

基于前景理论及云模型风险型多准则决策方法

赵坤^{1,2}, 高建伟¹, 祁之强¹, 李存斌¹

(1. 华北电力大学 经济与管理学院, 北京 102206; 2. 国华能源投资有限公司, 北京 100007)

摘要: 针对具有语言评价信息、准则权系数部分已知的多准则决策问题, 提出一种基于前景理论及云模型的决策方法. 首先, 通过给出一种改进的云模型生成方法将语言评价价值转化为云模型; 然后, 通过定义云模型距离和可能度给出云前景价值, 并以其他备选方案为动态参考点, 构建云前景决策矩阵; 最后, 在依据离差最大化得出最优权系数的基础上, 通过各方案综合前景值对其进行排序. 算例验证了所提出方法的合理性和可靠性.

关键词: 风险型决策; 云模型; 前景理论; 离差最大化

中图分类号: C934

文献标志码: A

Multi-criteria risky-decision-making approach based on prospect theory and cloud model

ZHAO Kun^{1,2}, GAO Jian-wei¹, QI Zhi-qiang¹, LI Cun-bin¹

(1. School of Economics and Management, North China Electric Power University, Beijing 102206, China; 2. Guohua Energy Investment Corporation Ltd, Beijing 100007, China. Correspondent: GAO Jian-wei, E-mail: qzq8610689@126.com)

Abstract: For the risky multi-criteria decision-making problem in which the criteria value is linguistic variables, and the weighted coefficients are partially known, a decision-making approach based on the prospect theory and the cloud model is proposed. An improved method for generating cloud is proposed, and the linguistic variables are converted into the cloud model based on this method. After that, the cloud distance and the cloud comparison rule are defined. Then, the prospect value function of the cloud model can be defined, and the prospect decision matrix is constructed based on all other alternatives as the dynamic reference point. On the basis of the optimal criteria weights attained by the algorithm of maximizing deviation, the order of alternatives can be listed by comparing the integrated prospect values of each alternative. Finally, an example is illustrated to verify the rationality and reliability of the proposed method.

Keywords: risk decision making; cloud model; prospect theory; maximum deviation

0 引言

多准则决策是分析决策理论的重要内容之一, 是主要考虑在多个准则下选择最优方案或对有限的方案进行排序和评价的研究. 然而, 在实际决策中, 事物本身的模糊性和人类认识的局限性往往导致决策者很难用精确的数值去刻画决策对象, 需要用语言变量、不确定区间数等模糊的概念进行评价. 由于其中的语言变量更符合决策者的思维习惯, 准则值为语言变量的多准则决策方法便成为了一类具有潜在应用价值的研究.

针对语言变量的多准则决策问题, 一种方法是直接通过语言变量进行建模, 但这类方法在进行操作和运算的过程中可能会出现信息丢失的现象; 另一种方法是将语言变量转化为模糊数进行决策研究, 这类方法使用隶属度函数得出精确的隶属度, 这便将模糊数学拉回到精确数学的范畴, 违背了模糊数学的基本理念. 此外, 传统隶属函数也无法直接反映出决策对象模糊性与随机性之间的关联^[1]. 针对此现象, Li等^[2]于1995年结合概率论和模糊集的基本原理提出了云模型, 形成定性概念与定量表示之间的转化. 该

收稿日期: 2013-12-20; 修回日期: 2014-05-09.

基金项目: 国家自然科学基金项目(71271083, 71271084); 教育部新世纪优秀人才计划项目(NCET-10-0375); 中央高校基本科研业务费专项基金重点项目(12zx0811ZG06); 中央高校基本科研业务费专项基金项目(13XS25).

作者简介: 赵坤(1972—), 男, 博士生, 高级工程师, 从事能源投资决策与风险型决策分析的研究; 高建伟(1972—), 男, 教授, 博士生导师, 从事系统优化与决策分析等研究.

模型能够较好地表述决策对象的模糊性和随机性,而且能够在一定程度上解决信息集结过程中信息丢失的现象^[3],已广泛应用于环境、电力、军事等领域^[4-6],但应用到决策理论的研究还是较少的:文献[7]利用云模型表达了语言变量的模糊性和随机性,但该研究没有验证模型的有效性;文献[3]将不确定语言变量转化为云模型应用于群决策研究,并通过算例验证了云模型的可行性;文献[8]将不确定语言评价标度转化为一维正态云模型,并在算例中通过将该方法与语言变量转化为区间数的排序结果进行对比分析,验证了该方法的可靠性.然而,由于外界环境的复杂性和不确定性,方案的准则值可能会随着外界环境的变化而变化,上述研究均未考虑到外界环境对决策准则值和排序结果的影响.

针对考虑外界环境变化的风险型多准则决策问题,有些学者利用期望效用理论进行了研究^[9-10],但该理论是基于决策者“完全理性”为前提条件的,在实际决策中往往很难做到,因此在研究中存在一定的局限性.Kahneman等^[11]针对上述问题结合心理学和行为科学提出前景理论,该理论指出人类在面临收益和损失时会存在规避和偏好不同的风险态度,且具有对损失比收益更敏感的原则^[12].该理论的提出解释了很多期望效用理论不能解释的现象,因此在决策领域广受学者的关注和应用.

然而,目前将前景理论应用于语言变量风险型决策的研究还比较少:文献[13]将语言信息转化为区间数应用于前景理论,依据区间数运算法则得出各方案排序;文献[14]利用不确定语言短语符号表示语言变量,依据符号下标的操作,以表示中等含义的符号为参考点利用前景理论对各方案进行了排序;文献[15-16]分别将语言短语转化为三角模糊数和梯形模糊数,进而依据模糊数的运算法则和前景理论原理,以期望向量为参考点,得出方案排序.上述研究均取得了一定的结论和成果,但3种方法均未考虑准则权系数部分已知或完全未知的情形,且3种方法均是以提前给出的固定值为参考点,若参考点发生变化,则各方案的排序也可能发生变化,因此该研究的排序结果缺乏一定的可靠性.

