

基于均匀设计的张量积分布补偿控制系统设计

崔建峰, 张科, 吕梅柏

(西北工业大学 a. 航天学院, b. 航天飞行动力学国家级重点实验室, 西安 710072)

摘要: 现有的张量积分布补偿控制方法计算负荷会随着变参数维数的增加而迅速增大, 这使得该方法在中高维 LPV 系统上的应用受到限制. 针对此问题, 提出一种基于均匀设计的张量积分布补偿控制方法, 该方法通过均匀设计获取 LPV 系统的离散张量, 使离散数据与变参数维数弱相关. 仿真结果表明, 基于均匀设计的张量积分布补偿控制可以在控制效果基本不变的情况下, 有效降低控制算法的计算负荷.

关键词: 线性变参数系统; 张量乘积模型转换; 多胞系统; 均匀设计; 倒立摆

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Tensor product distributed compensation control method based on uniform design

CUI Jian-feng, ZHANG Ke, LÜ Mei-bo

(a. School of Astronautics, b. National Key Laboratory of Aerospace Flight Dynamics, China. Correspondent: CUI Jian-feng, E-mail: webehero@126.com)

Abstract: The computational load of traditional tensor product distributed compensation (TPDC) control method explodes with the dimensionality of the parameter vector of the parameter-varying state-space model. So it is difficult for the traditional method to be applied in the high dimensional LPV system. Therefore, a TPDC control method based on uniform design is proposed, which method utilizes the uniform design to acquire the discretized tensor of the LPV system. As a consequence, the discretized data have little correlation with the dimensionality of the parameter vector. The simulation results show that the control method can reduce the computational load effectively without degradation of the control performance.

Keywords: linear parameter varying system; tensor product model transformatin; polytopic system; uniform design; inverted pendulum

0 引言

张量积分布补偿控制 (TPDC) 是一种基于多胞 LPV (linear parameter varying) 模型的鲁棒控制方法. 该方法首先使用张量积 (TP) 模型转换得到系统的多胞 LPV 模型, 然后基于模糊控制中平行分布补偿控制的思想, 使用线性矩阵不等式 (LMI) 获取系统的多胞形鲁棒控制器. 该控制方法最早由 Baranyi 等^[1-2]提出, 并成功应用于 TORA (translational oscillators with rotating actuator)^[3]、弹性机翼^[4]等控制系统研究中, 取得了良好的控制效果. 近几年来, 国内秦伟伟、孙长银、王明昊等也尝试将该控制方法应用于高超声速飞行器的跟踪控制中^[5-7], 仿真结果显示, 该控制方法对于高超声速飞行器这样的高度非线性系统, 也显示出了较好的控制能力.

TPDC 控制日益引起研究人员关注的主要原因在于方法本身的广泛适应能力和数值求解特征. 该方法中, 无论是获取系统多胞模型的 TP 模型转换, 还是后续基于 LMI 的控制器求解均通过数值算法完成, 无需经过求导、仿射分解等较为复杂的, 甚至难以进行的解析推导过程^[3]. 该方法的核心是 TP 模型转换——一种可以将任意形式的 LPV 模型以一种统一的处理方式转换为多胞模型的数值方法.

这种统一的处理方式使得 TPDC 控制可适用的对象广泛, 并且, 由于生成的是统一形式的多胞模型结构, 也为后续使用 LMI 求解控制器带来便利. 然而, TP 模型转换也给 TPDC 控制的应用带来一定的限制. TP 模型转换的计算负荷会随着 LPV 模型的变参数维数及网格划分数目而迅速增加; TP 模型转换所产生

收稿日期: 2013-11-19; 修回日期: 2014-03-17.

基金项目: 航空基金项目(20110153003); 西北工业大学基础研究基金项目(GCKY1006).

作者简介: 崔建峰(1980—), 男, 博士生, 从事飞行器制导、控制与仿真的研究; 张科(1968—), 男, 教授, 博士生导师, 从事飞行器制导、控制与仿真等研究.

的顶点线性定常 (LTI) 系统数目也直接影响到 LMI 求解的计算复杂度. 因此, 现有的 TPDC 控制算法对于中高维 LPV 系统的应用还难以在普通硬件平台上直接实现. 针对这一问题, 本文提出一种基于均匀设计的 TPDC 控制方法, 该方法将借助均匀设计这一试验设计方法来减轻 TPDC 控制算法的计算负荷, 增加其对中高维 LPV 系统的求解能力.

