第 30 卷 第 4 期
Vol. 30 No. 4

控 制 与 决 策
Control and Decision

2015 年 4 月
Apr. 2015

文章编号: 1001-0920 (2015) 04-0703-06 DOI: 10.13195/j.kzyjc.2014.0091

基于超越几何规划的热轧操作优化问题

陈 丽, 唐立新, 汤廉洁

(东北大学 a. 辽宁省制造系统与物流优化重点实验室，b. 工业工程与物流优化研究所，沈阳 110004)

摘 要: 针对钢铁热轧生产操作优化问题, 建立热轧操作优化模型. 该模型的难点是, 模型具有高度非线性的特征, 难以获得最优解. 考虑模型数学表达式的结构特点, 将操作优化模型等价转化为超越几何规划模型, 由于获得的模型存在对数项, 无法直接有效求解, 利用模型的结构特点, 通过数学变换和理论分析, 转化为凸规划模型, 从而利用凸规划软件获得最优解, 为操作优化问题获得全局最优解提供一种新方法.

关键词: 超越几何规划；操作优化；热轧；全局优化

中图分类号: TP273 **文献标志码:** A

Operation optimization problem of hot rolling based on the transcendental geometric programming

CHEN Li, *TANG Li-xin*, *TANG Lian-jie*

(a. The Liaoning Key Laboratory of Manufacturing System and Logistics，b. Institute of Industrial Engineering & Logistics Optimization，Northeastern University，Shenyang 110004，China．Correspondent：CHEN Li，E-mail：275368109@qq.com)

Abstract: A mathematic model is built for the operation optimization problem of hot rolling. It is difficult to get global optimization for the operation optimization problem that has highly nonlinear characteristic. Considering the structural characteristics of the mathematic model, the operation optimization model is turned into a transcendental geometric programming model. The transcendental geometric programming model which is transformed from the operation optimization model of hot rolling cannot get the global optimization directly because the model has logarithmic terms. Based on the model structural, some theoretical analysis and mathematical transformation are given, which can help the operation optimization model of hot rolling transform into a convex programming model. Convex programming software can be used to solve the convex programming model.

Keywords: transcendental geometric programming；operation optimization；hot rolling；global optimization

0 引 言

在流程工业中, 操作优化主要通过寻找最佳的工艺参数设定值以获得最大的经济效益, 在钢铁企业轧制生产中操作优化也称为负荷分配. 在热轧精轧生产过程中, 板坯在热轧精轧机组上轧制, 发生形变, 厚度逐步减少, 最后达到带钢尺寸, 这一轧制过程都是按照事前设定好的参数进行轧制的, 即根据来料的信息、成品信息和设备信息计算轧制的策略, 确定各机架的出口厚度、轧制力、轧制力矩等各个控制参数, 使最后的产品尺寸精度和性能满足客户要求. 合理的负荷分配能够更容易地控制热轧机组, 从而达到更好的控制效果, 所以, 研究钢铁热轧的操作优化问题具有现实意义[1].

在研究热轧操作优化问题时, 需要考虑的限制条件有电机的容量限制、工艺条件限制、板形限制和速度限制等, 这些因素往往是相互耦合的, 关系十分复杂. 热轧操作优化问题是一个多变量、强藕合、高度非线性问题, 所用到的数学模型较为复杂, 利用一般的最优化方法求解速度较慢. 许多学者也对操作优化问题进行了研究, 如李维刚等[2]提出了 CLAD 算法解决热连轧精轧机组负荷分配的在线优化设定; 胡长斌等[3]提出了一种具有柔性框架结构的改进型复杂过程全局优化算法实现热连轧精轧机组负荷分配的优化设定. 但是, 他们都不是用最优化的算法求解操作

收稿日期: 2014-01-14；**修回日期:** 2014-05-23.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61374203)；国家 863 计划项目(2013AA040704).

作者简介: 陈丽(1980−), 女, 博士生, 从事过程控制、操作优化的研究；唐立新(1966−), 男, 教授, 博士生导师, 从事流程工业生产与物流调度、生产过程解析与优化等研究.