本文针对准则值为语言变量、各准则各自然状态发生概率不同、准则权系数部分已知的风险型决策问题,给出一种基于前景理论结合云模型的决策方法.该方法依据改进的云模型生成方法定义,将语言评价标度转化为云模型,并通过定义云模型的可能度和距离公式,以备选方案为参考点定义了云前景价值函数,

得到云前景决策矩阵,据此在通过求解兼顾主客观权重信息优化模型得出最优权重的基础上,求出各方案综合前景值,最后与文献[8]、文献[13]进行对比分析,以说明该方法符合实际的决策过程,具有一定的可靠性.

1 预备知识

1.1 云模型

1995年, Li等^[2]提出一种能将定性语言值和定量数域通过不确定关系相联系的云模型,该模型能够较好地刻画出语言值模糊性和随机性之间的关联.其具体定义如下.

定义 1 设 C 是定量论域 U 上的定性概念,若论域 U 中的元素 x 对 C 的确定度 $\mu_C(x)$ 是一个具有稳定倾向的随机数,则元素 x 的隶属度 $\mu_C(x)$ 在论域 U 上的分布称为云,记为 $C(U)$,即 $\mu_C(x) : U \rightarrow [0, 1]$, $\forall x \in U$ 均有 $x \rightarrow \mu_C(x)$.

云模型是通过期望值 Ex 、熵 En 和超熵 He 三个特征数字有效地整合来刻画定性概念的随机性和模糊性,这从整体上反映出定性概念定量的性质.因此,一般将云模型记为 $C(Ex, En, He)$.其中: Ex 是云滴属于定性概念的数学期望值; En 是定性概念模糊性的度量; He 是反映云滴的离散程度和确定度的随机性^[17].

1.2 前景理论

1979年, Kahneman等^[11]提出“前景理论”,它是通过修正最大主观期望效用理论发展而来的.该理论将决策分为编辑和评价两个过程,编辑阶段是数据处理和参考点选取,评价阶段是依赖价值函数和权重函数对信息进行判断和计算.其决策过程能够反映出决策者在决策中所表现出的有限理性,因此,其决策结果也更符合人本身所固有的思维习惯.

前景理论中的核心为前景价值,它主要由“价值函数”和“权重函数”两部分组成^[18],即

$$V = \sum_{i=1}^n \pi(p_i) v(\Delta x_i). \quad (1)$$

其中: $\pi(p)$ 表示考虑风险态度的概率权重函数; $v(\Delta x)$ 表示决策者通过主观感受形成的价值函数.两个函数的形式分别为

$$\pi(p) = \begin{cases} \frac{p^\gamma}{(p^\gamma + (1-p)^\gamma)^{1/\gamma}}, & \Delta x \geq 0; \\ \frac{p^\delta}{(p^\delta + (1-p)^\delta)^{1/\delta}}, & \Delta x \leq 0. \end{cases} \quad (2)$$

$$v(x) = \begin{cases} (\Delta x)^\alpha, & \Delta x \geq 0; \\ -\lambda(\Delta x)^\beta, & \Delta x \leq 0. \end{cases} \quad (3)$$

其中: Δx 为决策准则值相对于参考点的差值; α 和 β 分别为风险态度系数, $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$, 且 α, β 值越大代表决策者越倾向于冒险, 当 $\alpha = \beta = 1$ 时, 决策者是风险中立者; λ 为损失规避系数, 当 $\lambda > 1$ 时, 代表决策者对于损失具有更高的敏感度。

2 云模型计算方法及云前景价值

2.1 语言值转化为云模型的生成方法

设决策者对各方案属性的语言评价等级为 n (一般为奇数), 由专家制定有效论域 $U = [X_{\min}, X_{\max}]$, 即可利用云变化或黄金分割法^[19]生成 n 朵云与相应的语言标度一一对应。中间云 $C_0(Ex_0, En_0, He_0)$ 为

完整云, 表达一般的定性概念, 左右相邻的云分别为

$$\begin{aligned} &\{C_{-1}(Ex_{-1}, En_{-1}, He_{-1}), \\ &C_1(Ex_1, En_1, He_1), \\ &C_{-2}(Ex_{-2}, En_{-2}, He_{-2}), \\ &C_2(Ex_2, En_2, He_2), \dots, \\ &C_{-\frac{n-1}{2}}(Ex_{-\frac{n-1}{2}}, En_{-\frac{n-1}{2}}, He_{-\frac{n-1}{2}}), \\ &C_{\frac{n-1}{2}}(Ex_{\frac{n-1}{2}}, En_{\frac{n-1}{2}}, He_{\frac{n-1}{2}})\}. \end{aligned}$$

左边的云是半降云, 表示一些较差的定性概念; 右边的云是半升云, 表示一些较好的定性概念。

针对具有 5 个语言等级的例子, 文献 [2, 6] 给出了利用黄金分割法生成云的计算方法, 如表 1 所示。

表 1 文献[2-6]中云模型生成方法

云模型	Ex	En	He
$C_{+2}(Ex_{+2}, En_{+2}, He_{+2})$	X_{\min}	$En_{+1}/0.618$	$He_{+1}/0.618$
$C_{+1}(Ex_{+1}, En_{+1}, He_{+1})$	$Ex_0 + 0.382 \times (X_{\max} + X_{\min})/2$	$0.382 \times (X_{\max} - X_{\min})/6$	$He_0/0.618$
$C_0(Ex_0, En_0, He_0)$	$(X_{\max} + X_{\min})/2$	$0.618En_{-1}$	给定 He_0
$C_{-1}(Ex_{-1}, En_{-1}, He_{-1})$	$Ex_0 - 0.382 \times (X_{\max} + X_{\min})/2$	$0.382 \times (X_{\max} - X_{\min})/6$	$He_0/0.618$
$C_{-2}(Ex_{-2}, En_{-1}, He_{-2})$	X_{\max}	$En_{-1}/0.618$	$He_{-1}/0.618$