1 问题描述

1.1 现有 TPDC 控制设计过程

考虑一个 LPV 系统

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{p}(t)) & \boldsymbol{B}(\boldsymbol{p}(t)) \\ \boldsymbol{C}(\boldsymbol{p}(t)) & \boldsymbol{D}(\boldsymbol{p}(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) \\ \boldsymbol{u}(t) \end{bmatrix}. \quad (1)$$

其中: 系统输入 $\boldsymbol{u}(t) \in \mathbf{R}^k$, 系统输出 $\boldsymbol{y}(t) \in \mathbf{R}^l$, 系统状态 $\boldsymbol{x}(t) \in \mathbf{R}^m$; $\boldsymbol{p}(t) \in \Omega$ 为 N 维变参数向量, 其取值位于闭域 $\Omega = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_N, b_N] \subset \mathbf{R}^N$, 变参数 $\boldsymbol{p}(t)$ 可以包含系统状态 $\boldsymbol{x}(t)$ 中的一部分变量.

该 LPV 系统的系统矩阵可以表示为

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{p}(t)) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{p}(t)) & \boldsymbol{B}(\boldsymbol{p}(t)) \\ \boldsymbol{C}(\boldsymbol{p}(t)) & \boldsymbol{D}(\boldsymbol{p}(t)) \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{O \times I}. \quad (2)$$

其中: $O = m + k$, $I = m + l$.

对于 TPDC 控制, 首先需要使用 TP 模型转换方法获取 LPV 系统 (1) 在闭域 Ω 内的多胞模型. 这一数值转换方法通常包含以下 3 个主要步骤.

1) 离散. 将给定的系统矩阵 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{p}(t))$ 在闭域 Ω 上进行网格划分; 在变参数网格点上离散化 LPV 系统矩阵, 并将离散后的系统矩阵 $\boldsymbol{S}^D(\boldsymbol{p}(t))$ 存储到张量 \boldsymbol{S}^D 中. 上述离散化过程中一般进行等距网络划分, 即

$$\theta_{n, h_n} = a_n + \frac{b_n - a_n}{H_n - 1}(h_n - 1), \quad h_n = 1, 2, \cdots, H_n,$$

每一维格点数目为 H_n , 张量 $\boldsymbol{S}^D \in \mathbf{R}^{H_1 \times \cdots \times H_N \times O \times I}$.

2) 张量分解. 对张量 \boldsymbol{S}^D 的前 N 维应用高阶奇异值分解 (HOSVD), 根据精度需要, 在每一维中舍弃为 0 或者较小的奇异值, 以及与之相应的奇异值向量, 则有

$$\boldsymbol{S}^D \approx_{\epsilon} \boldsymbol{S} \times_1 \boldsymbol{w}_1(p_1(t)) \times_2 \cdots \times_N \boldsymbol{w}_N(p_N(t)), \quad (3)$$

或简化表示为

$$\boldsymbol{S}^D \approx_{\epsilon} \boldsymbol{S} \underset{\boxtimes}{\times}_{n=1}^N \boldsymbol{w}_n(p_n(t)). \quad (4)$$

其中: $\boldsymbol{S} \in \mathbf{R}^{r_1 \times \cdots \times r_N \times O \times I}$ 为变换后所得到的系统核心张量, 核心张量中存储的为系统的顶点 LTI 系统矩阵; $\boldsymbol{w}_n(p_n(t)) \in \mathbf{R}^{r_n}$ 为与核心张量相应的权重系数函数向量; \times_n 为 n -模张量-矩阵乘积符号; ϵ 表示上述变换过程中的近似误差理论上限, 可按下式进行计算:

$$\epsilon = \left(\left\| \boldsymbol{S}^D - \boldsymbol{S} \underset{\boxtimes}{\times}_{n=1}^N \boldsymbol{w}_n(p_n(t)) \right\|_{L_2} \right)^2 \leq \sum_k \sigma_k^2, \quad (5)$$

σ_k 为变换过程中根据精度需要而舍弃的较小奇异值.

