文章编号: 1001-0920 (2015) 02-0283-06 **DOI:** 10.13195/j.kzyjc.2013.1808

基于误差最小化的 GM(1,1) 模型背景值优化方法

徐 宁, 党耀国, 丁 松

(南京航空航天大学 经济与管理学院，南京 211100)

摘 要: 背景值是导致 GM(1,1) 模型产生系统误差的主要原因之一. 对此, 提出一种优化的 GM(1,1) 模型构建方法. 首先, 根据 GM(1,1) 模型时间响应式的函数形式, 利用积分中值定理拟合真实背景值, 研究发展系数与背景值之间的关系; 然后, 构建新的灰色微分方程, 采用最小二乘法进行参数估计, 并利用方程组还原原始参数, 使背景值同时具备无偏性和最小误差性; 最后, 通过具体案例验证了所提出的优化模型能够突破高增长建模的局限, 对实际问题的建模精度较高.

关键词: 灰色预测；积分中值定理；背景值；最小二乘

中图分类号: N941.5 **文献标志码:** A

Optimization method of background value in GM(1,1) model based on least error

XU Ning, *DANG Yao-guo*, *DING Song*

(College of Economics and Management，Nanjing University of Aeronautics and Astronautics，Nanjing 211100, China．Correspondent：XU Ning，E-mail：xuning@nuaa.edu.cn)

Abstract: The formula of background value is one of the main factors causing systematic error of GM(1,1) model. A construction method for optimizing GM(1,1) model is proposed. According to structure characteristics of GM(1,1) time response function, the mean value theorem of integral is used to fit the real background value, and the relationship between the background value and the development rate is analyzed. Then, a new grey differential equation is constructed, and the parameter vector is evaluated by using the least square method, and the original parameters are restored by equations system. The new background satisfies the unbiased property and least error. Finally, a numerical case shows that the proposed algorithm breaks the confine of modeling high growth sequences, and the application indicates that the optimized model has an obviously high accuracy in the actual problem.

Keywords: grey prediction；mean value theorem；background value；least square

0 引 言

灰色预测是灰色系统理论的主要组成部分之一, GM(1,1) 模型是其中的重要模型, 该模型及其引申出的模型群解决了大量社会经济中灰因白果的系统预测问题[1-2]. GM(1,1) 模型精度与背景值构造有着密切关系, 许多学者通过对背景值构造的深入研究提出优化方法. 文献 [3] 提出了背景值插值优化方法, 其中插值系数 λ 的确定方法采用遗传算法进行寻优求解; 由于在 GM(1,1) 模型建模过程中存在离散方程和连续方程之间的过渡, 造成参数估计偏差, 文献 [4] 通过建立离散方程避免这一过程导致的误差; 文献 [5] 认为模型中的背景值在参数估计时应当贴近区间 $[k-1,k]$ 之间的积分面积, 才能使参数估计减少偏差; 文献 [6] 进一步根据背景值几何意义提出修正方法, 并通过大量数据证明背景值的修正对模型精度具有明显提升作用; 文献 [7] 基于离散函数的累加性质, 推导出优化背景值的一种方法, 实例表明该优化方法不但提高了模型精度, 同时突破了发展系数 $[-2,2]$ 的局限; 文献 [8] 将背景值优化方法拓展到更一般化的非等间距 GM(1,1) 模型中, 并根据离散指数的性质推

收稿日期: 2013-12-26；**修回日期:** 2014-03-24.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (71071077, 71371098)；中央高校基本科研业务费专项资金项目 (NC2012001, NZ2010006, NR2011009, NR2013015)；高校哲学社会科学重点研究基地重大项目 (2012JDXM005).

作者简介: 徐宁 (1983−), 男, 博士生, 从事灰色系统理论、数量经济的研究；党耀国 (1964−), 男, 教授, 博士生导师, 从事灰色系统理论、数量经济等研究.