该方法具有一定的局限性, 例如在论域 $U = [10, 20]$ 上, 构造的第 2 和第 4 朵云的期望值为

$$\begin{aligned} Ex_{-1} &= \\ Ex_0 - 0.382 \times \frac{X_{\min} + X_{\max}}{2} &= 9.27, \\ Ex_{+1} &= \\ Ex_0 + 0.382 \times \frac{X_{\min} + X_{\max}}{2} &= 20.73, \end{aligned}$$

显然这两朵云期望值都已超出论域 U 的范围: 若在论域 $U = [-10, 10]$ 上, 构造的第 2 和第 4 朵云的期望值为 $Ex_{-1} = Ex_{+1} = Ex_0 = 0$, 这就无法区分语言评价标度的等级。因此, 针对上述方法中存在的局限性, 本文根据云构造原理对上述方法进行改进, 给出一种新的在论域 $U = [X_{\min}, X_{\max}]$ 生成 n 朵云的计算方法。其计算公式如表 2 所示。

表 2 云模型生成方法

云模型	Ex	En	He
$C_{+\frac{n-1}{2}}(Ex_{+\frac{n-1}{2}}, En_{+\frac{n-1}{2}}, He_{+\frac{n-1}{2}})$	X_{\max}	$En_{+\frac{n-3}{2}}/0.618$	$He_{+\frac{n-3}{2}}/0.618$
$C_{+\frac{n-3}{2}}(Ex_{+\frac{n-3}{2}}, En_{+\frac{n-3}{2}}, He_{+\frac{n-3}{2}})$	$Ex_0 + 0.382 \left(\frac{X_{\max} - X_{\min}}{2} \right)$	$En_{+\frac{n-5}{2}}/0.618$	$He_{+\frac{n-5}{2}}/0.618$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$C_{+2}(Ex_{+2}, En_{+2}, He_{+2})$	$Ex_0 + 0.382 \left(\frac{X_{\max} - X_{\min}}{2} \right) \times 2 / \frac{n-3}{2}$	$En_{+1}/0.618$	$He_{+1}/0.618$
$C_{+1}(Ex_{+1}, En_{+1}, He_{+1})$	$Ex_0 + 0.382 \left(\frac{X_{\max} - X_{\min}}{2} \right) / \frac{n-3}{2}$	$0.382 \times \frac{X_{\max} - X_{\min}}{6}$	$He_0/0.618$
$C_0(Ex_0, En_0, He_0)$	$(X_{\max} + X_{\min})/2$	$0.618En_1$	给定 He_0
$C_{-1}(Ex_{-1}, En_{-1}, He_{-1})$	$Ex_0 - 0.382 \left(\frac{X_{\max} - X_{\min}}{2} \right) / \frac{n-3}{2}$	$0.382 \times \frac{X_{\max} - X_{\min}}{6}$	$He_0/0.618$
$C_{-2}(Ex_{-2}, En_{-2}, He_{-2})$	$Ex_0 - 0.382 \left(\frac{X_{\max} - X_{\min}}{2} \right) \times 2 / \frac{n-3}{2}$	$En_{-1}/0.618$	$He_{-1}/0.618$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$C_{-\frac{n-3}{2}}(Ex_{-\frac{n-3}{2}}, En_{-\frac{n-3}{2}}, He_{-\frac{n-3}{2}})$	$Ex_0 - 0.382 \left(\frac{X_{\max} - X_{\min}}{2} \right)$	$En_{-\frac{n-5}{2}}/0.618$	$He_{-\frac{n-5}{2}}/0.618$
$C_{-\frac{n-1}{2}}(Ex_{-\frac{n-1}{2}}, En_{-\frac{n-1}{2}}, He_{-\frac{n-1}{2}})$	X_{\min}	$En_{-\frac{n-3}{2}}/0.618$	$He_{-\frac{n-3}{2}}/0.618$

具体步骤如下。

Step 1 1) 根据论域 $U = [X_{\min}, X_{\max}]$, 生成中间完整云、最后一朵半降云和最后一朵半升云的期望

值。其计算公式分别为

$$\begin{aligned} Ex_0 &= (X_{\min} + X_{\max})/2, \\ Ex_{-\frac{n-1}{2}} &= X_{\min}, \end{aligned}$$

$$Ex_{+\frac{n-1}{2}} = X_{\max};$$

2) 生成与中间云相邻第 1 朵半降云和第 1 朵半升云的熵

$$En_{-1} = En_{+1} = 0.382 \times (X_{\max} - X_{\min})/6;$$

3) 给定中间云的超熵 He_0 .

Step 2 1) 将中间云和最后一朵半升云的期望值作为线段的两个端点, 取线段的 0.382 倍, 依据剩余半升云的朵数将线段分成 $(n-3)/2$ 份, 将每一点对应的数值赋予相对应剩余的半升云期望值;

2) 依据前一朵云与后一朵云熵的比例为黄金分割率的原则, 生成中间云的熵 $En_0 = 0.618En_1$, 并生成第 2 朵半升云和半降云的熵 $En_{-2} = En_{-1}/0.618$, $En_{+2} = En_{+1}/0.618$;

3) 依据前一朵云与后一朵云超熵比例为黄金分割率的原则, 生成第 1 朵半升云和半降云的超熵 $He_{-1} = He_{+1} = He_0/0.618$.