3) 提取多胞模型. 由 2) 所获取的权重系数矩阵一般情况下是非凸的, 为了保证最后生成的为多胞模型, 还需要对权重系数矩阵进行凸包变换^[2], 使其满足 SN (sum normalization), NN (non negativeness) 和 NO (normality) 或 INO-RNO (inverse-NO and relaxed-NO) 性质^[8-9]. 在凸包变换中, 需保证以下等式成立:

$$\boldsymbol{S} \underset{\boxtimes}{\times}_{n=1}^N \boldsymbol{w}_n(p_n(t)) = \bar{\boldsymbol{S}} \underset{\boxtimes}{\times}_{n=1}^N \bar{\boldsymbol{w}}_n(p_n(t)). \quad (6)$$

因此, 最后所得到的满足凸包条件的核心张量 $\bar{\boldsymbol{S}}$ 可按下式计算:

$$\bar{\boldsymbol{S}} = \boldsymbol{S}^D \underset{\boxtimes}{\times}_{n=1}^N (\bar{\boldsymbol{w}}_n(p_n(t)))^+, \quad (7)$$

其中“+”表示对矩阵求伪逆.

通过提取核心张量中存储的顶点 LTI 系统矩阵, 可以得到 LPV 系统的 TP 多胞模型

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) \end{bmatrix} \approx_{\epsilon} \sum_{r=1}^R \bar{\boldsymbol{w}}_r(\boldsymbol{p}(t)) \bar{\boldsymbol{S}}_r \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) \\ \boldsymbol{u}(t) \end{bmatrix}, \quad (8)$$

其中 $R = r_1 \times \cdots \times r_N$ 为凸包顶点个数.

在得到 LPV 系统的 TP 多胞模型后, 便可使用基于 LMI 的平行分布补偿控制来设计控制器. 控制器输出 $\boldsymbol{u}(t)$ 具有如下形式:

$$\boldsymbol{u}(t) = - \left(\sum_{r=1}^R \bar{\boldsymbol{w}}_r(\boldsymbol{p}(t)) \boldsymbol{F}_r \right) \boldsymbol{x}(t), \quad (9)$$

其中增益矩阵 \boldsymbol{F}_r 可以通过基于 LMI 的稳定理论对顶点 LTI 系统求解获得.

1.2 计算复杂度问题

TPDC 控制设计的计算复杂度主要与 LPV 系统的变参数维数、离散网格密度及多胞模型中顶点 LTI 系统的数目相关. LPV 系统的变参数维数及离散网格密度直接决定了 TP 模型转换过程中离散张量 \boldsymbol{S}^D 的大小. 离散张量越大, HOSVD 计算越困难. 多胞模型中顶点 LTI 系统的数目直接决定了并行分布补偿控制器求解过程中待计算的 LMI 数目. 例如: 对于一个系统矩阵 $\boldsymbol{S} \in \mathbf{R}^{6 \times 6}$ 的 LPV 系统, 如果变参数向量维数为 6, 在离散时每维划分 100 个网格点, 则所得到的张量包含 3.6×10^{13} 个元素; 如果各元素只使用单精度格式存储, 则需要大约 523.8 TB 的物理存储空间, 当对张量进行 HOSVD 计算时, 普通硬件平台是难以完成的. 退一步而言, 假设可以进行 HOSVD 计算, 若计算后核心张量的每维保留 3 个奇异值, 则得到的顶点 LTI 系统数目为 729 个; 根据文献 [3] 提供的并行分布补偿控制器求解定理, 最后需要计算 266 814 个 LMI, 这对于普通硬件平台而言, 同样是难以完成的. 这将使得 TPDC 控制在中高维 LPV 系统应用时受到很大的限制.

2 基于均匀设计的TPDC控制方法

计算复杂度问题形成的根本原因在于TPDC控制设计过程中离散时产生的数据与变参数维数呈指数相关. 当这些数据组成张量进行HOSVD计算时, 只能根据各维分别进行奇异值分解, 这将导致并行分布补偿控制器求解时的LMI个数也与变参数维数指数相关. 因此, 希望寻找一种数据产生方法, 其产生的数据与变参数维数弱相关. 为此, 本文提出基于均匀设计的TPDC控制方法, 以减轻TPDC控制算法的计算负荷.

2.1 均匀设计简述

均匀设计是我国数学家王元和方开泰提出的一种将数论方法用于数理统计而得到的试验选优方法, 其基本思想是从均匀性原则出发, 使试验点均衡地散布在整个取值空间内, 让每个试验点都具有充分的代表性, 以求通过最少的代表点来获取最多的系统信息^[10]. 均匀设计的一个显著特征就是总的试验点数在保证均匀性度量的前提下可以只与因素(变参数)水平数(格点)相关, 而与因素个数(维数)成弱相关. 均匀设计的这一特征显然可以用于解决现有TPDC控制方法的计算复杂度问题.

