 此外,  $r \geq \max\{c_i : i \in N\}$  是使式(1)和(2)保持一致的必要条件.

令  $I^*(v, r, c) = \{x \in R^N | x(N) = r \cdot v(N)\}$  为有效向量集, 称作广义预转归集, 实现对博弈  $(N, v)$  总值  $v(N)$  的部分保留, 进而用于再分配. 令  $I(v, r, c) = \{x \in I^*(v, r, c) | x_i \geq c_i \cdot v(i), i = 1, 2, \dots, n\}$  为博弈  $v$  的广义转归集.

**定义 2** 令  $C(v, r, c)$  为博弈  $v$  的广义核心, 记为  $C(v, r, c) = \{x \in I(v, r, c) | x(S) \geq \max\{c_i : i \in S\} \cdot v(S), \forall S \subseteq N\}$ . 换言之, 在单调合作博弈  $(N, v)$  中, 当且仅当下式成立时, 向量  $x$  为  $(N, v)$  的广义核心:

$$\sum_{i \in N} x_i = r \cdot v(N), \quad (3)$$

$$\sum_{i \in S} x_i \geq \max_{i \in S} c_i \cdot v(S). \quad (4)$$

其中:  $\forall S \subseteq N, r = \max_{i \in N} c_i \geq \max_{i \in S} c_i$ . 如果博弈  $v$  具有广义核心, 则称  $v$  是均衡的; 如果博弈所有的子博弈均有广义核心, 则称该博弈是完全均衡的.

给定博弈  $(N, v)$ , 如果满足  $v(S) \leq v(T), \forall S \subseteq T$ , 则称  $v$  为单调的<sup>[6]</sup>. 平均单调博弈属于单调博弈的子类, 记为  $AMG^N$ .

**定义 3** 设博弈  $(N, v)$  是平均单调的, 当且仅当

$$v(S) \geq 0, \forall S \subseteq N, \quad (5)$$

且存在向量  $\alpha \in R_+^N \setminus \{0\}$ , 使得对所有的  $S \subseteq T \subseteq N$  有

$$\alpha(T) \cdot v(S) \leq \alpha(S) \cdot v(T). \quad (6)$$

其中:  $\alpha(S) = \sum_{i \in S} \alpha_i, \alpha(T) = \sum_{i \in T} \alpha_i$ . 如果满足条件(5)和(6), 则称博弈  $(N, v)$  为关于向量  $\alpha$  的平均单调博弈<sup>[7]</sup>.

注意: 针对所有的  $S \subseteq T$ , 有  $0 \leq \alpha(S) \leq \alpha(T)$ , 及  $\alpha(N) \geq 0$ . 如果  $\alpha_i > 0, \forall i \in N$ , 则可将式(6)写为

$$\frac{v(S)}{\alpha(S)} \leq \frac{v(T)}{\alpha(T)}, \forall \emptyset \neq S \subseteq T \subseteq N. \quad (7)$$

也应该注意向量  $\alpha = (\alpha_i)_{i \in N}$  对博弈本身而言是外生的, 所以可以认为它是博弈中参与者的相对贡献. 式(7)体现了联盟成员平均贡献值随联盟的增大而提高的变化过程, 因此, 本文研究平均单调博弈的主要出发点是如何确定参与者的相对贡献值向量  $\alpha$ .

平均单调博弈覆盖了很多应用领域, 在应用中确定哪一个向量  $\alpha$  更适合平均单调博弈的定义是很必要的, 这个向量可能是唯一的. 因此, 向量一旦确定, 博弈的代数结构将变得很清楚. 以下性质可作为判断博弈是否为关于某向量的平均单调博弈的必要条件.

**命题 1** 令  $(N, v)$  为关于  $\alpha$  的平均单调博弈, 则有以下性质:

1) 如果  $v(S) > 0, \forall S \subseteq N$ , 则  $\alpha(S) > 0$ ;

2) 如果  $\alpha(S) = 0, \forall S \subseteq N$ , 则  $v(S) = 0$ ;

3) 如果  $v(S) = v(T) > 0$ , 且  $S \subset T \subseteq N$ , 则  $\alpha(T \setminus S) = 0$ ;

4)  $v$  是单调的;

5)  $v$  是超可加的.

**证明** 可以直接通过定义3证明这个命题, 在定义3中有  $\alpha(T) \cdot v(S) \leq \alpha(S) \cdot v(T)$ ,  $\forall S \subseteq T \subseteq N$ .

1) 取  $T = N$ , 则  $\alpha(N) \cdot v(S) \leq \alpha(S) \cdot v(N)$ . 现有  $v(S) > 0, v(N) > 0$ , 且  $\alpha(N) > 0$ . 因此,  $\alpha(S) > 0$ .

2) 取  $T = N$ , 则  $\alpha(N) \cdot v(S) \leq \alpha(S) \cdot v(N)$ . 现有  $\alpha(S) = 0, \alpha(N) > 0$ , 所以  $v(S) \leq 0$ . 由定义3可知,  $v(S) \geq 0$ . 因此,  $v(S) = 0$ .

3) 因为  $v(S) = v(T) > 0$ , 所以有  $\alpha(T) \leq \alpha(S)$ ,  $\alpha(T) - \alpha(S) = \alpha(T \setminus S) \leq 0$ . 且由  $0 \leq \alpha(S) \leq \alpha(T)$  可得,  $\alpha(T) - \alpha(S) = \alpha(T \setminus S) \geq 0$ . 因此,  $\alpha(T \setminus S) = 0$ .

4) 由命题1的第1项可知, 若  $v(S) > 0$ , 则  $\alpha(S) > 0$ . 又因为  $0 \leq \alpha(S) \leq \alpha(T)$ ,  $\forall S \subseteq T$ , 所以  $v(T) \geq \frac{v(S)}{\alpha(S)} \cdot \alpha(T) \geq \frac{v(S)}{\alpha(S)} \cdot \alpha(S) = v(S)$ , 即  $v$  是单调的.

5) 由命题1的第1项可知, 若  $v(S) > 0$ , 则  $\alpha(S) > 0$ . 令  $Q \subseteq N \setminus S, S \subseteq N$ , 有  $S \cap Q = \emptyset$ . 又因为  $0 < \alpha(S) < \alpha(S \cup Q)$ , 所以  $v(S) \leq \frac{v(S \cup Q)}{\alpha(S \cup Q)} \cdot \alpha(S)$ . 类似地, 有  $v(Q) \leq \frac{v(S \cup Q)}{\alpha(S \cup Q)} \cdot \alpha(Q)$ . 因此, 如果  $S \cap Q = \emptyset$ , 则  $v(S) + v(Q) \leq \frac{v(S \cup Q)}{\alpha(S \cup Q)} \cdot \{\alpha(S) + \alpha(Q)\} = v(S \cup Q)$  成立. 即  $v$  是超可加的.  $\square$

## 2 广义比例分配模型及简化博弈模型

平均单调博弈的定义意味着关于向量  $\alpha$  的联盟平均值随联盟扩大而增长, 如果参与者依据权值  $\alpha_i$  有比例地共享收益值, 则联盟中参与者数量越多, 每个参与者得到的回报越大.

**定义4** 令  $(N, v)$  为关于  $\alpha$  的平均单调博弈, 广义比例分配模型  $p(v; \alpha, c) = (p_i(v; \alpha, c))_{i=1,2,\dots,n}$  定义为

$$p_i(v; \alpha, c) = \alpha_i \cdot \frac{r \cdot v(N)}{\alpha(N)}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (8)$$

其中:  $0 < r = \max\{c_i : i \in N\} \leq 1, c = (c_1, c_2, \dots, c_n), 0 < c_i \leq 1$ .

广义比例分配不仅是显著的广义核心元素, 同时也是保证参与者在更大联盟中比在任何子联盟中获得更高收益的规则. 可用广义比例分配表明平均单调博弈广义核心解的非空性.

以下定理对平均单调博弈是显然的, 也是作为证明其广义核心与广义谈判集相等的基础.

**定理1** 令  $(N, v)$  为关于  $\alpha$  的平均单调博弈, 则有以下声明: 1) 广义比例分配在博弈  $v$  的广义核心

内; 2) 博弈是完全均衡的.

**证明** 1) 如果  $v(S) = 0$ , 则显然有

$$\sum_{i \in N} p_i(v; \alpha, c) = \sum_{i \in N} \alpha_i \cdot \frac{r \cdot v(N)}{\alpha(N)} = r \cdot v(N).$$

因为  $v(S) = 0$ , 所以  $\sum_{i \in S} p_i(v; \alpha, c) \geq 0 = \max_{i \in S} c_i \cdot v(S)$ .

如果  $v(S) > 0$ , 则由命题1的第1)项, 有  $\alpha(S) > 0$ . 由于  $v$  是平均单调的, 且  $\max_{i \in N} c_i \geq \max_{i \in S} c_i, \forall S \subseteq N$ , 有

$$\sum_{i \in N} p_i(v; \alpha, c) = \sum_{i \in N} \alpha_i \cdot \frac{r \cdot v(N)}{\alpha(N)} = r \cdot v(N),$$

$$\sum_{i \in S} p_i(v; \alpha, c) = \sum_{i \in S} \alpha_i \cdot \frac{r \cdot v(N)}{\alpha(N)} =$$

$$\alpha(S) \cdot \frac{\max_{i \in N} c_i \cdot v(N)}{\alpha(N)} \geq \alpha(S) \cdot \frac{\max_{i \in N} c_i \cdot v(S)}{\alpha(S)} =$$

$$\max_{i \in N} c_i \cdot v(S) \geq \max_{i \in S} c_i \cdot v(S).$$

满足广义核心的条件, 即声明1)成立.