Step 3 1) 依据生成剩余半升云期望值的原理, 生成剩余半降云的期望值;

2) 依据前一朵与后一朵云熵和超熵的比例为黄金分割率的原则, 生成剩余半升云和半降云的熵、超熵.

性质 1 本方法生成云模型的期望值各不相同, 且均在论域 U 中.

证明 1) 由于论域 U 的长度 $l_U = X_{\max} - X_{\min} \neq 0$, 即 $0.382 \times (X_{\max} - X_{\min})/2 \neq 0$, 显然本方法生成的云模型期望值各不相同;

2) 以半升云的期望值为例, 除最后一朵半升云模型的端点期望值 $Ex_{+\frac{n-1}{2}} = X_{\max}$ 外, 若剩余半升云模型的最大和最小期望值均在论域中, 则可证明半升云的期望值均在论域中.

① 第 1 朵半升云的期望值 Ex_1 就是最小期望值, $Ex_1 = Ex_0 + 0.382 \times (X_{\max} - X_{\min})/(n-3)$. 将 $Ex_0 = (X_{\min} + X_{\max})/2$ 代入, 可得

$$Ex_1 = \left(0.5 + \frac{0.382}{n-3}\right)X_{\max} + \left(0.5 - \frac{0.382}{n-3}\right)X_{\min} = X_{\max} - \left(0.5 - \frac{0.382}{n-3}\right) \times l_U,$$

其中 $l_U = X_{\max} - X_{\min}$. 由 $n-3 \geq 1$ 得 $X_{\min} < Ex_1 < X_{\max}$, 即最小期望值在论域中.

② 倒数第 2 朵半升云的期望值 $Ex_{+\frac{n-3}{2}}$ 就是剩余云中最大期望值, $Ex_{+\frac{n-3}{2}} = Ex_0 + 0.382 \times (X_{\max} - X_{\min})/2$. 同理得

$$Ex_{+\frac{n-3}{2}} = 0.691X_{\max} + 0.309X_{\min} =$$

$$X_{\max} - 0.309 \times l_U,$$

从而 $X_{\min} < Ex_{+\frac{n-3}{2}} < X_{\max}$, 即最大期望值也在论域中. 因此, 半升云的期望值均在论域 U 中.

对于半降云, 可采用类似半升云的证明方法, 证明半降云的期望值也在论域中. \square

2.2 云模型运算法则

对于云模型距离的运算, 为全面考虑云模型 3 个特征数字的关系, 本文基于云模型“3En 规则”^[20]给出一种云模型距离运算的定义.

定义 2^[21] 设 Y_1, Y_2 是两朵一维正态云, F 是正态云集合, d 是一个映射, 即 $d: F \times F \rightarrow R$. 如果 $d(Y_1, Y_2)$ 满足: 1) $d(Y_1, Y_2) \geq 0$, $d(Y_2, Y_1) \geq 0$; 2) $d(Y_1, Y_2) = d(Y_2, Y_1)$; 3) 若 Y_3 为任一正态云, $d(Y_1, Y_3) \leq d(Y_1, Y_2) + d(Y_2, Y_3)$. 则 $d(Y_1, Y_2)$ 为正态云 Y_1 与 Y_2 之间的距离.

定义 3 设 $C_1(Ex_1, En_1, He_1)$ 和 $C_2(Ex_2, En_2, He_2)$ 为论域 U 中两朵一维正态云, 根据正态云“3En 规则”, 正态云 C_1 与 C_2 的 Hamming 距离为

$$D(C_1, C_2) = \sqrt{\frac{\underline{d}^2(C_1, C_2) + \bar{d}^2(C_1, C_2)}{2}}. \quad (4)$$

其中

$$\begin{aligned} \underline{d}(C_1, C_2) &= \left| \left(1 - \frac{3\sqrt{En_1^2 + He_1^2}}{Ex_1}\right)Ex_1 - \left(1 - \frac{3\sqrt{En_2^2 + He_2^2}}{Ex_2}\right)Ex_2 \right|, \\ \bar{d}(C_1, C_2) &= \left| \left(1 + \frac{3\sqrt{En_1^2 + He_1^2}}{Ex_1}\right)Ex_1 - \left(1 + \frac{3\sqrt{En_2^2 + He_2^2}}{Ex_2}\right)Ex_2 \right|. \end{aligned}$$

容易证明, 上述距离满足定义 2 中的 3 个条件.

由于云模型具有 3 个特征数字, 使其无法直接比较大小. 本文通过定义云模型可能度给出一种云模型比较大小的方法.

定义 4 设 $C_1(Ex_1, En_1, He_1)$ 和 $C_2(Ex_2, En_2, He_2)$ 为论域 U 中两朵一维正态云, 正理想云为 $C^*(\max_i Ex_i, \max_i En_i, \max_i He_i)$, $i = 1, 2$, $P(C_1 \geq C_2)$ 为 $C_1 \geq C_2$ 的可能度, 表示为

$$P(C_1 \geq C_2) = 1 - \frac{D(C^*, C_1)}{D(C^*, C_1) + D(C^*, C_2)}, \quad (5)$$

其中 $D(C^*, C_1)$ 和 $D(C^*, C_2)$ 分别为 C_1 和 C_2 与理想云 C^* 的 Hamming 距离. 若 $P(C_1 \geq C_2) \geq 0.5$, 则 $C_1 \geq C_2$, 否则 $C_1 < C_2$.

由定义 4 可知:

- 1) $0 \leq P(C_1 \geq C_2) \leq 1$;
- 2) $P(C_1 \geq C_2) + P(C_2 \geq C_1) = 1$;
- 3) 若 $P(C_1 \geq C_2) = P(C_2 \geq C_1) = 0.5$, 则云 C_1 与云 C_2 相等.