导出优化背景值公式; 文献[9]对模型进行了背景值优化, 并认为 MGM(1,1) 模型背景值优化公式与单变量 GM(1,1) 模型中的优化公式并不完全一致. 以上方法在序列满足准指数条件时, 能够得到较好的预测结果. 为了同时缩小由数据所含噪声带来的背景值偏差, 文献[10]提出了对初始序列预处理的方法以提高光滑性, 并达到适用于高增长序列的效果; 文献[11]结合非线性优化的粒子群算法对背景值直接进行寻优; 文献[12]提出结合初值优化的方法优化模型; 文献[13]将初值优化方法和背景值优化结合起来进行模型优化, 使拟合效果得到明显提升; 文献[14]将背景值插值算法进行改进, 提出了基于数值逼近的优化模型, 进一步提升了建模精度.

为了避免建模过程中产生明显的系统误差, 本文提出背景值构造需同时满足无偏性和最小误差性. 首先, 研究背景值线性组合参数 α 与发展系数 $-a$ 之间的关系, 分析传统背景值随 $-a$ 变化产生系统误差的趋势; 然后, 通过对 GM(1,1) 模型的变换构建新灰色微分方程, 利用最小二乘法估计辅助参数 a^*, b^*, 构建方程组还原原始参数 a, b 和参数 α; 最后得到优化模型的时间响应式. 在案例分析中, 对不同发展系数的白指数序列进行了建模拟合, 当序列增长率较高时依然能够实现近似完全拟合, 说明新模型具备无偏性并且突破了高增长建模的局限; 在实际问题中, 对我国私人汽车拥有量进行了建模预测, 并与原始 GM(1,1) 模型和其他优化模型进行对比, 结果表明本文模型能够获得较高精度.

1 GM(1,1) 模型的真实背景值与发展系数之间的关系

定义 1 设非负原始序列为 $X^{(0)}=\{x^{(0)}(1), x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n)\}$, $X^{(1)}=\{x^{(1)}(1),x^{(1)}(2),\cdots,x^{(1)}(n)\}$ 为其一阶累加生成的 $(1-\mathrm{AGO})$ 序列, 其中

$$x^{(1)}(k)=\sum_{i=1}^{k}x^{(0)}(i).$$

称

$$x^{(0)}(k)+az^{(1)}(k)=b \tag{1}$$

为 GM(1,1) 模型的定义式, 也称为灰色微分方程, 其中 $z^{(1)}(k)$ 为 GM(1,1) 模型背景值. 称

$$\frac{\mathrm{d}x^{(1)}(t)}{\mathrm{d}t}+ax^{(1)}(t)=b \tag{2}$$

为白化微分方程.

令

$$Y=\begin{bmatrix}x^{(0)}(2)\\x^{(0)}(3)\\\vdots\\x^{(0)}(n)\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}-z(2),1\\-z(3),1\\\vdots\\-z(n),1\end{bmatrix},$$

参数列 $r=(a,b)^{\mathrm{T}}$, 那么参数列的最小二乘意义下的估计值为 $\hat{r}=(B^{\mathrm{T}}B)^{-1}B^{\mathrm{T}}Y$, 将参数估计值代入白化微分方程解得时间相应函数. 由此可知, 背景值构造形式的偏差通过参数估计影响模型拟合误差精度, 形成建模的系统误差. 关于真实背景值的意义, 在区间 $[k-1,k]$ 上对式(2)两边取积分可得

$$\int_{k-1}^{k}\frac{\mathrm{d}x^{(1)}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t+a\int_{k-1}^{k}x^{(1)}\,\mathrm{d}t=b, \tag{3}$$