2) 平均单调博弈的任何子博弈  $v|_T$  可能为关于  $\alpha|_T$  的平均单调博弈, 也可能为空博弈, 如果不等于零, 则显然是关于任何  $r \in R_+^T \setminus \{0\}$  包括  $\alpha|_T$  在内的平均单调博弈. 在任何情况下, 子博弈都有一个非空广义核心, 所以平均单调博弈为完全均衡的.  $\square$

**定义5** 给定一个合作博弈  $(N, v)$ , 向量  $x \in R^N$ , 和一个特定联盟  $T \subseteq N$ , 则关于  $T$  在  $x$  的广义简化博弈定义为

$$v_x^T(\emptyset) = 0, \quad (9)$$

$$v_x^T(S, c) =$$

$$\max_{\emptyset \subseteq Q \subseteq N \setminus T} \left\{ \max_{j \in (S \cup Q)} c_j \cdot v(S \cup Q) - x(Q) \right\}, \quad (10)$$

其中  $\forall \emptyset \neq S \subseteq T$ . 广义简化博弈的主要思想在于: 给定一个合作博弈  $(N, v)$  中参与者的收益  $x$ , 每一个非空子集  $T \subseteq N$  都将探讨关于  $T$  的“自己的博弈” $(T, v_x^T)$ , 每一个联盟  $S \subseteq T$  都分析它可能从  $T^c = N \setminus T$  中获取合作伙伴. 比如, 在联盟  $Q \subseteq N \setminus T$  中, 通过合作可产生  $v(S \cup Q)$ , 保留一部分值后, 为  $\max_{j \in (S \cup Q)} c_j \cdot v(S \cup Q)$ . 此外, 还必须向合作伙伴支付  $x(Q)$ , 所以只有差值对  $S$  来说才可能是可行的. 通过  $v_x^T(S, c)$  计算最大差值, 以表明寻找了最好的合作伙伴.

广义简化博弈具有两个重要的特征:

1) 如果  $v \geq 0$ , 则  $v_x^T(S) \geq 0, \forall S \subseteq T$ ;

2) 广义简化博弈最大联盟的值为

$$\max_{\emptyset \subseteq Q \subseteq N \setminus T} \left\{ \max_{j \in (T \cup Q)} c_j \cdot v(T \cup Q) - x(Q) \right\}.$$

以下引理证明了换算广义简化博弈与原始简化博弈之间的对应关系.

**引理1** 令  $(N, v) \in G^N, x \in R^N$ , 则对所有的  $i \in S \subseteq N, \emptyset \neq R \subseteq S \setminus \{i\}$ , 有

$$[v_x^S]_{x|S}^{S \setminus \{i\}}(R, c) = \max_{\emptyset \subseteq Q' \subseteq \{i\}, k \in RUQ'} c_k \cdot v_x^{S \setminus \{i\}}(R, c),$$

其中  $|S| \geq 2$ .

**证明** 由广义简化博弈的定义可知, 对任何联盟  $R (\emptyset \neq R \subseteq S \setminus \{i\})$ , 根据定义 5 有

$$\begin{aligned} [v_x^S]_{x|S}^{S \setminus \{i\}}(R, c) &= \max_{\emptyset \subseteq Q' \subseteq \{i\}} \{ \max_{k \in RUQ'} c_k \cdot v_x^S(R \cup Q') - x(Q') \} = \\ & \max\{ \max_{k \in R} c_k \cdot v_x^S(R), \max_{k \in RU\{i\}} c_k \cdot v_x^S(R \cup \{i\}) - x_i \} = \\ & \max\{ \max_{k \in R} c_k \cdot \max_{\emptyset \subseteq Q \subseteq N \setminus S} \{ \max_{j \in RUQ} c_j \cdot v(R \cup Q) - x(Q) \}, \\ & \max_{k \in RU\{i\}} c_k \cdot \max_{\emptyset \subseteq Q \subseteq N \setminus S} \{ \max_{j \in RUQ \cup \{i\}} c_j \cdot \\ & v(R \cup \{i\} \cup Q) - x(Q) \} - x_i \} = \\ & \max\{ \max_{k \in R} c_k \cdot \max_{\emptyset \subseteq Q \subseteq N \setminus S} \{ \max_{j \in RUQ} c_j \cdot v(R \cup Q) - x(Q) \}, \\ & \max_{k \in RU\{i\}} c_k \cdot \max_{\emptyset \subseteq Q \subseteq (N \setminus S) \cup \{i\}} \{ \max_{j \in RUQ \cup \{i\}} c_j \cdot \\ & v(R \cup \{i\} \cup Q) - x(Q \cup \{i\}) \} \} = \\ & \max_{\emptyset \subseteq Q' \subseteq \{i\}} \{ \max_{k \in RUQ'} c_k \cdot \{ \max_{\emptyset \subseteq Q \subseteq N \setminus S} \{ \max_{j \in RUQ} c_j \cdot \\ & v(R \cup Q) - x(Q) \}, \max_{\emptyset \subseteq Q \subseteq (N \setminus S) \cup \{i\}} \{ \max_{j \in RUQ \cup \{i\}} c_j \cdot \\ & v(R \cup \{i\} \cup Q) - x(Q \cup \{i\}) \} \} \} = \\ & \max_{\emptyset \subseteq Q' \subseteq \{i\}} \{ \max_{k \in RUQ'} c_k \cdot \\ & \max_{\emptyset \subseteq Q \subseteq (N \setminus S) \cup \{i\}} \{ \max_{j \in RUQ} c_j \cdot v(R \cup Q) - x(Q) \} \} = \\ & \max_{\emptyset \subseteq Q' \subseteq \{i\}} \{ \max_{k \in RUQ'} c_k \cdot v_x^{S \setminus \{i\}}(R, c) \} = \\ & \max_{\emptyset \subseteq Q' \subseteq \{i\}, k \in RUQ'} c_k \cdot v_x^{S \setminus \{i\}}(R, c). \end{aligned}$$

即  $[v_x^S]_{x|S}^{S \setminus \{i\}}(R, c) = \max_{\emptyset \subseteq Q' \subseteq \{i\}, k \in RUQ'} c_k \cdot v_x^{S \setminus \{i\}}(R, c)$

成立.  $\square$

以下命题声明了, 如果一个参与者获得的收益比广义比例分配多, 则广义简化博弈为平均单调的.

**命题 2** 令  $(N, v)$  为关于  $\alpha$  的平均单调博弈,  $x \in R^N$  且  $i \in N$ , 使得  $x_i \geq \alpha_i \cdot \frac{r \cdot v(N)}{\alpha(N)}, 0 < r = \max_{i \in N} c_i \leq 1$ , 则: 1) 如果  $\alpha_{|N \setminus \{i\}} = 0$ , 则广义简化博弈  $v_x^{N \setminus \{i\}}(S, c) = 0, \forall S \subseteq N \setminus \{i\}$ ; 2) 如果  $\alpha_{|N \setminus \{i\}} \neq 0$ , 则广义简化博弈  $v_x^{N \setminus \{i\}}(S, c)$  为关于  $\alpha_{|N \setminus \{i\}}$  的平均单调博弈.

**证明** 1) 因为  $\alpha_{|N \setminus \{i\}} = (\alpha_j)_{j \in N \setminus \{i\}} = 0, \alpha(S) = 0$ , 由命题 1 第 2) 项可知, 对于所有的  $S \subseteq N \setminus \{i\}$ , 有  $v(S) = 0$ . 因此, 对于  $S \subseteq N \setminus \{i\}$ , 有

$$\begin{aligned} x_i &\geq \alpha_i \cdot \frac{r \cdot v(N)}{\alpha(N)} = (\alpha(S) + \alpha_i) \cdot \frac{r \cdot v(N)}{\alpha(N)} = \\ & \alpha(S \cup \{i\}) \cdot \frac{r \cdot v(N)}{\alpha(N)} \geq r \cdot v(S \cup \{i\}) \geq \\ & \max_{j \in S \cup \{i\}} c_j \cdot v(S \cup \{i\}). \end{aligned}$$

因为  $v(S) = 0$ , 且  $\max_{j \in S \cup \{i\}} c_j \cdot v(S \cup \{i\}) - x_i \leq 0$ , 所以

$$\begin{aligned} v_x^{N \setminus \{i\}}(S) &= \max_{\emptyset \subseteq Q \subseteq \{i\}} \{ \max_{j \in S \cup Q} c_j \cdot v(S \cup Q) - x(Q) \} = \\ & \max\{ \max_{j \in S} c_j \cdot v(S), \max_{j \in S \cup \{i\}} c_j \cdot v(S \cup \{i\}) - x_i \} = \\ & \max_{j \in S} c_j \cdot v(S) = 0. \end{aligned}$$

即  $v_x^{N \setminus \{i\}}(S, c) = 0$ .