性质2 论域 U 中, 在云的期望值相同的条件下, 若云的随机性和离散程度越大, 则云越差, 即云描述的定性概念越模糊.

证明 设 $C_1(Ex_1, En_1, He_1)$ 和 $C_2(Ex_2, En_2, He_2)$ 为论域 U 中的两朵一维正态云, 根据性质2自身的前提条件可得

$$Ex_1 = Ex_2, En_1 \leq En_2, He_1 \leq He_2.$$

根据定义4求得正理想云为 $C^*(Ex_1, En_1, He_1)$, 依据式(5)得 $P(C_1 \geq C_2) = 1$, 由此可得 $C_1 > C_2$, 即云 C_2 随机性和离散度越大, 云 C_2 越差. \square

一般情况下, 针对云模型可以采用综合集结算子和加权平均集结算子进行集结, 考虑到各正态云不同的重要程度, 本文采用文献[22]加权平均集结算子对 n 朵正态云进行集结.

定义5 设论域 U 中存在 n 朵云 $\{C_1(Ex_1, En_1, He_1), C_2(Ex_2, En_2, He_2), \dots, C_n(Ex_n, En_n, He_n)\}$, 若 n 朵云通过权重集结算子^[22]生成一朵综合云为 $C(Ex, En, He)$, 则

$$C = \left(\sum_{i=1}^n w_i Ex_i, \sqrt{\sum_{i=1}^n (w_i En_i)^2}, \sqrt{\sum_{i=1}^n (w_i He_i)^2} \right), \quad (6)$$

其中 $W = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ 为各云模型的权重.

2.3 云模型前景价值

前景理论中式(1)和(2)的运算均是针对实数, 无法在本文中直接使用. 为此, 本文针对操作变量为云模型的情况, 给出云模型前景价值函数的定义.

定义6 设 $C_1(Ex_1, En_1, He_1)$ 和 $C_2(Ex_2, En_2, He_2)$ 为两朵正态云, 若以云 C_2 为参考点, 依据云距离运算和比较大小的规则, 构建云 C_1 的前景价值函数为

$$v(C_1) = \begin{cases} (D(C_1, C_2))^\alpha, & C_1 \geq C_2; \\ -\lambda(D(C_1, C_2))^\beta, & C_1 < C_2. \end{cases} \quad (7)$$

其中云模型的距离和比较大小的规则分别采用定义3和定义4中的式(4)和(5).

3 基于前景理论及云模型风险型多准则决策步骤

3.1 问题描述

假设对于某个语言变量风险型多准则决策问题, 方案集 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, 方案的准则集 $Z = \{z_1,$

$z_2, \dots, z_n\}$, 各准则间相互独立, 准则权重向量 $W = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$, 并有约束条件 $\sum_{j=1}^n w_j = 1, w_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n$. 准则 z_j 下可能发生的自然状态为 $\theta^j = \{\theta_1^j, \theta_2^j, \dots, \theta_{l_j}^j\}$, 且 $\theta_t^j (1 \leq t \leq l_j)$ 状态发生的概率为 p_t^j . 方案 a_i 在准则 z_j 状态 θ_t^j 下的语言变量为 x_{ij}^t , 得到语言决策矩阵如表3所示.

表3 风险型语言决策矩阵

	z_1				...	z_n			
	θ_1^1	θ_2^1	...	$\theta_{l_1}^1$		θ_1^n	θ_2^n	...	$\theta_{l_n}^n$
a_1	x_{11}^1	x_{11}^2	...	$x_{11}^{l_1}$...	x_{1n}^1	x_{1n}^2	...	$x_{1n}^{l_n}$
a_2	x_{21}^1	x_{21}^2	...	$x_{21}^{l_1}$...	x_{2n}^1	x_{2n}^2	...	$x_{2n}^{l_n}$
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots
a_m	x_{m1}^1	x_{m1}^2	...	$x_{m1}^{l_1}$...	x_{mn}^1	x_{mn}^2	...	$x_{mn}^{l_n}$
概率	p_1^1	p_2^1	...	$p_{l_1}^1$...	p_1^n	p_2^n	...	$p_{l_n}^n$

3.2 决策步骤

针对上述问题, 基于前景理论及云模型的风险型决策方法步骤如下.

Step 1: 将语言变量转化为正态云模型. 根据决策者语言评价标度, 利用本文在表1中给出的方法在有效论域 $U = [X_{\min}, X_{\max}]$ 上生成相对应的云模型, 得到云决策矩阵.

Step 2: 确定各方案云模型前景决策矩阵. 前景理论指出, 决策者在进行决策时是利用结果与预期的差距来衡量“收益”或“损失”, 因此参考点的选取极其重要. 采用文献[23]的方法, 以其他备选方案为动态参考点, 根据下式计算各方案在各准则下的云前景值:

$$V = \sum_{k=1}^s \sum_{l=1, l \neq i}^m \pi_{lji}(p_k) v(C_{lji}^k). \quad (8)$$

其中价值函数和权重函数分别为

$$v(C_{lji}^k) = \begin{cases} (D(C_{lji}^k, C_{ij}^k))^\alpha, & C_{lji}^k \geq C_{ij}^k; \\ -\lambda(D(C_{lji}^k, C_{ij}^k))^\beta, & C_{lji}^k < C_{ij}^k. \end{cases}$$

$$\pi_{lji}(p_k) = \begin{cases} \frac{p_k^\gamma}{(p_k^\gamma + (1 - p_k)^\gamma)^{1/\gamma}}, & C_{lji}^k \geq C_{ij}^k; \\ \frac{p_k^\delta}{(p_k^\delta + (1 - p_k)^\delta)^{1/\delta}}, & C_{lji}^k < C_{ij}^k. \end{cases}$$

Step 3: 确定准则权系数. 若准则权系数直接由决策者主观给出, 则这种方法的透明性和再现性较差, 也缺乏一定合理的依据; 若直接通过决策数据客观制定权重, 则完全忽略了决策者的信息. 因此, 本文在决策者主观给出部分准则权信息的基础上, 依据离差最大化方法构建一种线性规划优化模型, 即

$$\max Z = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{k=i+1}^m \sum_{j=1}^n |V_{ij} - V_{kj}| w_j; \quad (9)$$

$$\text{s.t. } \sum_{j=1}^n w_j = 1, w \in H.$$

其中 H 为由决策者主观给出的部分准则权系数.