进而得到

$$x^{(1)}(k)-x^{(1)}(k-1)+a\int_{k-1}^{k}x^{(1)}\,\mathrm{d}t=b. \tag{4}$$

从几何意义来说, 背景值 $z^{(1)}(k)$ 为 $[k-1,k]$ 区间内曲线到横坐标轴间的积分面积, 能够满足无偏性的背景值准确形式为

$$z_0^{(1)}(k)=\int_{k-1}^{k}x^{(1)}\mathrm{d}t.$$

定理 1 真实背景值

$$z_0^{(1)}(k)=\int_{k-1}^{k}x^{(1)}\,\mathrm{d}t$$

等价于 $x^{(1)}(k-1), x^{(1)}(k)$ 和参数 α 的线性组合, 即存在 $\alpha\in[0,1]$, 使

$$z_0^{(1)}(k)=\alpha x^{(1)}(k-1)+(1-\alpha)x^{(1)}(k).$$

证明 由积分中值定理可知, 对于

$$z_0^{(1)}(k)=\int_{k-1}^{k}x^{(1)}\,\mathrm{d}t,$$

存在 $\alpha\in[0,1]$, 使

$$z_0^{(1)}(k)=\alpha x^{(1)}(k-1)+(1-\alpha)x^{(1)}(k). \qquad \square$$

定理 2 对于原始序列 $X^{(0)}=(x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n))$, $X^{(0)}$ 的 (1–AGO) 序列为 $X^{(1)}=(x^{(1)}(1),x^{(1)}(2),\cdots,x^{(1)}(n))$. 若 $x^{(0)}(k)$ 满足齐次指数增长规律, 即 $x^{(0)}(k)=c\mathrm{e}^{-a(k-1)}$, 则其 $(1-\mathrm{AGO})$ 序列 $X^{(1)}$ 为非齐次指数序列形式, 即 $x^{(1)}(k)=C\mathrm{e}^{-a(k-1)}+D$[7].

定理 3 对于原始序列 $X^{(0)}=(x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n))$, $X^{(0)}$ 的 (1–AGO) 序列为 $X^{(1)}=(x^{(1)}(1),x^{(1)}(2),\cdots,x^{(1)}(n))$, $Z^{(1)}=(z^{(1)}(1),z^{(1)}(2),\cdots,z^{(1)}(n))$ 为 GM(1, 1) 模型背景值序列. 若 $X^{(0)}$ 满足白指数增长规律, 即 $x^{(0)}(k)=c\mathrm{e}^{-a(k-1)}$, 背景值的线性组合构造形式为

$$z^{(1)}(k)=\alpha x^{(1)}(k-1)+(1-\alpha)x^{(1)}(k),$$

则有

$$\alpha = (1/a) - 1/(\mathrm{e}^a - 1).$$

证明 设序列 $x^{(0)}(k) = c\mathrm{e}^{-a(k-1)}$, 由定理 2 可知 $(1-\mathrm{AGO})$ 序列具有非齐次指数形式

$$x^{(1)}(k) = C\mathrm{e}^{-a(k-1)} + D.$$

由 GM(1, 1) 模型背景值的几何意义可得

$$\begin{aligned} z^{(1)}(k) = \int_{k-1}^{k} x^{(1)}\,\mathrm{d}t = \\ \int_{k-1}^{k} (C\mathrm{e}^{-a(t-1)} + D)\,\mathrm{d}t = \\ -\frac{C}{a}\mathrm{e}^{-a(k-2)}(\mathrm{e}^{-a} - 1) + D. \end{aligned} \tag{5}$$

由定理 1 可知, 存在 $\alpha \in [0,1]$, 使

$$z^{(1)}(k) = \alpha x^{(1)}(k-1) + (1-\alpha)x^{(1)}(k),$$

即

$$\begin{aligned} z^{(1)}(k) = \\ \alpha(C\mathrm{e}^{-a(k-2)} + D) + (1-\alpha)(C\mathrm{e}^{-a(k-1)} + D), \end{aligned} \tag{6}$$

整理后可得

$$z^{(1)}(k) = C\mathrm{e}^{-a(k-2)}[\alpha(1-\mathrm{e}^{-a}) + \mathrm{e}^{-a}] + D. \tag{7}$$

由式 (5) 和 (7) 可得参数 α 与发展系数 a 之间的关系等式:

$$\begin{aligned} C\mathrm{e}^{-a(k-2)}[\alpha(1-\mathrm{e}^{-a}) + \mathrm{e}^{-a}] + D = \\ -\frac{C}{a}\mathrm{e}^{-a(k-2)}(\mathrm{e}^{-a} - 1) + D, \end{aligned} \tag{8}$$

化简后可得

$$\alpha = \frac{1}{a} - \frac{1}{\mathrm{e}^a - 1}. \tag{9}$$

由此定理 3 得证. □

定理 3 给出了背景值参数 α 与序列发展系数之间的关系, 利用定理 3 可进一步分析真实背景值中参数 α 与序列的发展系数 $-a$ 之间的变化关系.