2) 需要证明对于任何  $S_1 \subseteq S_2 \subseteq N \setminus \{i\}$ , 以下不等式成立:

$$\alpha(S_2) \cdot v_x^{N \setminus \{i\}}(S_1, c) \leq \alpha(S_1) \cdot v_x^{N \setminus \{i\}}(S_2, c).$$

如果  $\alpha(S_1) = 0$ , 同 1), 可得  $v_x^{N \setminus \{i\}}(S_1, c) = 0$ , 所以不等式成立. 如果  $\alpha(S_1) \neq 0$ , 则需证明

$$\frac{v_x^{N \setminus \{i\}}(S_1, c)}{\alpha(S_1)} \leq \frac{v_x^{N \setminus \{i\}}(S_2, c)}{\alpha(S_2)}.$$

事实上, 已经知道  $\frac{v(S_1)}{\alpha(S_1)} \leq \frac{v(S_2)}{\alpha(S_2)}$ .

因为  $v$  是平均单调的, 且  $S_1 \subseteq S_2, \max_{j \in S_1} c_j \leq$

$\max_{j \in S_2} c_j$ , 则  $\max_{j \in S_1} c_j \cdot \frac{v(S_1)}{\alpha(S_1)} \leq \max_{j \in S_2} c_j \cdot \frac{v(S_2)}{\alpha(S_2)}$ , 且

$$\begin{aligned} v_x^{N \setminus \{i\}}(S_1, c) &= \max_{\emptyset \subseteq Q \subseteq \{i\}} \{ \max_{j \in S_1 \cup Q} c_j \cdot v(S_1 \cup Q) - x(Q) \} = \\ & \max\{ \max_{j \in S_1} c_j \cdot v(S_1), \max_{j \in S_1 \cup \{i\}} c_j \cdot \\ & v(S_1 \cup \{i\}) - x_i \} v_x^{N \setminus \{i\}}(S_2, c) = \\ & \max_{\emptyset \subseteq Q \subseteq \{i\}} \{ \max_{j \in S_2 \cup Q} c_j \cdot v(S_2 \cup Q) - x(Q) \} = \\ & \max\{ \max_{j \in S_2} c_j \cdot v(S_2), \max_{j \in S_2 \cup \{i\}} c_j \cdot v(S_2 \cup \{i\}) - x_i \}. \end{aligned}$$

只需证明

$$\begin{aligned} \frac{\max_{j \in S_1 \cup \{i\}} c_j \cdot v(S_1 \cup \{i\}) - x_i}{\alpha(S_1)} &\leq \\ \frac{\max_{j \in S_2 \cup \{i\}} c_j \cdot v(S_2 \cup \{i\}) - x_i}{\alpha(S_2)}. \end{aligned}$$

因为  $v$  是平均单调的, 且  $S_1 \subseteq S_2, \max_{j \in S_1 \cup \{i\}} c_j \leq$

$\max_{j \in S_2 \cup \{i\}} c_j$ , 则有

$$\begin{aligned} \frac{\max_{j \in S_1 \cup \{i\}} c_j \cdot v(S_1 \cup \{i\}) - x_i}{\alpha(S_1)} &= \\ \frac{\max_{j \in S_1 \cup \{i\}} c_j \cdot \frac{v(S_1 \cup \{i\})}{\alpha(S_1 \cup \{i\})} \cdot \alpha(S_1 \cup \{i\}) - x_i}{\alpha(S_1)} &= \\ \frac{\max_{j \in S_1 \cup \{i\}} c_j \cdot \frac{v(S_1 \cup \{i\})}{\alpha(S_1 \cup \{i\})} \cdot \alpha(S_1)}{\alpha(S_1)} &+ \\ \frac{\max_{j \in S_1 \cup \{i\}} c_j \cdot \frac{v(S_1 \cup \{i\})}{\alpha(S_1 \cup \{i\})} \cdot \alpha_i - x_i}{\alpha(S_1)} &= \end{aligned}$$

$$\frac{\max_{j \in S_1 \cup \{i\}} c_j \cdot \frac{v(S_1 \cup \{i\})}{\alpha(S_1 \cup \{i\})} + \max_{j \in S_1 \cup \{i\}} c_j \cdot \frac{v(S_1 \cup \{i\})}{\alpha(S_1 \cup \{i\})} \cdot \alpha_i - x_i}{\alpha(S_1)} \leq \frac{\max_{j \in S_1 \cup \{i\}} c_j \cdot \frac{v(S_2 \cup \{i\})}{\alpha(S_2 \cup \{i\})} + \max_{j \in S_1 \cup \{i\}} c_j \cdot \frac{v(S_2 \cup \{i\})}{\alpha(S_2 \cup \{i\})} \cdot \alpha_i - x_i}{\alpha(S_1)} \leq \frac{\max_{j \in S_2 \cup \{i\}} c_j \cdot \frac{v(S_2 \cup \{i\})}{\alpha(S_2 \cup \{i\})} + \max_{j \in S_2 \cup \{i\}} c_j \cdot \frac{v(S_2 \cup \{i\})}{\alpha(S_2 \cup \{i\})} \cdot \alpha_i - x_i}{\alpha(S_1)}.$$

由此可以判定  $\max_{j \in S_2 \cup \{i\}} c_j \cdot \frac{v(S_2 \cup \{i\})}{\alpha(S_2 \cup \{i\})} \cdot \alpha_i - x_i \leq 0$ .

又因为  $S_2 \cup \{i\} \subseteq N$ ,  $\max_{j \in S_2 \cup \{i\}} c_j \leq \max_{j \in N} c_j = r$ ,

所以

$$x_i \geq \alpha_i \cdot \frac{r \cdot v(N)}{\alpha(N)} \geq \alpha_i \cdot \frac{r \cdot v(S_2 \cup \{i\})}{\alpha(S_2 \cup \{i\})} \geq \alpha_i \cdot \frac{\max_{j \in S_2 \cup \{i\}} c_j \cdot v(S_2 \cup \{i\})}{\alpha(S_2 \cup \{i\})},$$

也就是说  $\max_{j \in S_2 \cup \{i\}} c_j \cdot \frac{v(S_2 \cup \{i\})}{\alpha(S_2 \cup \{i\})} \cdot \alpha_i - x_i \leq 0$ .

由平均单调博弈的定义, 有  $0 \leq \alpha(S_1) \leq \alpha(S_2)$ ,  $S_1 \subseteq S_2$ . 现因为  $\alpha(S_1) \neq 0$ , 所以  $0 < \frac{1}{\alpha(S_2)} \leq \frac{1}{\alpha(S_1)}$ .

因此

$$\frac{\max_{j \in S_2 \cup \{i\}} c_j \cdot \frac{v(S_2 \cup \{i\})}{\alpha(S_2 \cup \{i\})} + \max_{j \in S_2 \cup \{i\}} c_j \cdot \frac{v(S_2 \cup \{i\})}{\alpha(S_2 \cup \{i\})} \cdot \alpha_i - x_i}{\alpha(S_1)} \leq \frac{\max_{j \in S_2 \cup \{i\}} c_j \cdot \frac{v(S_2 \cup \{i\})}{\alpha(S_2 \cup \{i\})} + \max_{j \in S_2 \cup \{i\}} c_j \cdot \frac{v(S_2 \cup \{i\})}{\alpha(S_2 \cup \{i\})} \cdot \alpha_i - x_i}{\alpha(S_2)} = \frac{\max_{j \in S_2 \cup \{i\}} c_j \cdot \frac{v(S_2 \cup \{i\})}{\alpha(S_2 \cup \{i\})} \cdot (\alpha(S_2) + \alpha_i) - x_i}{\alpha(S_2)} = \frac{\max_{j \in S_2 \cup \{i\}} c_j \cdot v(S_2 \cup \{i\}) - x_i}{\alpha(S_2)},$$

即下式成立:

$$\frac{\max_{j \in S_1 \cup \{i\}} c_j \cdot v(S_1 \cup \{i\}) - x_i}{\alpha(S_1)} \leq \frac{\max_{j \in S_2 \cup \{i\}} c_j \cdot v(S_2 \cup \{i\}) - x_i}{\alpha(S_2)}. \quad \square$$

**定义6** 令  $x \in I^*(v, r, c) \setminus C(v, r, c)$  为任意关于  $\alpha$  的平均单调博弈  $(N, v)$  广义核心之外的预转归, 定义联盟  $S$  关于  $x$  的广义超量为

$$e(S, x, c) = \max_{i \in S} c_i \cdot v(S) - x(S), \quad \forall S \subseteq N. \quad (11)$$

令  $T \subseteq N$  为最大广义超量的最大联盟, 即

$$\begin{cases} e(T, x, c) = \max_{i \in T} c_i \cdot v(T) - x(T) \geq \\ \max_{i \in S} c_i \cdot v(S) - x(S) = \\ e(S, x, c), \quad \forall S \subseteq N; \\ e(T, x, c) > e(S, x, c), \quad \forall T \subset S. \end{cases} \quad (12)$$

本文将用这个最大联盟构造关于  $x$  的异议. 首先证明关于  $T$  在  $x$  的广义简化博弈是关于  $\alpha|_T$  的平均单调博弈.