对于上述模型 (9), 可在 Matlab 或者 Lingo 软件上通过编程求得最优权系数 $W^* = (w_1^*, w_2^*, \dots, w_n^*)$.

Step 4: 计算各方案综合前景值.

$$V_i = \sum_{j=1}^n w_j v_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (10)$$

依据各方案的综合前景值越大方案越优对整个方案集进行排序, 得出最优方案.

4 算例分析

某投资公司计划从以下 3 个可能的方案中选一个最优方案进行投资, 各方案为: 1) A_1 计算机公司; 2) A_2 汽车公司; 3) A_3 食品公司. 决策者分别按直接效

益 (Z_1)、间接效益 (Z_2)、社会效益 (Z_3) 和节能环保 (Z_4) 这 4 个准则进行评估. 因为决策者在投资时更加看重公司在未来能够与外部环境相互促进的可持续发展, 所以结合以往投资经验主观给出了不完全确定的准则权系数空间 $H = \{w_2 > w_4 > w_3, 0.3 \leq w_2 \leq 0.5, 0.15 \leq w_1 \leq 0.2\}$. 根据市场预测每个准则存在 5 种可能的自然状态: 很好 (θ_1)、好 (θ_2)、中等 (θ_3)、差 (θ_4) 和很差 (θ_5), 各准则自然状态发生的概率如表 4 所示. 各方案在各准则下的评价是以语言信息给出, 语言评价集为 $S = \{VG, G, F, P, VP\} = \{\text{very good, good, fair, poor, very poor}\}$. 决策者对各方案各准则的评价数据如表 4 所示, 依据上述评价信息, 试从这 3 个方案中选出一个最好的方案.

表 4 风险型决策表

	Z_1					Z_2					Z_3					Z_4				
	θ_1^1	θ_2^1	θ_3^1	θ_4^1	θ_5^1	θ_1^2	θ_2^2	θ_3^2	θ_4^2	θ_5^2	θ_1^3	θ_2^3	θ_3^3	θ_4^3	θ_5^3	θ_1^4	θ_2^4	θ_3^4	θ_4^4	θ_5^4
A_1	G	G	G	F	F	G	VG	F	G	G	F	VP	VG	F	P	VG	G	P	F	VP
A_2	G	F	VG	VP	G	VG	F	VG	P	G	G	F	F	VP	F	G	G	F	G	F
A_3	F	VG	F	G	P	G	VG	P	G	P	G	P	VG	VP	P	G	VG	F	F	VP
概率	0.1	0.2	0.5	0.1	0.1	0.05	0.1	0.6	0.15	0.1	0.07	0.25	0.35	0.2	0.13	0.15	0.15	0.3	0.2	0.2

1) 根据 Step 1 将专家 5 个等级的语言评价值转化论域 $U = [-10, 10]$ 上的 5 朵云模型, 即 $\{C_{+2}, C_{+1}, C_0, C_{-1}, C_{-2}\}$, 其中 5 朵云的数字特征如表 5 所示. 进而依据“语言值越好云越大”的原则将 5 朵云分别对应 $\{VG, G, F, P, VP\}$ 这 5 个语言评价值, 则表 4 中各方案在各状态各准则下的语言准则值可转化为一维正态云, 得到云决策矩阵.

表 5 5 朵云数字特征

云模型	Ex	En	He
$C_{+2}(Ex_{+2}, En_{+2}, He_{+2})$	10	2.06	0.131
$C_{+1}(Ex_{+1}, En_{+1}, He_{+1})$	3.82	1.273	0.081
$C_0(Ex_0, En_0, He_0)$	0	0.787	0.05
$C_{-1}(Ex_{-1}, En_{-1}, He_{-1})$	-3.82	1.273	0.081
$C_{-2}(Ex_{-2}, En_{-2}, He_{-2})$	-410	2.06	0.131

2) 在各自然状态下, 以其他的备选方案作为动态参考点, 根据式 (8) 得前景价值函数 $v(C_{lji}^k)$ 和前景权重函数 $\pi_{lji}(p_k)$. 其中各参数取值为: $\alpha = \beta = 0.88, \lambda = 2.25, \gamma = 0.61, \delta = 0.69$ ^[18]. 得综合前景决策矩阵为

$$V = \begin{bmatrix} -7.149 & -5.58 & -7.326 & -13.79 \\ -7.97 & -3.09 & -13.989 & 1.13 \\ -14.057 & -17.53 & -5.143 & -7.07 \end{bmatrix}.$$

3) 根据离差最大化思想, 结合决策者主观给出准则权系数空间, 用式 (9) 构建如下优化模型:

$$\begin{aligned} \max V(w) = & 13.82w_1 + 28.89w_2 + 23.69w_3 + 19.06w_4. \\ \text{s.t. } & 0.3 \leq w_2 \leq 0.5, 0.15 \leq w_1 \leq 0.2; \end{aligned}$$

$$w_2 > w_4 > w_1, w_4 > w_3;$$

$$\sum_{j=1}^4 w_j = 1;$$

$$w_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, 4.$$

利用 Matlab 软件对模型编程求解, 得到最优权系数向量 $W^* = \{0.17, 0.37, 0.24, 0.22\}$.