性质 1 当准指数序列发展系数 $-a \to +\infty$ 时, 有 $\alpha \to 1$; 当发展系数 $-a \to -\infty$ 或 0 时, 有 $\alpha \to 0$.

证明 当 $-a \to +\infty$ 时, 有

$$\lim_{a \to -\infty}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\mathrm{e}^a - 1}\right) = 1;$$

当 $-a \to -\infty$ 时, 有

$$\lim_{a \to +\infty}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\mathrm{e}^a - 1}\right) = 0;$$

当 $-a \to 0$ 时, 因为 $\mathrm{e}^a \approx 1 + a$, 所以有

$$\lim_{a \to 0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\mathrm{e}^a - 1}\right) = \lim_{a \to 0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a}\right) = 0.$$

由此性质 1 得证. □

进一步分析传统背景值产生系统误差的原因, 研究传统背景值构造与真实背景值之间的差距, 以明确其适用范围.

定义 2 设满足 GM(1,1) 模型几何意义的真实背景值为

$$\begin{aligned} z_0^{(1)}(k) = \int_{k-1}^{k} x^{(1)}\,\mathrm{d}t = \\ \alpha_0 x^{(1)}(k-1) + (1-\alpha_0)x^{(1)}(k), \end{aligned}$$

其中参数 $\alpha_0 \in [0,1]$. $Z_1^{(1)}$ 为传统背景值序列, 其中

$$z_1^{(1)}(k) = \frac{x^{(1)}(k-1) + x^{(1)}(k)}{2},$$

称

$$R(k) = \frac{z_0^{(1)}(k) - z_1^{(1)}(k)}{z_0^{(1)}(k)} \tag{10}$$

为背景值相对误差率.

性质 2 设序列 $X^{(0)} = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \cdots, x^{(0)}(n))$, 传统 GM(1,1) 模型背景值 $z_1^{(1)}(k)$ 与真实背景值

$$z_0^{(1)}(k) = \alpha_0(k-1) + (1-\alpha_0)x^{(1)}(k)$$

之间的相对误差率为

$$R(k) = \frac{0.5 - \alpha_0}{x^{(1)}(k)/x^{(0)}(k) - \alpha_0}.$$

证明 根据定义 2, 设原始序列为 $X^{(0)}$, 令 $z_1^{(1)}(k)$ 为传统 GM(1, 1) 模型背景值, 以 $z_0^{(1)}(k)$ 为真实背景值, 代入式 (10) 可得

$$\begin{aligned} R(k) = \\ (\alpha_0(k-1) + (1-\alpha_0)x^{(1)}(k) - \\ [0.5x^{(1)}(k-1) + 0.5x^{(1)}(k)])/(a_0 x^{(1)}(k-1) + \\ (1-\alpha_0)x^{(1)}(k)), \end{aligned}$$

其中 $k = 2, 3, \cdots, n$. 整理后可得

$$\begin{aligned} R(k) = \\ \frac{(0.5-\alpha_0)[x^{(1)}(k) - x^{(1)}(k-1)]}{x^{(1)}(k) - \alpha_0[x^{(1)}(k) - x^{(1)}(k-1)]} = \\ \frac{(0.5-\alpha_0)x^{(0)}(k)}{x^{(1)}(k) - \alpha_0 x^{(0)}(k)}, \end{aligned}$$