**命题3** 令  $(N, v)$  为关于  $\alpha$  的平均单调博弈, 令  $x \in I^*(v, r, c) \setminus C(v, r, c)$ , 且  $T$  为最大广义超量的最大联盟, 则: 1) 如果  $\alpha|_T = 0$ , 则广义简化博弈  $v_x^T = 0$ ; 2) 如果  $\alpha|_T \neq 0$ , 则广义简化博弈  $v_x^T$  是关于  $\alpha|_T$  的平均单调博弈.

**证明** 1) 由命题1第2)项可知, 如果  $\alpha|_T = (\alpha_i)_{i \in T} = 0$ , 则  $\alpha(S) = 0, S \subseteq T$ , 所以  $v(S) = 0, \forall S \subseteq T$ . 因此, 由  $v$  的单调性可得, 对于任意的  $\emptyset \neq Q \subseteq N \setminus T$ , 以及所有的  $\emptyset \neq S \subseteq T$ , 有  $v(S \cup Q) - x(Q) \leq v(T \cup Q) - x(Q)$ .

又因为  $S \subseteq T, \max_{i \in S \cup Q} c_i \leq \max_{i \in T \cup Q} c_i$ , 所以

$$\begin{aligned} \max_{i \in S \cup Q} c_i \cdot v(S \cup Q) - x(Q) &\leq \\ \max_{i \in T \cup Q} c_i \cdot v(T \cup Q) - x(Q). \end{aligned}$$

因为  $T$  为最大广义超量的最大联盟, 有

$$\begin{aligned} \max_{i \in T \cup Q} c_i \cdot v(T \cup Q) - x(Q \cup T) &< \\ \max_{i \in T} c_i \cdot v(T) - x(T). \end{aligned}$$

所以  $\max_{i \in T \cup Q} c_i \cdot v(T \cup Q) - x(Q) < \max_{i \in T} c_i \cdot v(T)$ .

又由命题1第2)项可知,  $\alpha|_T = 0, v(T) = 0$ , 因此,  $\max_{i \in S \cup Q} c_i \cdot v(S \cup Q) - x(Q) \leq \max_{i \in T} c_i \cdot v(T)$ .

得出结论:

$$\begin{aligned} v_x^T(S, c) &= \\ \max_{\emptyset \subseteq Q \subseteq N \setminus T} \{ \max_{j \in S \cup Q} c_j \cdot v(S \cup Q) - x(Q) \} &= \\ \max \{ \max_{j \in S} c_j \cdot v(S), \max_{j \in S \cup Q} c_j \cdot v(S \cup Q) - x(Q) \} &= 0. \end{aligned}$$

2) 令  $x \in I^*(v, r, c) \setminus C(v, r, c)$ ,  $T$  为最大广义超量的最大联盟. 为了证明  $v_x^T(S, c), \forall S \subseteq T$  是关于  $\alpha|_T$  的平均单调博弈, 必须证明对于任意的  $\emptyset \neq S_1 \subseteq S_2 \subseteq T$ , 有  $\alpha(S_2) \cdot v_x^T(S_1, c) \leq \alpha(S_1) \cdot v_x^T(S_2, c)$ .

分两种情况讨论:

①  $[\alpha(S_1) = 0]$ . 这种情况下足以证明  $v_x^T(S_1) = 0$ . 由命题1第2)项可知,  $\alpha(S_1) = 0$ , 则  $v(S_1) = 0$ . 这意味着

$$\begin{aligned} v_x^T(S_1, c) &= \\ \max_{\emptyset \subseteq Q \subseteq N \setminus T} \{ \max_{j \in S_1 \cup Q} c_j \cdot v(S_1 \cup Q) - x(Q) \} &= \end{aligned}$$

$$\max\{\max_{j \in S_1} c_j \cdot v(S_1), \max_{j \in S_1 \cup Q} c_j \cdot v(S_1 \cup Q) - x(Q)\} = \max\{0, \max_{j \in S_1 \cup Q} c_j \cdot v(S_1 \cup Q) - x(Q)\}.$$

因此, 只需要证明对于任意的  $\emptyset \neq Q \subseteq N \setminus T$ , 有  $\max_{j \in S_1 \cup Q} c_j \cdot v(S_1 \cup Q) - x(Q) \leq 0$  成立. 用反证法, 也就是说, 存在一联盟  $Q_1$  ( $\emptyset \neq Q_1 \subseteq N \setminus T$ ), 使得

$$\max_{j \in S_1 \cup Q_1} c_j \cdot v(S_1 \cup Q_1) - x(Q_1) > 0.$$

首先注意  $\alpha(S_1 \cup Q_1) \neq 0$ . 否则, 由命题 1 第 2) 项可知, 如果  $\alpha(S_1 \cup Q_1) = 0$ , 则  $v(S_1 \cup Q_1) = 0$ , 同时由广义简化博弈的性质有  $\max_{j \in S_1 \cup Q_1} c_j \cdot v(S_1 \cup Q_1) - x(Q_1) > 0$ ,  $Q_1 \subseteq N \setminus T$ , 即  $x(Q_1) < 0$ , 这意味着对某些  $j \in N \setminus T$ , 有  $x_j < 0 \leq \max_{i \in \{j\}} c_i \cdot v(\{j\})$  成立. 但由

$$\max_{i \in T} c_i \leq \max_{i \in T \cup \{j\}} c_i \text{ 可知}$$

$$\max_{i \in T} c_i \cdot v(T) - x(T) <$$

$$\max_{i \in T} c_i \cdot v(T) - x(T) + \max_{i \in \{j\}} c_i \cdot v(\{j\}) - x_j \leq$$

$$\max_{i \in T \cup \{j\}} c_i \cdot v(T \cup \{j\}) - x(T \cup \{j\}),$$

这与联盟  $T$  的定义相矛盾.

现在, 通过  $v$  是关于  $\alpha$  的平均单调博弈的定义,  $\alpha(T) \neq 0$ ,  $\alpha(S_1) = 0$ ,  $\emptyset \neq S_1 \subseteq T$ ,  $\alpha(S_1 \cup Q_1) \neq 0$ ,  $\emptyset \neq Q_1 \subseteq N \setminus T$ , 以及  $\max_{i \in T} c_i \leq \max_{i \in T \cup Q_1} c_i$ ,

$$\max_{i \in S_1 \cup Q_1} c_i \leq \max_{i \in T \cup Q_1} c_i \text{ 可知}$$

$$\max_{i \in T} c_i \cdot v(T) - x(T) <$$

$$\max_{i \in T} c_i \cdot v(T) - x(T) +$$

$$\max_{i \in S_1 \cup Q_1} c_i \cdot v(S_1 \cup Q_1) - x(Q_1) =$$

$$\max_{i \in T} c_i \cdot \frac{v(T)}{\alpha(T)} \cdot \alpha(T) - x(T) +$$

$$\max_{i \in S_1 \cup Q_1} c_i \cdot \frac{v(S_1 \cup Q_1)}{\alpha(S_1 \cup Q_1)} \cdot \alpha(S_1 \cup Q_1) - x(Q_1) \leq$$

$$\max_{i \in T} c_i \cdot \frac{v(T \cup Q_1)}{\alpha(T \cup Q_1)} \cdot \alpha(T) - x(T) +$$

$$\max_{i \in S_1 \cup Q_1} c_i \cdot \frac{v(T \cup Q_1)}{\alpha(T \cup Q_1)} \cdot (\alpha(Q_1) + \alpha(S_1)) - x(Q_1) \leq$$

$$\max_{i \in T \cup Q_1} c_i \cdot \frac{v(T \cup Q_1)}{\alpha(T \cup Q_1)} \cdot \alpha(T) - x(T) +$$

$$\max_{i \in T \cup Q_1} c_i \cdot \frac{v(T \cup Q_1)}{\alpha(T \cup Q_1)} \cdot \alpha(Q_1) - x(Q_1) =$$

$$\max_{i \in T \cup Q_1} c_i \cdot \frac{v(T \cup Q_1)}{\alpha(T \cup Q_1)} \cdot \alpha(T \cup Q_1) - x(T \cup Q_1) =$$

$$\max_{i \in T \cup Q_1} c_i \cdot v(T \cup Q_1) - x(T \cup Q_1).$$

也就是说,  $\max_{i \in T} c_i \cdot v(T) - x(T) < \max_{i \in T \cup Q_1} c_i \cdot v(T \cup Q_1) - x(T \cup Q_1)$ , 这与所选联盟  $T$  的条件相矛盾.