2.2 基于均匀设计的TPDC控制设计过程

对于式(1)所表示的LPV系统, 基于均匀设计的TPDC控制设计过程可以按下述步骤执行.

1) 构建均匀设计表. 在一定的均匀性测度指标下, 根据好格子点法、方幂好格子点法等均匀设计构建方法得到均匀设计表^[10]. 由于 $\mathbf{p}(t)$ 为 N 维变参数向量, 如果各维希望划分的格点数为 M , 则需要得到的均匀设计表为 $U_M(M^N)$.

2) 根据均匀设计表离散系统. LPV系统的变参数 $\mathbf{p}(t) \in \Omega : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_N, b_N]$, 因此, 需要将均匀设计表 $U_M(M^N)$ 中各因素的水平值映射到变参数闭域 Ω 上, 从而, 定义离散点 $\mathbf{g}_i = (g_{1,i}, \cdots, g_{N,i})$, $i = 1, 2, \cdots, M$. 显然, 全部离散点的个数为 M . 在各离散点上离散系统矩阵 $\mathbf{S}(\mathbf{p}(t))$, 并将其存储到张量 \mathcal{S}^D 中, 此时, 张量 $\mathcal{S}^D \in \mathbf{R}^{M \times O \times I}$.

3) 进行张量HOSVD分解. 对张量 \mathcal{S}^D 的第1维应用HOSVD; 根据精度需要, 舍弃为0或者较小的奇异值 σ_k , 以及与之相应的奇异值向量, 有下述关系成立:

$$\mathcal{S}^D \approx_{\epsilon} \mathcal{S} \times_1 \mathbf{U}_1. \quad (10)$$

其中: $\mathcal{S} \in \mathbf{R}^{T \times O \times I}$ 为变换后所得到的系统核心张量, $T \leq M$; $\mathbf{U}_1 \in \mathbf{R}^{M \times T}$ 为与核心张量相应的权重系数

矩阵; ϵ 表示上述变换过程中的近似误差理论 upper, 同样可以按式(1)进行计算.

4) 凸包转换. 上步所获取的权重系数矩阵是非凸的, 为了保证最后生成的为多胞模型, 还需要对权重系数矩阵进行凸包变换, 使其满足SN、NN和NO或INO-RNO性质. 但是, 基于均匀设计所得到的权重系数矩阵 \mathbf{U}_1 并不能直接用于NN条件变换^[8], 因为均匀设计的稀疏性决定了权重系数矩阵 \mathbf{U}_1 中的最小值并不等价于闭域 Ω 上的权重系数最小值, 因此, 为了实现NN条件变换, 还需要对权重系数矩阵 \mathbf{u}_1 进行适当处理.

① 对于权重系数矩阵 \mathbf{U}_1 , 其第 i 列定义了一个离散权重系数函数 $w_i(\mathbf{p}(t))$, 第 i 列的某元 $u_{m,i}$ 定义了离散权重函数 $w_i(\mathbf{p}(t))$ 在一个离散点 $\mathbf{g}_m = (g_{1,m}, \cdots, g_{N,m})$ 上的权值, 即

$$w_i(\mathbf{g}_m) = u_{m,i}. \quad (11)$$

根据这些离散权重信息可以在闭域 Ω 上使用多元回归方法^[10]获取连续权重系数函数 $W_i(\mathbf{p}(t))$. 通过连续权重系数函数 $W_i(\mathbf{p}(t))$, 可以计算任意一组变参数向量 $\mathbf{p}_d(t)$ 对应的权值.

② 在闭域 Ω 上通过等距网格划分 $\theta_{n,h_n} = a_n + \frac{b_n - a_n}{H - 1}(h - 1)$ 计算连续权重函数 $W_i(\mathbf{p}(t))$ 的最小值 $u_{r_i,i}^{\min}$, 其中 $u_{r_i,i}^{\min}$ 表示连续权重函数 $W_i(\mathbf{p}(t))$ 在离散点 $\mathbf{g}_{r_i} = (g_{1,r_i}, \cdots, g_{N,r_i})$ 的取值. 在此, 可根据普通硬件平台的运算能力, 适当选择格点数 H .