4) 根据式 (10), 得出各方案综合前景值: $v_1 = -7.89, v_2 = -4.52, v_3 = -14.79$. 依据综合前景值越大方案越好的原则, 得到方案排序为 $A_2 \succ A_1 \succ A_3$, 故方案 A_2 是最优方案.

为进一步理解前景理论中决策者“有限理性”和动态决策参考点对排序结果的影响, 将本文方法与文献 [8] 中基于期望效用理论方法和文献 [13] 利用固定期望向量 $Q = [C_0, C_0, C_0, C_0]$ 为参考点的方法进行对比, 以说明本文方法的合理性.

根据文献 [8] 方法得到各方案在各准则下标准期望值决策矩阵和文献 [13] 方法所得到的前景决策矩阵分别如表 6 和表 7 所示.

表 6 各方案标准期望值决策矩阵

	Z_1	Z_2
	A_1	$C(1.41, 0.33, 0.02)$
A_2	$C(0.704, 0.16, 0.01)$	$C(1.102, 0.221, 0.02)$
A_3	$C(0.407, 0.123, 0.018)$	$C(-0.18, 0.163, 0.05)$
	Z_3	Z_4
	A_1	$C(0.061, 0.11, 0.014)$
A_2	$C(-0.363, 0.11, 0.007)$	$C(0.717, 0.18, 0.011)$
A_3	$C(0.038, 0.101, 0.028)$	$C(0.011, 0.09, 0.0006)$

表7 期望向量为参考点前景决策矩阵

方案	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4
A_1	3.0039	3.3870	-5.1062	2.0235
A_2	0.9707	3.4368	-4.7585	2.4738
A_3	1.0542	-3.3638	-6.6322	-3.2479

为了在统一标准下进行排序, 两种方法中权重均取 $W = \{0.17, 0.47, 0.14, 0.22\}$, 得到两种方法方案排序如表8所示.

表8 文献[8]和文献[13]所得排序结果

	期望效用理论	$Q = [C_0, C_0, C_0, C_0]$ 为参考点
A_1	$C(0.4266, 0.0867, 0.0075)$	1.035
A_2	$C(0.4024, 0.0893, 0.0087)$	0.8388
A_3	$C(0.0302, 0.071, 0.0032)$	-2.2478
排序	$A_1 \succ A_2 \succ A_3$	$A_1 \succ A_2 \succ A_3$

从表8可以看出, 本文方法所得到的最优方案与文献[8]和文献[13]所得到的结果不同, 对比分析其决策过程可以发现:

1) 从表4可知, 方案1比方案2面临更多损失, 基于决策者对损失更敏感原则可得方案2的综合前景值大于方案1, 即方案2优于方案1, 这与本文方法得出的结论相同. 而文献[8]基于期望理论的方法对损失和收益持有相同的风险态度, 这与决策者实际决策心理不同, 因此方案的排序也不同.

2) 对于表4中方案2和方案1在准则 Z_2 、状态 θ_1 的情况下, 若采用文献[13]基于固定的期望值 C_0 为参考点, 则两个方案均是收益的, 且前景值相差不大. 但以方案1的准则值为参考点, 基于决策者对损失更敏感的原则, 方案2的前景值会明显优于方案1, 这样就会影响到最终方案的排序. 因此, 以固定值为参考点, 方案只能是损失或者收益, 而参考点一旦发生变化, 则方案的排序可能会随着参考点的变化而变化, 这样, 方案的排序结果会缺乏一定的可靠性. 而本文采用文献[23]的思路使用其他动态变化的备选方案作为参考点, 综合了方案面临收益和损失不同的情况, 因此所得到的方案的排序结果具有一定的可靠性.

5 结 论

本文针对具有语言评价变量、各准则发生概率不同且准则系数部分已知的风险型多准则决策问题, 提出了一种基于前景理论结合云模型的决策方法. 该方法同时考虑了决策者风险态度和决策者语言评价值的模糊性以及外界环境的复杂性, 更加符合实际决策的过程. 针对云模型已有方法的一些局限性, 本文定义了新的云生成方法、云距离运算法则和云可能度公式, 讨论了其性质, 并据此定义了云模型的前景价值. 此外, 本文通过算例与文献[8]、文献[13]中提

出的方法进行对比分析, 验证了本文方法的合理性和可靠性. 在未来研究中, 可进一步考虑语言概率的风险型群决策问题.

参考文献(References)