② [ $\alpha(S_1) \neq 0$ ]. 在这种情况下需要证明, 对于任意的  $\emptyset \neq S_1 \subseteq S_2 \subseteq T$  及  $Q \subseteq N \setminus T$ , 有

$$\frac{\max_{j \in S_1 \cup Q} c_j \cdot v(S_1 \cup Q) - x(Q)}{\alpha(S_1)} \leq$$

$$\frac{\max_{j \in S_2 \cup Q} c_j \cdot v(S_2 \cup Q) - x(Q)}{\alpha(S_2)}.$$

首先注意, 如果  $Q = \emptyset$ , 则因为  $v$  是关于  $\alpha$  的平均单调博弈, 这个不等式显然成立. 现在, 假设  $\emptyset \neq Q \subseteq N \setminus T$ , 因为  $v$  是平均单调博弈, 且  $\max_{j \in S_1 \cup Q} c_j \leq$

$\max_{j \in S_2 \cup Q} c_j$ ,  $0 < \alpha(S_1) \leq \alpha(S_2)$ ,  $\max_{j \in S_2 \cup Q} c_j \cdot \frac{v(S_2 \cup Q)}{\alpha(S_2 \cup Q)} \cdot \alpha(Q) - x(Q) \leq 0$ , 所以

$$\begin{aligned} & \frac{\max_{j \in S_1 \cup Q} c_j \cdot v(S_1 \cup Q) - x(Q)}{\alpha(S_1)} = \\ & \frac{\max_{j \in S_1 \cup Q} c_j \cdot \frac{v(S_1 \cup Q)}{\alpha(S_1 \cup Q)} \cdot \alpha(S_1 \cup Q) - x(Q)}{\alpha(S_1)} = \\ & \frac{\max_{j \in S_1 \cup Q} c_j \cdot \frac{v(S_1 \cup Q)}{\alpha(S_1 \cup Q)} \cdot \alpha(S_1)}{\alpha(S_1)} + \\ & \frac{\max_{j \in S_1 \cup Q} c_j \cdot \frac{v(S_1 \cup Q)}{\alpha(S_1 \cup Q)} \cdot \alpha(Q) - x(Q)}{\alpha(S_1)} = \\ & \frac{\max_{j \in S_1 \cup Q} c_j \cdot \frac{v(S_1 \cup Q)}{\alpha(S_1 \cup Q)} +}{\alpha(S_1)} \\ & \frac{\max_{j \in S_1 \cup Q} c_j \cdot \frac{v(S_1 \cup Q)}{\alpha(S_1 \cup Q)} \cdot \alpha(Q) - x(Q)}{\alpha(S_1)} \leq \\ & \frac{\max_{j \in S_1 \cup Q} c_j \cdot \frac{v(S_2 \cup Q)}{\alpha(S_2 \cup Q)} +}{\alpha(S_1)} \\ & \frac{\max_{j \in S_1 \cup Q} c_j \cdot \frac{v(S_2 \cup Q)}{\alpha(S_2 \cup Q)} \cdot \alpha(Q) - x(Q)}{\alpha(S_1)} \leq \\ & \frac{\max_{j \in S_2 \cup Q} c_j \cdot \frac{v(S_2 \cup Q)}{\alpha(S_2 \cup Q)} +}{\alpha(S_1)} \\ & \frac{\max_{j \in S_2 \cup Q} c_j \cdot \frac{v(S_2 \cup Q)}{\alpha(S_2 \cup Q)} \cdot \alpha(Q) - x(Q)}{\alpha(S_1)} \leq \\ & \frac{\max_{j \in S_2 \cup Q} c_j \cdot \frac{v(S_2 \cup Q)}{\alpha(S_2 \cup Q)} +}{\alpha(S_2)} \\ & \frac{\max_{j \in S_2 \cup Q} c_j \cdot \frac{v(S_2 \cup Q)}{\alpha(S_2 \cup Q)} \cdot \alpha(Q) - x(Q)}{\alpha(S_2)} = \\ & \frac{\max_{j \in S_2 \cup Q} c_j \cdot v(S_2 \cup Q) - x(Q)}{\alpha(S_2)}, \end{aligned}$$

即

$$\frac{\max_{j \in S_1 \cup Q} c_j \cdot v(S_1 \cup Q) - x(Q)}{\alpha(S_1)} \leq \frac{\max_{j \in S_2 \cup Q} c_j \cdot v(S_2 \cup Q) - x(Q)}{\alpha(S_2)}$$

成立. 其中, 最后一个不等式是归于事实:  $\max_{j \in S_2 \cup Q} c_j \cdot$

$\frac{v(S_2 \cup Q)}{\alpha(S_2 \cup Q)} \cdot \alpha(Q) - x(Q) \leq 0$ . 因为  $\max_{j \in T \cup Q} c_j \geq$

$\max_{j \in S_2 \cup Q} c_j$ ,  $S_2 \subseteq T$ ,  $\emptyset \neq Q \subseteq N \setminus T$ , 又  $v$  是平均单

调博弈, 则  $\max_{j \in S_2 \cup Q} c_j \cdot \frac{v(S_2 \cup Q)}{\alpha(S_2 \cup Q)} \cdot \alpha(Q) - x(Q) > 0$ ,

所以

$$\begin{aligned} & \max_{j \in T \cup Q} c_j \cdot \frac{v(T \cup Q)}{\alpha(T \cup Q)} \cdot \alpha(Q) - x(Q) \geq \\ & \max_{j \in S_2 \cup Q} c_j \cdot \frac{v(T \cup Q)}{\alpha(T \cup Q)} \cdot \alpha(Q) - x(Q) \geq \\ & \max_{j \in S_2 \cup Q} c_j \cdot \frac{v(S_2 \cup Q)}{\alpha(S_2 \cup Q)} \cdot \alpha(Q) - x(Q) > 0. \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} & \max_{j \in T} c_j \cdot v(T) - x(T) < \\ & \max_{j \in T} c_j \cdot v(T) - x(T) + \\ & \max_{j \in T \cup Q} c_j \cdot \frac{v(T \cup Q)}{\alpha(T \cup Q)} \cdot \alpha(Q) - x(Q) \leq \\ & \max_{j \in T} c_j \cdot \frac{v(T \cup Q)}{\alpha(T \cup Q)} \cdot \alpha(T) - x(T) + \\ & \max_{j \in T \cup Q} c_j \cdot \frac{v(T \cup Q)}{\alpha(T \cup Q)} \cdot \alpha(Q) - \\ & x(Q) \max_{j \in T \cup Q} c_j \cdot \frac{v(T \cup Q)}{\alpha(T \cup Q)} \cdot \alpha(Q) - \\ & x(Q) \max_{j \in T \cup Q} c_j \cdot \frac{v(T \cup Q)}{\alpha(T \cup Q)} \cdot \alpha(Q) - x(Q) = \\ & \max_{j \in T \cup Q} c_j \cdot v(T \cup Q) - x(T \cup Q). \end{aligned}$$

这与联盟  $T$  的定义相矛盾.

以上表明: 对于任意的  $\emptyset \neq S_1 \subseteq S_2 \subseteq T$ , 有  $\alpha(S_2) \cdot v_x^T(S_1, c) \leq \alpha(S_1) \cdot v_x^T(S_2, c)$  成立.  $\square$

### 3 广义谈判集及其等价性

在某些情况下, 需要保留博弈总值的一部分用于再分配. 在提出广义异议和反异议概念的基础上, 将传统谈判集<sup>[8-10]</sup>扩展为广义谈判集.

**定义7** 如果有  $k, l \in N$ , 且  $k \neq l$ , 则记

$$\Gamma_{kl}(N) = \Gamma_{kl} = \{S \subseteq N \setminus \{l\} | k \in S\}.$$

也就是说,  $\Gamma_{kl}$  是包含  $k$  而不包含  $l$  的联盟集合.

令  $x$  为博弈  $(N, v)$  的广义转归, 则参与者  $i$  针对  $j$  关于  $x$  的广义异议为二元偶  $(T, y)$ , 其中  $T$  为包含  $i$  而不包含  $j$  的联盟, 即  $T \in \Gamma_{ij}$ , 并且  $R^T$  中的参与者收益分配向量  $y \in R^T$  满足

$$\begin{cases} y_k > x_k, \forall k \in T; \\ y(T) = \max_{i \in T} c_i \cdot v(T). \end{cases} \quad (13)$$

令  $(T, y)$  为参与者  $i$  针对参与者  $j$  关于  $x$  的广义异议, 则二元偶  $(M, z)$  为广义异议  $(T, y)$  的广义反异议. 当且仅当  $M \in \Gamma_{ji}$  时,  $z \in R^M$  使得

$$\begin{cases} z_k \geq y_k, \forall k \in M \cap T; \\ z_k \geq x_k, \forall k \in M \setminus T; \\ z(M) = \max_{i \in M} c_i \cdot v(M). \end{cases} \quad (14)$$

当且仅当任意参与者针对另一参与者关于  $x$  的广义异议都存在一个广义反异议时, 广义转归  $x$  属于广义谈判集  $M(v, r, c)$ . 也就是说, 广义谈判集是由存

在广义异议和反异议的谈判过程的广义转归组成, 即

$$M(v, r, c) = \left\{ x \in I(v, r, c) \mid \begin{array}{l} x \text{ 的每个广义异议} \\ \text{都存在广义反异议} \end{array} \right\}. \quad (15)$$

**定理2** 对于任意平均单调博弈, 其广义谈判集  $M(v, r, c)$  与广义核心  $C(v, r, c)$  相等.

**证明** 因为任何广义核心元素都不存在广义异议, 所以  $C(v, r, c) \subseteq M(v, r, c)$ . 为了检验  $M(v, r, c) \subseteq C(v, r, c)$ , 现构造广义核心之外的广义转归  $x \in I(v, r, c) \setminus C(v, r, c)$ , 并根据式 (12) 选择一个最大广义超量的最大联盟, 记为  $T$ .