优化问题, 得到的解可能不是全局最优解, 只是近似解. 因此, 需要寻求一种求解问题最优解的方法. 几何规划通过简单的指数变化可以变为凸规划, 直接判断问题具有全局最优解, 但是, 一般情况下许多问题不能直接化成几何规划, 操作优化问题也只能转化成超越几何规划 (TGP). 这是一种特殊的数学规划, 由于超越几何规划本身存在对数项, 不能像几何规划那样通过 e 变换将问题变成凸规划, 因此, 利用一系列的数学变换和理论分析, 将基于超越几何规划的操作优化问题转化为凸规划问题.

本文针对钢铁热轧生产操作优化问题, 建立以最小化等相对功率富余量、等轧制力和板形良好为目标的考虑多种影响因素的热轧操作优化模型. 从理论上将操作优化模型等价转化为超越几何规划模型, 针对其对数项, 通过数学变换和理论分析, 转化为凸规划模型, 从而利用凸规划软件获得最优解, 为操作优化问题获得全局最优解提供一种新方法.

1 超越几何规划

几何规划是数学规划理论中一个年轻的分支, 十几年来几何规划发展很快, 并且在工程优化设计中得到了广泛应用[4]. 几何规划问题 (GP) 本身不是凸规划问题, 但是可以通过 e 变换转化为凸规划问题.

假设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是 n 个大于 0 的变量, 且 $c_i > 0, \alpha_{ji} \in R$, 称 $f(x) = \sum\limits_{j=1}^{N} c_j x_1^{\alpha_{j1}} x_2^{\alpha_{j2}} \cdots x_n^{\alpha_{jn}}$ 为正多项式函数. 若 $n = 1$, 则称 $g(x) = c x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_m}$ 为单项式函数. 标准几何规划的形式为

$$\begin{aligned} &\min\ f_0(x).\\ &\text{s.t. } f_m(x) \leqslant 1,\ m = 1, 2, \cdots, M;\\ &\quad\ \ g_k(x) = 1,\ k = 1, 2, \cdots, K. \end{aligned}$$

其中: $f_0(x)$、$f_m(x)$ 为正多项式, $g_k(x)$ 为单项式.

几何规划是一种特殊的数学规划问题, 其目标函数和约束函数有特殊形式, 大量实际问题均可等价转化为几何规划问题. 在生产过程中, 经常出现函数的变量中含有对数变量的情况, 这是几何规划的一种广义形式, 这种形式给寻找全局最优解增加了难度. 称这种几何规划为超越几何规划 (TGP), 形式如下:

$$\begin{aligned} &\min\ f_0(X).\\ &\text{s.t. } f_m(x) \leqslant 1,\ m = 1, 2, \cdots, M;\\ &\quad\ f_m(x) \prod_{s=1}^{S} e^{\beta_s x_s} \leqslant 1,\ m = M+1, M+2, \cdots, R;\\ &\quad\ g_k(x) = 1,\ k = 1, 2, \cdots, K. \end{aligned}$$

一些学者对超越几何规划进行了研究. luptáčik[5] 介绍了超越几何规划的定义和应用; Intriligator[6]研究了带有指数项和对数项的超越几何规划的优化问题; Lidor 等[7]提出了利用对偶原理将正项几何规划应用到超越几何规划的思想. 超越几何规划不同于一般的非线性规划, 从模型上说, 非线性规划模型很简单, 因为其目标函数和约束函数都是任意的一个非线性函数. 相反, 超越几何规划模型较为复杂, 因为不管目标函数还是约束函数都有一定的限制. 然而, 求解超越几何规划比非线性规划容易, 因为求解非线性规划问题时, 可能找不到全局最优解, 这时, 通常会利用局部解代替全局最优解. 求解超越几何规划时, 可以利用变化的技巧, 将问题转化为凸规划问题, 利用凸规划软件获得最优解.