③ 计算连续权重函数 $W_j(\mathbf{p}(t))$ 在离散点 \mathbf{g}_{r_i} 上的权值 $u_{r_i,j}$, 其中 $j = 1, 2, \cdots, T, j \neq i$; 然后根据这些值构建一个 $T \times T$ 的矩阵

$$\mathbf{U}_d = \begin{bmatrix} u_{r_1,1}^{\min} & \cdots & u_{r_1,i} & \cdots & u_{r_1,T} \\ \vdots & \ddots & \cdots & \ddots & \vdots \\ u_{r_i,1} & \cdots & u_{r_i,i}^{\min} & \cdots & u_{r_i,T} \\ \vdots & \ddots & \cdots & \ddots & \vdots \\ u_{r_T,1} & \cdots & u_{r_T,i} & \cdots & u_{r_T,T}^{\min} \end{bmatrix}_{T \times T}. \quad (12)$$

④ 将 \mathbf{U}_d 与 \mathbf{U}_1 联合构成权重系数矩阵 $\mathbf{U}_{1a} = [\mathbf{U}_1^T, \mathbf{U}_d^T]^T$; 然后基于权重系数矩阵 \mathbf{U}_{1a} 进行相应的凸包转换, 得到 $\bar{\mathbf{U}}_{1a}$.

⑤ 通过选取权重系数矩阵 $\bar{\mathbf{U}}_{1a}$ 的前 M 行即可得到所需的满足凸包性质的权重系数矩阵 $\bar{\mathbf{U}}_1$. 同样地, 在凸包变换中, 需要保证以下等式成立:

$$\mathcal{S} \times_1 \mathbf{U}_1 = \bar{\mathcal{S}} \times_1 \bar{\mathbf{U}}_1. \quad (13)$$

因此, 最后所得到的满足凸包条件的核心张量 $\bar{\mathcal{S}}$ 可按下式计算:

$$\bar{S} = S^D \times_1 (\bar{U}_1)^+. \quad (14)$$

5) 提取 TP 多胞模型. 在获取满足凸包条件的核心张量与权重系数矩阵后, 便可提取核心张量中存储的顶点 LTI 系统矩阵, 得到 LPV 系统的 TP 多胞模型 (8). 但其中的权重函数 $\bar{w}_r(\mathbf{p}(t))$ 需要通过在离散权重系数矩阵 \bar{U}_1 上应用多元回归分析得到. 另外需要说明的是: TP 多胞模型中凸包顶点个数 $R = T$.

6) 基于 LMI 求解平行分布补偿控制器. 得到 LPV 系统的 TP 多胞模型后, 便可基于 LMI 求取平行分布补偿控制器.

3 仿真对比分析

为了说明基于均匀设计的 TPDC 控制方法对于中高维 LPV 系统的求解能力, 以平行单级双倒立摆的控制为例进行仿真对比分析.

3.1 并行单级双倒立摆数学模型

平行单级双倒立摆的机械结构如图 1 所示, 其精确数学模型可参见文献 [11].

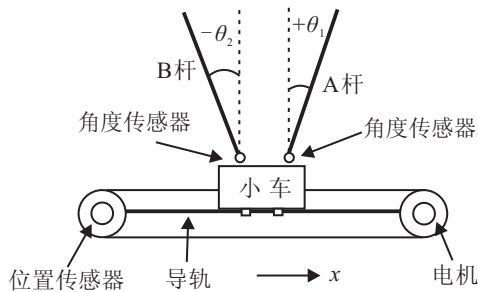


图 1 平行单级双倒立摆结构图

根据精确数学模型, 定义变参数

$$\mathbf{p} = [\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2]^T,$$

状态变量

$$\mathbf{x} = [x, \theta_1, \theta_2, \dot{x}, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2]^T,$$

控制输入 $u = F$, 则可以得到 LPV 的系统矩阵

$$S(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & s_{42} & s_{43} & 0 & s_{45} & s_{46} & \frac{4}{3A_3} \\ 0 & s_{52} & s_{53} & 0 & s_{55} & s_{56} & -\frac{\cos \theta_1}{l_1 A_3} \\ 0 & s_{62} & s_{63} & 0 & s_{65} & s_{66} & -\frac{\cos \theta_2}{l_2 A_3} \end{bmatrix}.$$