因此

$$R(k) = \frac{0.5 - \alpha_0}{x^{(1)}(k)/x^{(0)}(k) - \alpha_0}.$$

基于以上定理和性质可知, 近似指数趋势的灰序列发展系数与真实背景值的参数 α_0 之间呈现非线性关系. 从变化趋势上看, 当发展系数 $-a \to +\infty$ 时, 背景值参数 $\alpha_0 \to 1$, 此时 $x^{(1)}(k)/x^{(0)}(k) \to 1$, 传统背景值的相对误差 $|R(k)| \to +\infty$, 由于系统误差增长过大, 难以对高增长序列进行建模预测; 当发展系数 $-a \to 0$ 时, 参数 $\alpha_0 \to 0$, 且 $x^{(1)}(k)/x^{(0)}(k) \to k$, 传统背景值 $z_1^{(1)}(k)$ 的误差率 $|R(k)| \to 1/(2k)$. 从表象上看, 在低增长时由于 $(x^{(1)}(k-1) + x^{(1)}(k))/2$ 所表示

的梯形面积与积分

$$\int_{k-1}^{k} x^{(1)}\,\mathrm{d}t$$

的面积趋近, 背景值误差率 $R(k)$ 相对较小, 但从背景值线性组合的参数上来看仍不满足建模时的无偏性和误差最小性的要求.

2 背景值误差最小化的 GM(1,1) 优化模型

基于以上分析, 本文提出一种新的优化模型构建方法, 将线性组合背景值构造形式代入灰色微分方程式 (1), GM(1, 1) 模型的灰色微分方程转化为

$$x^{(0)}(k)+a[\alpha x^{(1)}(k-1)+(1-\alpha)x^{(1)}(k)]=b. \quad (11)$$

将含参数 α 的项合并后可得

$$x^{(0)}(k)+a\cdot\alpha[x^{(1)}(k-1)-x^{(1)}(k)]=b-ax^{(1)}(k), \quad (12)$$

于是式 (12) 转化为

$$(1-a\cdot\alpha)x^{(0)}(k)=b-ax^{(1)}(k), \quad (13)$$

进而可得

$$x^{(0)}(k)=\frac{b}{1-a\cdot\alpha}-\frac{a}{1-a\cdot\alpha}x^{(1)}(k). \quad (14)$$

通过参数合并, 令辅助参数

$$b^*=\frac{b}{1-a\cdot\alpha},\ a^*=\frac{a}{1-a\cdot\alpha},$$

由式 (13) 可得新的灰色微分方程形式为

$$x^{(0)}(k)=-a^*x^{(1)}(k)+b^*. \quad (15)$$

定理 4 设 GM(1,1) 优化模型的背景值为线性组合构造

$$z^{(1)}(k)=\alpha x^{(1)}(k-1)+(1-\alpha)x^{(1)}(k),$$

灰色微分方程形式同式 (15), 模型参数列为 $r=(a^*, b^*)^{\mathrm{T}}$. 令

$$Y=\begin{bmatrix} x^{(0)}(1)\\ x^{(0)}(2)\\ \vdots\\ x^{(0)}(n)\end{bmatrix},$$

$$B=\begin{bmatrix} -x^{(1)}(1) & 1\\ -x^{(1)}(2) & 1\\ \vdots & \vdots\\ -x^{(1)}(n) & 1\end{bmatrix},$$

GM(1, 1) 优化模型满足误差最小二乘意义下的参数估计值为

$$\hat{r}=(B^{\mathrm{T}}B)^{-1}B^{\mathrm{T}}Y.$$

定理 4 的证明方法与文献 [2] 中所述类似, 故省略证明过程.