注意联盟  $T$  不等于  $N$ ,  $|T| \geq 2$ , 满足对于任意的  $R \subseteq N \setminus T$ , 有  $x(R) \geq \max_{i \in R} c_i \cdot v(R)$ . 如果存在一个联盟  $R \subseteq N \setminus T$ , 使得  $x(R) < \max_{i \in R} c_i \cdot v(R)$ , 则由  $\max_{i \in T} c_i \leq \max_{i \in T \cup R} c_i$ ,  $\max_{i \in R} c_i \leq \max_{i \in T \cup R} c_i$ , 有  $\max_{i \in T} c_i \cdot v(T) - x(T) < \max_{i \in T} c_i \cdot v(T) - x(T) + \max_{i \in R} c_i \cdot v(R) - x(R) \leq \max_{i \in T \cup R} c_i \cdot v(T \cup R) - x(T \cup R)$ .

这与  $T$  的定义矛盾. 另外, 因为  $\max_{i \in T} c_i \cdot v(T) - x(T) > 0$ ,  $x_i \geq c_i \cdot v(\{i\}) \geq 0$ ,  $\forall i \in N$ , 且  $x \in I(v, r, c) \setminus C(v, r, c)$ , 所以  $\alpha_{|T} \neq 0$ . 由命题3可以声明,  $v_x^T$  是关于  $\alpha_{|T}$  的平均单调博弈, 因此, 集合  $\mathcal{A}_T$  定义为

$$\mathcal{A}_T = \left\{ \emptyset \neq S \subseteq T \mid \begin{array}{l} \textcircled{1} v_x^S \text{ 是关于 } \alpha_{|S} \text{ 的平均单调博弈;} \\ \textcircled{2} x(R) \geq \max_{i \in R} c_i \cdot v(R), \\ \forall R \subseteq N \setminus S. \end{array} \right\}$$

是非空的. 令  $S^* \subseteq T$  为在集合  $\mathcal{A}_T$  中满足结论的最小联盟, 由定义可知,  $S^* \neq \emptyset$ , 且

$$\begin{aligned} v_x^{S^*}(S^*, c) &= \\ & \max_{\emptyset \subseteq Q \subseteq N \setminus S^*} \left\{ \max_{j \in S^* \cup Q} c_j \cdot v(S^* \cup Q) - x(Q) \right\} = \\ & \max_{i \in T} c_i \cdot v(T) - x(T \setminus S^*). \end{aligned}$$

以上等式可通过  $T$  的定义得到, 即

$$\begin{aligned} & \max_{\emptyset \subseteq Q \subseteq N \setminus S^*} \left\{ \max_{j \in S^* \cup Q} c_j \cdot v(S^* \cup Q) - x(Q \cup S^*) \right\} = \\ & \max_{i \in T} c_i \cdot v(T) - x(T). \end{aligned}$$

因此,  $v_x^{S^*}(S^*, c) = \max_{i \in T} c_i \cdot v(T) - x(T \setminus S^*) > 0$ . 又由  $x \in I(v, r, c) \setminus C(v, r, c)$  可得,  $\max_{i \in T} c_i \cdot v(T) \geq x(T) > x(T \setminus S^*)$ ,  $\forall S^* \neq \emptyset$ .

$$\frac{v_x^{S^*}(S^*, c) > 0 \text{ 意味着 } \alpha(S^*) \neq 0. \text{ 因此, } S^* \text{ 满足}}{\alpha(S^*)} \cdot \alpha_i > x_i, \forall i \in S^*. \quad (16)$$

为了证实这一点, 假设存在  $i_* \in S^*$ , 使得

$$\frac{v_x^{S^*}(S^*, c)}{\alpha(S^*)} \cdot \alpha_{i_*} =$$

$$\frac{\max_{i \in T} c_i \cdot v(T) - x(T \setminus S^*)}{\alpha(S^*)} \cdot \alpha_{i_*} \leq x_{i_*}. \quad (17)$$

如果  $S^* = \{i_*\}$ , 则式 (17) 为

$$\frac{v_x^{S^*}(S^*, c)}{\alpha(S^*)} \cdot \alpha_{i_*} = \frac{v_x^{S^*}(S^*, c)}{\alpha_{i_*}} \cdot \alpha_{i_*} = v_x^{S^*}(S^*, c) =$$

$\max_{\emptyset \subseteq Q \subseteq N \setminus \{i_*\}} \{ \max_{j \in Q \cup \{i_*\}} c_j \cdot v(Q \cup \{i_*\}) - x(Q) \} \leq x_{i_*}$ .  
也就是说

$$x_{i_*} \geq v_x^{S^*}(S^*, c) = \max_{\emptyset \subseteq Q \subseteq N \setminus \{i_*\}} \{ \max_{j \in Q \cup \{i_*\}} c_j \cdot v(Q \cup \{i_*\}) - x(Q) \},$$

这意味着  $x_{i_*} + x(Q) \geq \max_{j \in Q \cup \{i_*\}} c_j \cdot v(Q \cup \{i_*\})$ , 即对于任意的  $Q \subseteq N \setminus \{i_*\}$ , 有  $x(Q \cup \{i_*\}) \geq \max_{j \in Q \cup \{i_*\}} c_j \cdot v(Q \cup \{i_*\})$  成立. 因为联盟  $S^*$  满足集合  $\mathcal{A}_T$  定义中的条件②, 得出结论:  $x \in C(v, r, c)$ , 这与  $x \in I(v, r, c) \setminus C(v, r, c)$  相矛盾.

如果  $|S^*| \geq 2$ , 则证明联盟  $S^* \setminus \{i_*\}$  满足属于  $\mathcal{A}_T$  的两个条件.

1) 注意, 如果  $\alpha(S^* \setminus \{i_*\}) \neq 0$ , 则由命题 2 及引理 1, 可以直接得出结论:  $v_x^{S^* \setminus \{i_*\}}$  是关于  $\alpha_{|S^* \setminus \{i_*\}}$  的平均单调博弈. 为了核实  $\alpha(S^* \setminus \{i_*\}) \neq 0$ , 假设  $\alpha(S^* \setminus \{i_*\}) = 0$ , 有  $\alpha(S^*) - \alpha_{i_*} = 0$ , 即  $\alpha(S^*) = \alpha_{i_*} > 0$ . 由式 (17) 可以得出

$$\begin{aligned} x_{i_*} &\geq \alpha_{i_*} \cdot \frac{v_x^{S^*}(S^*, c)}{\alpha(S^*)} = \\ \alpha_{i_*} \cdot \frac{v_x^{S^*}(S^*, c)}{\alpha_{i_*}} &= v_x^{S^*}(S^*, c). \end{aligned} \quad (18)$$

由于  $v_x^{S^*}$  是平均单调博弈, 且  $v_x^{S^*}(S, c) = 0, \forall S \subseteq S^* \setminus \{i_*\}$ , 由式 (18) 可得  $x(S) \geq v_x^{S^*}(S, c), \forall S \subseteq S^*$ .

通过广义简化博弈  $v_x^{S^*}$  的定义以及事实  $S^* \in \mathcal{A}_T$ , 可得出结论  $x(S) \geq \max_{i \in S} c_i \cdot v(S), \forall S \subseteq N$ , 即  $x$  在博弈  $v$  的广义核心中, 但这与最初在广义核心之外选择  $x$  相矛盾.

2) 对于第 2 个条件, 因为  $v_x^{S^*}$  是关于  $\alpha_{|S^*}$  的平均单调博弈, 且式 (17) 成立, 又  $v_x^{S^*}$  是平均单调的,  $\{i_*\} \subseteq S^*$ , 可得

$$\begin{aligned} x_{i_*} &\geq \alpha_{i_*} \cdot \frac{v_x^{S^*}(S^*, c)}{\alpha(S^*)} \geq \\ \alpha_{i_*} \cdot \frac{v_x^{S^*}(\{i_*\}, c)}{\alpha(\{i_*\})} &= v_x^{S^*}(\{i_*\}, c). \end{aligned}$$

这意味着对于任何  $R \subseteq N \setminus S^*$ , 由

$$x_{i_*} \geq v_x^{S^*}(\{i_*\}, c) = \max_{\emptyset \subseteq R \subseteq N \setminus S^*} \{ \max_{j \in R \cup \{i_*\}} c_j \cdot v(R \cup \{i_*\}) - x(R) \},$$

有  $x(\{i_*\} \cup R) \geq \max_{j \in R \cup \{i_*\}} c_j \cdot v(R \cup \{i_*\})$ . 考虑到  $x(R) \geq \max_{i \in R} c_i \cdot v(R), \forall R \subseteq N \setminus S^* (S^* \in \mathcal{A}_T)$ , 可得  $x(R) \geq \max_{i \in R} c_i \cdot v(R), \forall R \subseteq N \setminus (S^* \setminus \{i_*\})$ , 所以  $(S^* \setminus \{i_*\}) \in \mathcal{A}_T$ , 这与  $S^*$  是集合  $\mathcal{A}_T$  中的最小联盟相矛盾. 因此,

可以断定在  $S^*$  中的参与者满足不等式 (16), 即

$$\frac{\max_{i \in T} c_i \cdot v(T) - x(T \setminus S^*)}{\alpha(S^*)} \cdot \alpha_i > x_i, \forall i \in S^*.$$

现定义向量  $t$  为

$$t_i = \frac{\max_{i \in T} c_i \cdot v(T) - x(T \setminus S^*)}{\alpha(S^*)} \cdot \alpha_i - x_i, \forall i \in S^*.$$

向量  $t = (t_i)_{i \in S^*}$  为博弈  $(S^*, w_{S^*})$  广义核心中的元素, 定义为

$$w_{S^*}(\emptyset) = 0;$$

$$w_{S^*}(S, c) =$$

$$\max_{\emptyset \subseteq Q \subseteq N \setminus S^*} \{ \max_{j \in S \cup Q} c_j \cdot v(S \cup Q) - x(S \cup Q) \}, \forall \emptyset \neq S \subseteq S^*.$$

这个结果可从  $v_x^{S^*}(S, c) = \max_{\emptyset \subseteq Q \subseteq N \setminus S^*} \{ \max_{j \in S \cup Q} c_j \cdot v(S \cup Q) - x(Q) \} = x(S) + w_{S^*}(S, c), \forall S \subseteq S^*$ , 及关于  $\alpha_{|S^*}$  的广义比例分配是博弈  $v_x^{S^*}$  广义核心中的元素这一事实中推断出.