其中

$$A_1 := 1 - \frac{3}{4} \cos^2 \theta_1 m_1,$$

$$A_2 := 1 - \frac{3}{4} \cos^2 \theta_2 m_2,$$

$$A_3 := \frac{3}{4} (M + A_1 + A_2),$$

$$s_{42} = -\frac{m_1 g \sin \theta_1 \cos \theta_1}{\theta_1 A_3},$$

$$s_{43} = -\frac{m_2 g \sin \theta_2 \cos \theta_2}{\theta_2 A_3},$$

$$s_{45} = -\frac{4m_1 l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1}{3A_3},$$

$$s_{46} = -\frac{4m_2 l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2}{3A_3},$$

$$s_{52} = -\frac{(M + m_1 + A_2) g \sin \theta_1}{l_1 \theta_1 A_3},$$

$$s_{53} = -\frac{3m_2 g \sin \theta_2 \cos \theta_2 \cos \theta_1}{4l_1 \theta_2 A_3},$$

$$s_{55} = -\frac{m_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \cos \theta_1}{A_3},$$

$$s_{56} = -\frac{m_2 l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_1 \sin \theta_2}{l_1 A_3},$$

$$s_{62} = -\frac{3m_1 g \sin \theta_1 \cos \theta_1 \cos \theta_2}{4l_2 \theta_1 A_3},$$

$$s_{63} = -\frac{(M + m_2 + A_1) g \sin \theta_2}{l_2 \theta_2 A_3},$$

$$s_{65} = -\frac{m_1 l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \cos \theta_2}{l_2 A_3},$$

$$s_{66} = -\frac{m_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \cos \theta_2}{A_3}.$$

取 $M = 1.0 \text{ kg}$, $m_1 = 0.1 \text{ kg}$, $m_2 = 0.3 \text{ kg}$, $l_1 = 0.2 \text{ m}$, $l_2 = 0.6 \text{ m}$, $g = 9.8 \text{ m/s}^2$. 变参数取值闭域为

$$\mathbf{p}(t) \in \left[-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{12} \right] \times \left[-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{12} \right] \times [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi].$$

3.2 传统 TPDC 控制器求解

对于给定的变参数 \mathbf{p} , 进行网络划分 $80 \times 80 \times 20 \times 20$, 得到离散张量 $S^D \in \mathbf{R}^{80 \times 80 \times 20 \times 20 \times 6 \times 7}$. 应用 HOSVD, 并舍弃较小奇异值, 得到的奇异值分解结果如表 1 所示.

表 1 传统 TPDC 控制奇异值分解结果

张量维	第 1 维	第 2 维	第 3 维	第 4 维
1 阶奇异值	72 395	72 396	72 395	72 396
2 阶奇异值	321	151.1	321	35.5
3 阶奇异值	276.6	35.5	-	-
4 阶奇异值	0.87	0.12	-	-
5 阶奇异值	0.098	0.056	-	-

从张量分解后的核心张量中可以提取一个 100 顶点的多胞 LPV 模型, 其调度参数权重系数函数如图 2 所示.

采用参考文献 [12] 中的平行分布补偿控制器设计方法, 并结合前面得到的权重系数函数, 即可得到式 (9) 表示的多胞形式鲁棒变增益控制器, 其中 $R = 100$.