定理 5 设 GM(1,1) 优化模型的参数序列为 $r=(b^*, a^*)^{\mathrm{T}}$, 其最小二乘估计值为

$$\hat{r}=(B^{\mathrm{T}}B)^{-1}B^{\mathrm{T}}Y,$$

则参数 a, b 和 α 满足最小二乘意义下的估计值分别为

$$\begin{cases} a=\ln(\hat{a}^*+1),\\ \alpha=\dfrac{1}{\ln(\hat{a}^*+1)}-\dfrac{1}{\hat{a}^*},\\ b=\dfrac{b^*\ln(\hat{a}^*+1)}{\hat{a}^*}.\end{cases}$$

证明 由式 (15) 中 a, b 与 a^*, b^* 的关系, 以及定理 3 的结论可得

$$\begin{cases} b^*=\dfrac{b}{1-a\alpha},\\ a^*=\dfrac{a}{1-a\alpha},\\ \alpha=\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{\mathrm{e}^a-1}.\end{cases}$$

解方程组可得

$$\begin{cases} a=\ln(\hat{a}^*+1),\\ \alpha=\dfrac{1}{\ln(\hat{a}^*+1)}-\dfrac{1}{\hat{a}^*},\\ b=\dfrac{b^*\ln(\hat{a}^*+1)}{\hat{a}^*}.\end{cases}$$

将参数 a 和 b 代入白化微分方程

$$\frac{\mathrm{d}x^{(1)}(t)}{\mathrm{d}t}+ax^{(1)}(t)=b,$$

可得模型时间响应式为

$$\hat{x}^{(1)}(t)=\frac{b}{a}+\Big(x^{(0)}(1)-\frac{b}{a}\Big)\mathrm{e}^{-a(t-1)}. \quad (16)$$

离散化后时间响应式为

$$\hat{x}^{(1)}(k)=\frac{b}{a}+\Big(x^{(0)}(1)-\frac{b}{a}\Big)\mathrm{e}^{-a(k-1)}, \quad (17)$$

经过累减还原为

$$\hat{x}^{(0)}(k+1)=\hat{x}^{(1)}(k+1)-\hat{x}^{(1)}(k).$$

3 案例分析

为了验证本文模型的无偏性, 取 $x^{(0)}(k)=\mathrm{e}^{-ak}$, $k=1,2,\cdots,5$, 发展系数分别设置为 $-a=0.1, 0.3, 0.8, 3.0, 6.0$, 原始序列如表 1 所示.

表 1 白指数序列数据表

$-a$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
0.1	1.105 2	1.221 4	1.349 9	1.491 8	1.648 7
0.3	1.349 9	1.822 1	2.459 6	3.320 1	4.481 7
0.8	2.225 5	4.953 0	11.023 2	24.532 5	54.598 2
3.0	20.085 5	403.428 8	8 103.083 9	162 754.791 4	3 269 017.372 5
6.0	403.428 8	162 754.79	65 659 969.14	26 489 122 129.84	10 686 474 581 524.50

表 1 中数据通过四舍五入保留小数点后四或二位, 在软件计算中采用双精度浮点数尽可能保持计算精度避免误差. 通过计算得到各序列的参数和拟合相对误差情况如表 2 所示.

表 2 白指数序列建模参数及误差验证表

$-a$	二级参数		原始参数		相对误差/%
	a^*	b^*	a	b	
0.1	−0.095 15	1	−0.100 0	1.050 8	0.00
0.3	−0.550 67	1	−0.300 0	1.157 5	0.00
0.8	−0.550 67	1	−0.800 0	1.452 8	0.00
3.0	−0.950 21	1	−3.000 0	3.157 2	0.00
6.0	−0.997 52	1.000 45	−6.000 0	6.017 6	0.00

根据表 2 中的计算结果, 除去由计算机数据处理精度造成的误差, 基本上优化模型完全拟合了白化指数增长序列, 突破了发展系数 $-a \in [-2, 2]$ 的限制. 由表 2 可知, 当发展系数 $-a$ 最高达到 6 时依然接近完全拟合, 保持无偏性, 这说明本文模型对高增长序列建模具有优势.

另外, 在实际问题的应用中, 选取我国交通系统中全国私人汽车拥有量进行建模, 采用 2006～2010 年的数据作为原始序列, 记为 $X^{(0)}$, 其 (1−AGO) 序列为 $X^{(1)}$.