构造一个关于  $x \in I(v, r, c) \setminus C(v, r, c)$  的合理的广义异议  $(T, y)$ . 取  $T \subseteq N$  为最大广义超量的最大联盟. 令  $\hat{i} \in S^*$  为  $S^*$  中的任意参与者, 其中  $S^*$  为  $\mathcal{A}_T$  中的最小联盟; 令  $\hat{j}$  为  $T$  之外的任意参与者, 即  $\hat{j} \in N \setminus T$ . 因此, 定义广义异议中的收益向量  $y \in R^T$  为

$$y_k = \begin{cases} x_i + t_i - \epsilon, & k = \hat{i}; \\ x_k + t_k + \frac{\epsilon}{t-1}, & k \in S^* \setminus \{\hat{i}\}; \\ x_k + \frac{\epsilon}{t-1}, & k \in T \setminus S^*. \end{cases}$$

其中:  $0 < \epsilon < t_i, t = |T|$ . 注意

$$y(T) = \sum_{k \in T} y_k =$$

$$\begin{aligned} &\sum_{k=\hat{i}} x_k + \sum_{k \in S^* \setminus \{\hat{i}\}} x_k + \sum_{k \in T \setminus S^*} x_k + \sum_{k=\hat{i}} t_k + \\ &\sum_{k \in S^* \setminus \{\hat{i}\}} t_k + \frac{|S^*| - 1}{|T| - 1} \cdot \epsilon + \frac{|T| - |S^*|}{|T| - 1} \cdot \epsilon - \epsilon = \end{aligned}$$

$$x(T) + t(S^*).$$

由于  $t = \frac{\max_{i \in T} c_i \cdot v(T) - x(T \setminus S^*)}{\alpha(S^*)} \cdot \alpha_i - x_i$ , 有

$$t(S^*) = \sum_{i \in S^*} t_i =$$

$$\sum_{i \in S^*} \alpha_i \cdot \frac{\max_{i \in T} c_i \cdot v(T) - x(T \setminus S^*)}{\alpha(S^*)} - \sum_{i \in S^*} x_i =$$

$$\alpha(S^*) \cdot \frac{\max_{i \in T} c_i \cdot v(T) - x(T \setminus S^*)}{\alpha(S^*)} - x(S^*) =$$

$$\max_{i \in T} c_i \cdot v(T) - x(T) + x(S^*) - x(S^*) =$$

$$\max_{i \in T} c_i \cdot v(T) - x(T).$$

因此

$$y(T) = x(T) + t(S^*) =$$

$$x(T) + \max_{i \in T} c_i \cdot v(T) - x(T) = \max_{i \in T} c_i \cdot v(T).$$

也就是说,  $(T, y)$  满足参与者  $i$  针对参与者  $j$  关于  $x$  的广义异议的条件为: 1)  $y_i > x_i, \forall i \in T$ ; 2)  $y(T) = \max_{i \in T} c_i \cdot v(T)$ .

关于这个广义异议的任何广义反异议  $(M, z)$  将通过联盟  $M \in \Gamma_{ji}$  形成, 取如下形式:

$$M = R_1 \cup R_2 \cup R_3 \cup \{\hat{j}\}.$$

其中:  $\hat{j} \notin R_3 \subseteq N \setminus T, R_2 \subseteq T \setminus S^*, R_1 \subseteq S^* \setminus \{\hat{i}\}$ . 接下来, 分3种情况证明.

1)  $[R_1 = R_2 = \emptyset]$ . 在这种情况下, 如果  $R_1 = R_2 = \emptyset$ , 则  $M = (R_3 \cup \{\hat{j}\}) \subseteq N \setminus T$ , 同时因为  $\max_{i \in M} c_i \cdot v(M) < x(M)$ , 所以没有广义反异议形成. 若  $x(M) \leq \max_{i \in M} c_i \cdot v(M), \max_{i \in M} c_i \leq \max_{i \in M \cup T} c_i$ , 且  $\max_{i \in T} c_i \leq \max_{i \in M \cup T} c_i$ , 则

$$\begin{aligned} & \max_{i \in T} c_i \cdot v(T) - x(T) \leq \\ & \max_{i \in T} c_i \cdot v(T) - x(T) + \max_{i \in M} c_i \cdot v(M) - x(M) \leq \\ & \max_{i \in T \cup M} c_i \cdot v(T) - x(T) + \max_{i \in M \cup T} c_i \cdot v(M) - x(M) \leq \\ & \max_{i \in T \cup M} c_i \cdot v(T \cup M) - x(T \cup M). \end{aligned}$$

这与  $T$  为最大广义超量的最大联盟的定义相矛盾.

2)  $[R_1 = \emptyset, R_2 \neq \emptyset]$ . 在这种情况下, 如果  $R_1 = \emptyset, R_2 \neq \emptyset$ , 则  $M = (R_2 \cup R_3 \cup \{\hat{j}\}) \subseteq N \setminus S^*$ . 由集合  $\mathcal{A}_T$  的条件②可知,  $x(M) \geq \max_{i \in M} c_i \cdot v(M)$ . 现因为  $M \cap T = R_2, M \setminus T = R_3 \cup \{\hat{j}\}$ , 且  $R_2 \subseteq T \setminus R^*, y_k = x_k + \frac{\epsilon}{t-1}, k \in T \setminus S^*$ , 可知  $y(R_2) > x(R_2)$ , 因此

$$\begin{aligned} z(M) &= z(R_2) + z(R_3 \cup \{\hat{j}\}) \geq \\ & y(M \cap T) + x(M \setminus T) = y(R_2) + x(R_3 \cup \{\hat{j}\}) > \\ & x(R_2) + x(R_3 \cup \{\hat{j}\}) = x(M) \geq \max_{i \in M} c_i \cdot v(M). \end{aligned}$$

也就是说,  $z(M) > \max_{i \in M} c_i \cdot v(M)$ , 这与广义反异议的条件相矛盾.

3)  $[R_1 \neq \emptyset]$ . 在这种情况下, 因为  $R_1 \neq \emptyset, M \cap T = R_1 \cup R_2, M \setminus T = R_3 \cup \{\hat{j}\}$ , 且  $y_k = x_k + t_k + \frac{\epsilon}{t-1}, k \in R_1 \subseteq S^* \setminus \{\hat{i}\}, y_k = x_k + \frac{\epsilon}{t-1}, k \in R_2 \subseteq T \setminus S^*$ , 以及  $t = |T| \geq 2$ , 可得  $\frac{|R_1| + |R_2|}{t-1} \cdot \epsilon > 0$ . 同时,  $t$  为  $(S^*, w_{S^*})$  广义核心中的元素, 有  $t(R_1) \geq \max_{i \in R_1} c_i \cdot w_{S^*}(R_1, c)$ . 此外, 根据  $w_{S^*}$  的定义及最大广义超量的最大联盟的定义, 有

$$\begin{aligned} z(M) &= z(R_1) + z(R_2) + z(R_3 \cup \{\hat{j}\}) > \\ & y(M \cap T) + x(M \setminus T) = \\ & x(R_1) + t(R_1) + x(R_2) + \\ & \frac{|R_1| + |R_2|}{t-1} \cdot \epsilon + x(R_3 \cup \{\hat{j}\}) = \\ & x(M) + t(R_1) + \frac{|R_1| + |R_2|}{t-1} \cdot \epsilon \geq \end{aligned}$$

$$x(M) + t(R_1) \geq$$

$$x(M) + \max_{i \in R_1} c_i \cdot w_{S^*}(R_1, c) = x(M) +$$

$$\max_{\emptyset \subseteq Q \subseteq N \setminus S^*} \{ \max_{i \in R_1 \cup Q} c_i \cdot v(R_1 \cup Q) - x(R_1 \cup Q) \} >$$

$$x(M) + \max_{i \in T} c_i \cdot v(M) - x(M) = \max_{i \in M} c_i \cdot v(M).$$

因此, 在第2)种和第3)种情况下, 证明了  $z(M) > \max_{i \in M} c_i \cdot v(M)$ , 这与  $(M, z)$  为广义反异议的条件相矛盾. 可以得出结论: 广义核心之外的广义转归不属于广义谈判集. 也就是说, 对于任何平均单调博弈, 其广义核心与广义谈判集相等.  $\square$

#### 4 算例分析

假设有4家企业依托自身拥有的专有性核心资源——知识资源, 组成知识联盟来共同开发某种产品, 即参与者集合  $N = \{A, B, C, D\}$ . 若每个企业单独开发必定投入大量的资金、技术、人员等有形或无形的成本, 甚至可能不会获取收益, 但是, 4家企业进行合作带来的总收益会比单独行动带来的收益大得多, 可为收益再分配提供资源条件, 进而利于知识联盟企业稳定发展.