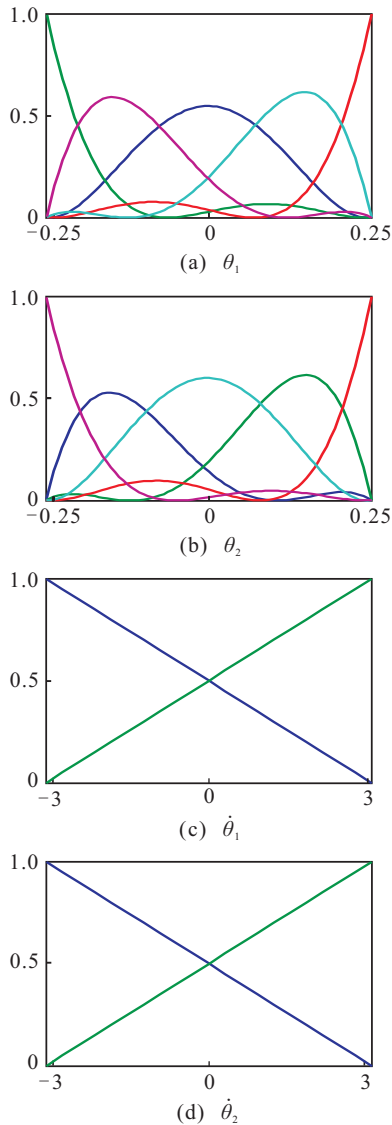


图2 变参数的权重系数函数

3.3 基于均匀设计的TPDC控制器求解

对平行单级双倒立摆应用基于均匀设计的TPDC控制设计方法。

因为变参数维数为4, 根据均匀性测度中心化 L_2 -偏差 $CD_2 \leq 0.025$, 选用均匀设计表 $U_{80}(80^4)$ 对系统进行离散, 获取离散张量 $S^D \in \mathbf{R}^{80 \times 6 \times 7}$. 应用HOSVD, 并舍弃较小奇异值, 得到的奇异值分解结果为 $\sigma_1 = 42.56, \sigma_2 = 0.18, \sigma_3 = 0.16, \sigma_4 = 0.08, \sigma_5 = 0.02$, 其对应的权重系数函数如图3所示. 最终得到的顶点LTI系数的数目为5.

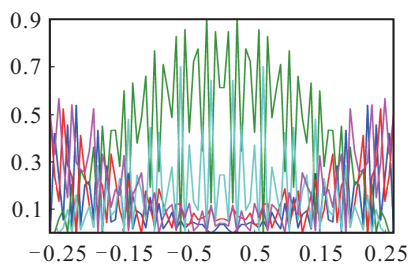


图3 变参数的权重系数函数

对于得到的TP多胞模型, 其平行分布补偿控制器同样依据参考文献[12]中的平行分布补偿控制器设计方法进行求解, 结合多元回归分析所得到的权重系数函数, 最终可求得相应的式(9)表示的多胞形式鲁棒变增益控制器, 其中 $R = 5$.

3.4 计算复杂度与控制效果对比

表2给出了基于均匀设计的TPDC控制方法与现有TPDC控制方法的计算复杂度对比. 从表2可以看出, 基于均匀设计的TPDC控制方法在计算复杂度上大为降低. 然而, 需要指出的是, 基于均匀设计的TPDC控制方法TP模型转换所得到的多胞模型, 与原有非线性LPV模型间的相对误差大于现有TPDC控制方法, 这是由均匀设计本身的稀疏特性决定的, 但对最终的控制效果影响有限, 可通过后面的仿真情况观察它的影响程度.

表2 计算复杂度对比

方法	格点数	顶点LTI	相对误差	求解LMI耗时/s
现有TPDC	$80^2 \times 20^2$	100	4.2e-6	576.2
本文TPDC	80	5	0.0013	0.792

在初始状态为 $(0, -5 \text{ deg}, 5 \text{ deg}, 0, 0, 0)$ 的情况下, 分别采用两种TPDC控制器对平行单级双倒立摆的非线性模型进行仿真验证, 所得到的系统状态中 θ_1 和 θ_2 的响应曲线如图4所示, 控制输入响应曲线如图5所示. 从图中可以看出, 基于均匀设计的TPDC控制效果与现有TPDC控制效果相当, TP多胞模型近似的相对误差变大对基于均匀设计的TPDC控制效果影响有限.