- [1] 王坚强, 杨恶恶. 基于蒙特卡罗模拟的直觉正态云多准则群决策方法[J]. 系统工程理论与实践, 2013, 33(11): 2859-2865.
(Wang J Q, Yang W E. Multiple criteria group decision making method based on intuitionistic normal cloud by Monte Carlo simulation[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2013, 33(11): 2859-2865.)
- [2] Li D, Cheung D, Shi X, et al. Uncertainty reasoning based on cloud models in controllers[J]. Computers Mathematics with Applications, 1998, 35(3): 99-123.
- [3] 王坚强, 刘淘. 基于综合云的不确定语言多准则群评价方法[J]. 控制与决策, 2012, 27(8): 1185-1190.
(Wang J Q, Liu T. Uncertain linguistic multi-criteria group decision-making approach based on integrated cloud[J]. Control and Decision, 2012, 27(8): 1185-1190.)
- [4] 丁昊, 王栋. 基于云模型的水体富营养化程度评价方法[J]. 环境科学学报, 2013, 33(1): 251-257.
(Ding H, Wang D. The evaluation method of water eutrophication based cloud model[J]. Acta Scientiae Circumstantiate, 2013, 33(1): 251-257.)
- [5] 刘自发, 庞铨铨, 王泽黎, 等. 基于云理论和元胞自动机理论的城市配电网空间负荷预测[J]. 中国电机工程学报, 2013, 33(10): 98-105
(Liu Z F, Pang C C, Wang Z L, et al. Spatial load forecasting for distribution network based on cloud theory and cellular automata[J]. Proc of the CSEE, 2013, 33(10): 98-105.)
- [6] 阎岩, 唐振民, 刘家银. 基于不确定性分析的自主导航轨迹评测方法[J]. 机器人, 2013, 35(2): 194-199.
(Yan Y, Tang Z M, Liu J Y. Autonomous navigation trajectory evaluation method based on uncertainty analysis[J]. Robot, 2013, 35(2): 194-199.)
- [7] 王洪利, 冯玉强. 基于云模型具有语言评价信息的多属性群决策研究[J]. 控制与决策, 2005, 20(6): 679-681.
(Wang H L, Feng Y Q. On multiple attribute group decision making with linguistic assessment information based on cloud model[J]. Control and Decision, 2005, 20(6): 679-681.)
- [8] 任剑. 基于云模型的语言随机多准则决策方法[J]. 计算机集成制造系统, 2012, 18(12): 2792-2797.
(Ren J. Linguistic-stochastic multi-criterion decision-making method based on cloud model[J]. Computer

- Integrated Manufacturing Systems, 2012, 18(12): 2792-2797.)
- [9] 王坚强, 任世昶. 基于期望值的灰色随机多准则决策方法[J]. 控制与决策, 2009, 24(1): 39-43.
(Wang J Q, Ren S C. Grey random multi-criteria decision-making approach based on expected value[J]. Control and Decision, 2009, 24(1): 39-43.)
- [10] 徐泽水. 基于期望值的模糊多属性决策法及其应用[J]. 系统工程理论与实践, 2004, 24(1): 109-113.
(Xu Z S. Method Based on Expected Values for Fuzzy Multiple Attribute Decision Making Problems with Preference Information on Alternatives[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2004, 24(1): 109-113.)
- [11] Kahneman D, Tversky A. Prospect theory: An analysis of decision under risk[J]. *Economica*, 1979, 47(2): 263-291.
- [12] Gonzalez G W R. Curvature of the probability weighting function[J]. *Management Science*, 1996, 42(12): 1676-1690.
- [13] 胡军华, 陈晓红, 刘咏梅. 基于语言评价和前景理论的多准则决策方法[J]. 控制与决策, 2009, 24(10): 1477-1482.
(Hu J H, Chen X H, Liu Y M. Multi-criteria decision making based linguistic evaluation and prospect theory[J]. Control and Decision, 2009, 24(10): 1477-1482.)
- [14] 刘培德. 一种基于前景理论的不确定语言变量风险型多属性决策方法[J]. 控制与决策, 2011, 26(6): 893-897.
(Liu P D. Method for multi-attribute decision-making under risk with the uncertain linguistic variables based on prospect theory[J]. Control and Decision, 2011, 26(6): 893-897.)
- [15] 樊治平, 陈发动, 张晓. 基于累积前景理论的混合型多属性决策方法[J]. 系统工程学报, 2012, 27(3): 295-301.
(Fan Z P, Chen F D, Zhang X. Method for hybrid multiple attribute decision making based on cumulative prospect theory[J]. *J of Systems Engineering*, 2012, 27(3): 295-301.)
- [16] Peng L Y, Liu P D, Liu Z M, et al. Research on the random multi-attribute decision-making methods with trapezoidal fuzzy probability based on prospect theory[J]. *J of Intelligent & Fuzzy Systems*, 2014, 26(5): 2131-2141.
- [17] Tseng K C, Hwang C S, Su Y C. Using cloud model for default voting in collaborative filtering[J]. *J of Convergence Information Technology*, 2011, 6: 68-74.
- [18] Liu P D, Jin F, Zhang X, et al. Research on the multi-attribute decision-making under risk with interval probability based on prospect theory and the uncertain linguistic variables[J]. *Knowledge-based Systems*, 2011, 24(4): 554-561.
- [19] 邸凯昌, 李德仁, 李德毅. 云理论及其在空间数据挖掘和知识发现中的应用[J]. 中国图像图形学报, 1999, 4(11): 929-935.
(Di K C, Li D R, Li D Y. The cloud theory and application in the space data mining and knowledge discovery [J]. *The Chinese Graph and Image Transaction*, 1999, 4(11): 929-935.)
- [20] 李德毅, 刘常昱. 论正态云的普适性[J]. 中国工程科学, 2004, 6(8): 28-34.
(Li D Y, Liu C Y. The Research on the universality of the cloud model[J]. *Engineering Science*, 2004, 6(8): 28-34.)
- [21] 王坚强, 张忠. 基于直觉梯形模糊数的信息不完全确定的多准则决策方法[J]. 控制与决策, 2009, 24(2): 226-230.
(Wang J Q, Zhang Z. Multi-criteria decision-making method with incomplete certain information based on intuitionistic fuzzy number[J]. Control and Decision, 2009, 24(2): 226-230.)
- [22] Xiao J Y, Liao L Y, Luan Z. How to handle uncertainties in AHP: The Cloud Delphi hierarchical analysis[J]. *Information Sciences*, 2013, 222: 384-404.
- [23] 王坚强, 周玲. 基于前景理论的灰色随机多准则决策方法[J]. 系统工程理论与实践, 2010, 30(9): 1658-1664.
(Wang J Q, Zhou L. Grey-stochastic multi-criteria decision-making approach based on prospect theory[J]. *System Engineering-Theory & Practice*, 2010, 30(9): 1658-1664.)

(责任编辑: 齐 霖)