设4家企业单独开发、2家或3家合作开发以及4家共同开发获取收益(4家企业合作博弈)的特征函数数值如下所示:

1) 企业A、B、C、D单独开发可获得收益0百万元, 即  $v(\{A\}) = v(\{B\}) = v(\{C\}) = v(\{D\}) = 0$ ;

2) 企业A和企业B合作开发, 企业C和企业D合作开发可获得收益0百万元, 即  $v(\{A, B\}) = v(\{C, D\}) = 0$ ;

3) 企业A和企业C合作开发可获得收益4百万元, 即  $v(\{A, C\}) = 4$ ;

4) 企业A和企业D合作开发, 企业B和企业C合作开发可获得收益5百万元, 即  $v(\{A, D\}) = v(\{B, C\}) = 5$ ;

5) 企业B和企业D合作开发, 企业A、企业B和企业C合作开发可获得收益6百万元, 即  $v(\{B, D\}) = v(\{A, B, C\}) = 6$ ;

6) 企业A、企业B和企业D合作开发可获得收益7百万元, 即  $v(\{A, B, D\}) = 7$ ;

7) 企业A、企业C和企业D合作开发可获得收益8百万元, 即  $v(\{A, C, D\}) = 8$ ;

8) 企业B、企业C和企业D合作开发可获得收益9百万元, 即  $v(\{B, C, D\}) = 9$ ;

9) 企业A、企业B、企业C和企业D合作开发可获得收益11百万元, 即  $v(\{A, B, C, D\}) = v(\{N\}) = 11$ .

由以上的基本情况可知, 企业A、企业B、企业C

和企业 D 组成任意知识联盟获得的收益都不小于每个企业单独行动带来的收益和, 即满足

$$\sum_{i \in N} x_i = x(N) = r \cdot v(N), \quad r \geq \max\{c_i : i \in N\};$$

$$x_i \geq c_i \cdot v(\{i\}), \quad i \in N.$$

现取  $r = 1, c_i = 1, 1 \leq i \leq 4$ , 即  $c = (1, 1, 1, 1)$ , 则模型计算如表 1 所示.

表 1 各企业及任意联盟获得的收益比较

企业 A	企业 B	企业 C	企业 D
$v(\{A\}) + v(\{B\}) = 0 \leq$	$v(\{B\}) + v(\{A\}) = 0 \leq$	$v(\{C\}) + v(\{A\}) = 0 <$	$v(\{D\}) + v(\{A\}) = 0 <$
$v(\{A, B\}) = 0$	$v(\{B, A\}) = 0$	$v(\{C, A\}) = 4$	$v(\{D, A\}) = 5$
$v(\{A\}) + v(\{C\}) = 0 <$	$v(\{B\}) + v(\{C\}) = 0 <$	$v(\{C\}) + v(\{B\}) = 0 <$	$v(\{D\}) + v(\{B\}) = 0 <$
$v(\{A, C\}) = 4$	$v(\{B, C\}) = 5$	$v(\{C, B\}) = 5$	$v(\{D, B\}) = 6$
$v(\{A\}) + v(\{D\}) = 0 <$	$v(\{B\}) + v(\{D\}) = 0 <$	$v(\{C\}) + v(\{D\}) = 0 \leq$	$v(\{D\}) + v(\{C\}) = 0 \leq$
$v(\{A, D\}) = 5$	$v(\{B, D\}) = 6$	$v(\{C, D\}) = 0$	$v(\{D, C\}) = 0$
$v(\{A\}) + v(\{B, C\}) = 5 <$	$v(\{B\}) + v(\{A, C\}) = 4 <$	$v(\{C\}) + v(\{A, B\}) = 0 <$	$v(\{D\}) + v(\{A, B\}) = 0 <$
$v(\{A, B, C\}) = 6$	$v(\{B, A, C\}) = 6$	$v(\{C, A, B\}) = 6$	$v(\{D, A, B\}) = 7$
$v(\{A\}) + v(\{B, D\}) = 6 <$	$v(\{B\}) + v(\{A, D\}) = 5 <$	$v(\{C\}) + v(\{A, D\}) = 5 <$	$v(\{D\}) + v(\{A, C\}) = 4 <$
$v(\{A, B, D\}) = 7$	$v(\{B, A, D\}) = 7$	$v(\{C, A, D\}) = 8$	$v(\{D, A, C\}) = 8$
$v(\{A\}) + v(\{C, D\}) = 0 <$	$v(\{B\}) + v(\{C, D\}) = 0 <$	$v(\{C\}) + v(\{B, D\}) = 6 <$	$v(\{D\}) + v(\{B, C\}) = 5 <$
$v(\{A, C, D\}) = 8$	$v(\{B, C, D\}) = 9$	$v(\{C, B, D\}) = 9$	$v(\{D, B, C\}) = 9$
$v(\{A\}) + v(\{B, C, D\}) = 9 <$	$v(\{B\}) + v(\{A, C, D\}) = 8 <$	$v(\{C\}) + v(\{A, B, D\}) = 7 <$	$v(\{D\}) + v(\{A, B, C\}) = 6 <$
$v(\{A, B, C, D\}) = 11$	$v(\{B, A, C, D\}) = 11$	$v(\{C, A, B, D\}) = 11$	$v(\{D, A, B, C\}) = 11$

根据以上收益值及向量  $\alpha = (1, 2, 3, 4)$ , 可使得对所有的  $S \subseteq T \subseteq N$ , 满足  $\alpha(T) \cdot v(S) \leq \alpha(S) \cdot v(T)$ . 也就是说, 可构建知识联盟利益协同的平均单调博弈模型. 因为已证明其广义核心非空, 一定存在最优再分配方案, 且平均单调博弈广义核心与谈判集相等, 所以可根据平均单调博弈的广义核心或广义谈判集任一计算模型, 结合实际情况调整参数  $r$  和  $c_i$  的值, 实现保留知识联盟博弈总收益值的一部分, 解决知识联盟企业间的利益再分配问题, 以便提高知识联盟绩效, 进而使知识联盟可持续发展.

## 5 结 论

本文在平均单调博弈的基础上, 建立其广义核心及谈判集解的收益再分配模型, 提出了广义比例分配模型, 诠释了广义简化博弈与平均单调博弈的对应关系, 及其广义比例分配与广义核心解的包含关系, 并证明了平均单调博弈的广义核心与谈判集相等, 说明了其广义核心的存在性. 给出的产品开发企业知识联盟收益再分配应用算例, 为研究知识联盟利益再分配机制提供了新视角. 探讨扩展型的广义博弈模型及其解集, 并应用于各种联盟的收益分配及再分配领域, 具有一定的理论及实用价值, 需要更多研究者的共同努力.

## 参考文献(References)

- [1] 李彤, 张强, 孙红霞. 基于联盟结构合作博弈的 Selectope 解集[J]. 系统工程理论与实践, 2011, 31(9): 1745-1752. (Li T, Zhang Q, Sun H X. Selectope of games with coalitional structure[J]. Systems Engineering-Theory and

- Practice, 2011, 31(9): 1745-1752.)
- [2] 王军民, 杜河建. 基于随机支付的合作博弈分析[J]. 控制与决策, 2010, 25(1): 157-160. (Wang J M, Du H J. Analysis of cooperation game with random payoff[J]. Control and Decision, 2010, 25(1): 157-160.)
- [3] Rodica Branzei, Dinko Dimitrov, Stef Tijs. Models in cooperative game theory[M]. Nijmegen, 2008.
- [4] Sprumont Y. Population monotonic allocation schemes for cooperative games with transferable utility[J]. Games and Economic Behavior, 1990, 50(2): 378-394.
- [5] Khmelitskaya A B, Yanovskaya E B. Owen coalitional value without additivity axiom[J]. Mathematical Methods of Operations Research, 2007, 66(2): 255-261.
- [6] Voorneveld M, Tijs S, Grahn S. Monotonic allocation schemes in clan games[J]. Mathematical Methods of Operations Research, 2002, 56(3): 439-449.
- [7] Josep M. Izquierdo and Carles Rafels. Average monotonic cooperative games[J]. Games and Economic Behavior, 2001, 36(2): 174-192.
- [8] Ron Holzman. The comparability of the classical and the Mas-Colell bargaining sets[J]. Int J of Game Theory, 2001, 29(4): 543-553.
- [9] Bezalel Peleg, Peter Sudhölter. On the non-emptiness of the Mas-Colell bargaining set[J]. J of Mathematical Economics, 2005, 41(8): 1060-1068.
- [10] Tamás Solymosi. Bargaining sets and the core in partitioning games[J]. Central European J of Operations Research, 2008, 16(4): 425-440.

(责任编辑: 齐 霁)