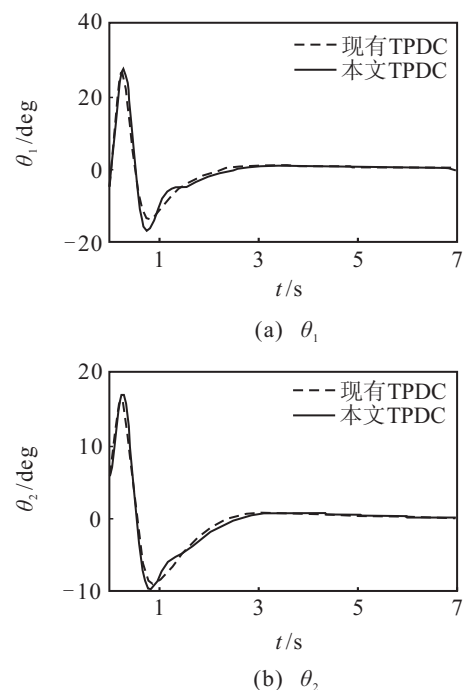


图4 θ_1 与 θ_2 状态响应曲线

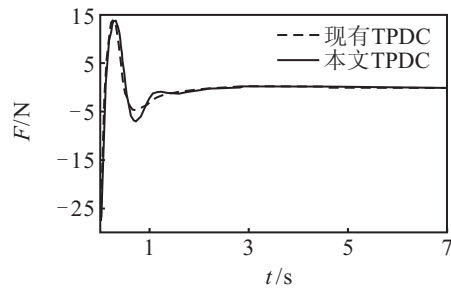


图5 控制输入响应曲线

4 结 论

本文针对现有TPDC控制的计算复杂度问题,提出一种基于均匀设计的TPDC控制方法.该方法通过均匀设计获取LPV系统的离散张量,以使离散数据与变参数维数弱相关.这样即可以降低离散张量HOSVD的计算负荷,也可以减少求解并行分布补偿控制器的LMI个数.仿真结果表明,基于均匀设计的TPDC控制与现有TPDC控制相比,在控制效果基本相当的情况下,计算复杂度大为降低,使得TPDC控制对中高维LPV系统的求解能力得到明显提升.

参考文献(References)

- [1] Baranyi P, Tikk D, Yam Y, et al. From differential equations to pdc controller design via numerical transformation[J]. *Computers in Industry*, 2003, 51(3): 281-297.
- [2] Baranyi P. TP model transformation as a way to LMI based controller design[J]. *IEEE Trans on Industrial Electronics*, 2004, 51(2): 387-400.
- [3] Petres Z, Baranyi P, Hashimoto H. Approximation and complexity trade-off by TP model transformation in controller design: A case study of the TORA system[J]. *Asian J of Control*, 2010, 12(5): 575-585.
- [4] Baranyi P, Korondi P, Hashimoto H. Global asymptotic stabilization of the prototypical aeroelastic wing section via TP model transformation[J]. *Asian J of Control*, 2005, 7(2): 99-111.
- [5] 秦伟伟, 郑志强, 刘刚, 等. 高超声速飞行器的LPV鲁棒变增益控制[J]. *系统工程与电子技术*, 2011, 31(6): 1327-1331.
- [6] (Qin W W, Zheng Z Q, Liu G, et al. Robust variable gain control for hypersonic vehicles based on LPV[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2011, 31(6): 1327-1331.)
- [7] Sun C Y, Huang Y Q, Qian C S, et al. On modeling and control of a flexible air-breathing hypersonic vehicle based on LPV method[J]. *Frontiers of Electrical and Electronic Engineering*, 2012, 7(1): 56-68.
- [8] 王明昊, 刘刚, 赵鹏涛, 等. 高超声速飞行器的LPV变增益状态反馈 H_∞ 控制[J]. *宇航学报*, 2013, 34(4): 488-495.
- [9] (Wang M H, Liu G, Zhao P T, et al. Variable gain state feedback H_∞ control for hypersonic vehicle based on LPV[J]. *J of Astronautics*, 2013, 34(4): 488-495.)
- [10] Yeung Y, Baranyi P, Chi-Tin Y. Reduction of fuzzy rule base via singular value decomposition[J]. *IEEE Trans on Fuzzy Systems*, 1999, 7(2): 120-132.
- [11] Várkonyi P, Tikk D, Korondi P, et al. A new algorithm for rno-ino type tensor product model representation[C]. *Proc of IEEE 9th Int Conf on Intelligent Engineering Systems*. Athens, 2005: 263-266.
- [12] 唐明, 陈宁. 工程试验优化设计[M]. 北京: 中国计量出版社, 2009: 269-280.
- [13] (Tang M, Chen N. Engineering optimal design of experiments[M]. Beijing: China Jiliang Publishing House, 2009: 269-280.)
- [14] 张春, 徐开红, 江明. 基于滑模的平行双倒立摆系统稳定控制研究[J]. *昆明理工大学学报: 理工版*, 2008, 33(3): 78-81.
- [15] (Zhang C, Xu K H, Jiang M. Stabilization control of parallel type inverted pendulum based on sliding mode[J]. *J of Kunming University of Science and Technology: Science and Technology*, 2008, 33(3): 78-81.)
- [16] Tanaka K, Wang H. Fuzzy control systems design and analysis: A linear matrix inequality approach[M]. New York: Wiley-Interscience, 2001: 83-108.

(责任编辑: 孙艺红)