表 3 我国 2006～2010 年的私人汽车拥有量

参数	2006 年	2007 年	2008 年	2009 年	2010 年
全国私人汽车拥有量/万辆	2 333.32	2 876.22	3 501.39	4 574.91	5 938.71

对数据建立 GM(1, 1) 模型, 背景值设为

$$z^{(1)}(k) = \alpha x^{(1)}(k-1) + (1-\alpha)x^{(1)}(k),$$

按照本文提出的方法将背景值公式代入 GM(1, 1) 模型 (1), 通过转化得到

$$x^{(0)}(k) = -a^* x^{(1)}(k) + b^*,$$

根据定理 4 进行参数估计可得

$$\begin{cases} a^* = 0.214\,48, \\ b^* = 1\,753.158\,7; \end{cases}$$

根据定理 5 可得原始参数

$$\begin{cases} a = -0.241\,4, \\ b = 1\,973.274\,6, \\ \alpha = 0.520\,01; \end{cases}$$

进而得到时间响应式为

$$x^{(0)}(k) = 10\,507.460\,69\mathrm{e}^{0.241\,4(k-1)} - 8\,174.140\,7.$$

作为对比, 模型 1 按照传统方法建模, 背景值采用

$$z_1^{(1)}(k) = \frac{x^{(1)}(k-1) + x^{(1)}(k)}{2};$$

模型 2 采用文献 [7] 提出的离散指数优化方法建模, 背景值采用

$$z_2^{(1)}(k) = \frac{x^{(0)}(k)}{\ln x^{(0)}(k) - \ln x^{(0)}(k-1)} + \frac{[x^{(0)}(k-1)]^k}{[x^{(0)}(k)]^{k-2}[x^{(0)}(k-1) - x^{(0)}(k)]}.$$

3 种建模方法拟合情况如表 4 所示.

表 4 3 种建模方法拟合精度对比表

原始序列	模型 1		模型 2		本文方法	
	拟合值	相对误差/%	拟合值	相对误差/%	拟合值	相对误差/%
2 333.32	2 333.320 0	0.000 0	2 333.320 0	0.000 0	2 333.320 0	0.000 0
2 876.22	2 772.367 2	3.610 7	2 781.857 5	3.280 8	2 868.914 2	0.254 0
3 501.39	3 554.847 4	1.526 7	3 608.180 0	3.049 9	3 652.230 8	4.308 0
4 574.91	4 558.176 9	0.365 8	4 679.953 3	2.296 1	4 649.421 0	1.628 7
5 938.71	5 844.688 8	1.583 2	6 070.086 0	2.212 2	5 918.879 9	0.333 9
平均相对误差		1.417 3		2.167 8		1.304 9

表 4 中列出了 3 个模型的拟合值和相对误差情况. 由表 4 可知: 本文提出的优化建模方法能够得到较为满意的拟合效果, 平均相对误差为 1.304 9 %; 相对于采用传统建模方法的模型 1 和离散指数优化方法的模型 2 而言, 本文算法的平均相对误差最低, 在满足灰色建模准指数条件时, 本文模型算法能够达到拟合序列最小二乘意义下的最优.

4 结 论

本文分析了 GM(1, 1) 模型背景值与发展系数之间的关系, 提出了背景值构造应同时满足无偏性和最小误差性要求, 并深入研究了传统背景值随发展系数变化产生误差的趋势. 基于对背景值的约束, 针对满足准指数建模条件的序列提出了一种新的 GM(1,1) 模型优化算法. 该方法一方面突破了灰色模型对高增长序列建模能力的不足, 同时另一方面保持了较好的无偏性, 在实际应用中能够得到良好的建模效果.

参考文献(References)

[1] Liu S F, Lin Y. Grey information theory and practical applications[M]. London: Springer-Verlag, 2006.

[2] 刘思峰, 党耀国, 方志耕. 灰色系统理论及应用[M]. 第5版. 北京: 科学出版社, 2010.
(Liu S F, Dang Y G, Fang Z G. Grey system theory and its application[M]. 5th ed. Beijing: Science Press, 2010.)

[3] 谢开贵, 李春燕, 周家启. 基于遗传算法的GM(1,1,λ)模型[J]. 系统工程学报, 2000, 5(2): 168-172.
(Xie K G, Li C Y, Zhou J Q. Grey model GM(1,1,λ) based on genetic algorithm[J]. J of Systems Engineering, 2000, 15(2): 168-172.)

[4] 谢乃明, 刘思峰. 离散GM(1,1)模型与灰色预测模型建模机理[J]. 系统工程理论与实践, 2005, 25(1): 93-99.
(Xie N M, Liu S F. Discrete GM(1,1) and mechanism of grey forecasting model[J]. Systems Engineering - Theory & Practice, 2005, 25(1): 93-99.)

[5] 谭冠军. GM(1,1)模型的背景值构造方法和应用(I)[J]. 系统工程理论与实践, 2000, 20(5): 98-103.
(Tan G J. The structure method and application of background value in grey system GM(1,1) model(I)[J]. Systems Engineering - Theory & Practice, 2000, 20(4): 98-103.)

[6] 罗党, 刘思峰, 党耀国. 灰色模型GM(1,1)优化[J]. 中国工程科学, 2003, 5(8): 50-53.
(Luo D, Liu S F, Dang Y G. The optimization of grey model GM(1,1)[J]. Engineering Science, 2003, 5(8): 50-53.)

[7] 王正新, 党耀国, 刘思峰. 基于离散指数函数优化的GM(1,1)模型[J]. 系统工程理论与实践, 2008, 28(2): 61-67.
(Wang Z X, Dang Y G, Liu S F. An optimal GM(1,1) based on the discrete function with exponential law[J]. Systems Engineering - Theory & Practice, 2008, 28(2): 61-67.)

[8] 王叶梅, 党耀国, 王正新. 非等间距GM(1,1)模型背景值的优化[J]. 中国管理科学, 2008, 16(4): 159-162.
(Wang Y M, Dang Y G, Wang Z X. The optimization of background value in non-equidistant GM(1,1) model[J]. Chinese J of Management Science, 2008, 16(4): 159-162.)

[9] 熊萍萍, 党耀国, 王正新. MGM(1,1)模型背景值的优化[J]. 控制与决策, 2011, 26(6): 806-810.
(Xiong P P, Dang Y G, Wang Z X. Optimization of background value in MGM(1,1) model[J]. Control and Decision, 2011, 26(6): 806-810.)

[10] 曾祥燕, 肖新平. 模型的改进及其适用范围[J]. 系统工程, 2009, 27(1): 103-107.
(Zeng X Y, Xiao X P. Improvement of GM(1,1) model and its application region[J]. Systems Engineering, 2009, 27(1): 103-107.)

[11] 张可, 刘思峰. 基于粒子群优化算法的广义累加灰色模型[J]. 系统工程与电子技术, 2010, 7(32): 1437-1440.
(Zhang K, Liu S F. Indirect generating grey model based on particle swarm optimization algorithm[J]. Systems Engineering and Electronics, 2010, 7(32): 1437-1440.)

[12] Wang Y H, Dang Y G, Li Y Q , et al. An approach to increase prediction precision of GM(1,1) model based on optimization of the initial condition[J]. Expert Systems with Applications, 2010, 37(2): 5640-5644.

[13] 张彬, 西桂权. 基于背景值和边值修正的GM(1,1)模型优化[J]. 系统工程理论与实践, 2013, 33(3): 682-688.
(Zhang B, Xi G Q. GM(1,1) model optimization based on the background value and boundary value correction[J]. Systems Engineering - Theory & Practice, 2013, 33(3): 682-688.)

[14] 王晓佳, 杨善林. 基于组合差值的GM(1, 1)模型预测方法的改进与应用[J]. 中国管理科学, 2012, 20(2): 129-134.
(Wang X J, Yang S L. The improvement and applications of forecasting method in GM(1,1) model based on combinative interpolation[J]. Chinese J of Management Science, 2012, 20(2): 129-134.)

(责任编辑: 滕 蓉)