2 基于超越几何规划的操作优化问题

2.1 相关数学模型[8]

2.1.1 轧制力数学模型

轧制力是轧钢生产中最为重要的一个工艺参数, 其计算的基本公式采用西姆斯公式, 计算如下:

$$P_i = B Q_{ip} K_i l_{ic}'. \tag{1}$$

其中: P_i 为第 i 机架的轧制力; B 为轧件轧制前后平均厚度; $l_{ic}' = \sqrt{R_i' \Delta h_i}$ 为轧辊压扁后变形区接触弧长, $R_i' = R_i(a_1 + a_2 P_i / B \Delta h_i)$, R_i 为轧辊半径, $\Delta h_i = h_{i-1} - h_i$ 为压下量, a_1 和 a_2 为正实数; $Q_{ip} = a_3 + a_4 l_{ic} / h_{ic}$ 为应力状态影响系数, $l_{ic} = \sqrt{R_i \Delta h_i}$ 为接触弧水平投影长度, $h_{ic} = (h_{i-1} + h_i)/2$ 为平均厚度, $a_3 > 0$, $a_4 > 0$; $K = a_5 \sigma$ 为平面变形下的变形阻力系数, a_5 为正实数, $\sigma = \exp(K' + AT) u^{a_6} r^{a_7}$ 为变形抗力, K'、A、a_5、a_6、a_7 为常数, $T_i = (t_i + 273)/1\,000$ 为轧制温度, t_i 为各个机架的轧制温度, 可由温度模型求得, 采用的温度模型与来料温度、厚度等有关, 与压下量和出口厚度无关, 因此作为常数看待, u 为真正变形程度.

2.1.2 轧制力矩模型

水平辊的轧制力矩是计算轧机轧制功率的重要依据, 计算公式为

$$M_i = a_8 P_i \phi l_{ic}'. \tag{2}$$

其中: M_i 为第 i 个机架的轧制力矩, ϕ 为力臂系数, a_8 为大于 0 的实数.

2.1.3 功率模型

热连轧精轧过程电动机的轧制功率模型为

$$N_i = a_9 v_i / R_i M_i, \tag{3}$$

其中 a_9 为大于 0 的实数.

2.2 热轧操作优化问题的目标函数及约束条件

在钢铁热轧精轧生产中, 对于某产品的轧制规程并不是唯一的, 按照经验分配压下量而得到的轧制规程虽然可行, 但是解并不是最优的, 而且缺乏理论依

据, 要实现最优的分配各个机架的负荷, 必须建立确定的目标函数.

以最小化等相对功率富余量、等轧制力和板形良好作为目标函数[9], 为了计算方便, 利用线性加权表示多目标函数, 有

$$\min h(s) = \lambda_N \sum_{i=1}^{n}(N_i - \lambda N_{i\max})^2 + \lambda_P \sum_{i=1}^{n}(P_i - \gamma P_{i\max})^2 + \lambda_b \sum_{i=1}^{n}(P_i - P_{bi})^2. \tag{4}$$

其中: $N_{i\max}$ 和 $P_{i\max}$ 分别为第 i 机架允许的最大轧制功率和最大轧制力; P_{bi} 为第 i 机架板形条件所要求的轧制力值; $i = 1,2,\cdots,n$; λ_N、λ_P、λ_b 为加权系数, $\lambda_N > 0$, $\lambda_P > 0$, $\lambda_b > 0$, 且 $\lambda_N + \lambda_P + \lambda_b = 1$; λ 为精轧机组电机功率的负荷系数, $\lambda > 0$; γ 为精轧机组轧制力的负荷系数, $\gamma > 0$.

约束函数为

$$N_i < N_{i\max},\ i = 1,2,\cdots,n; \tag{5}$$

$$M_i < M_{i\max},\ i = 1,2,\cdots,n; \tag{6}$$

$$P_i < P_{i\max},\ i = 1,2,\cdots,n; \tag{7}$$

$$h_i < h_{i-1},\ i = 1,2,\cdots,n; \tag{8}$$

$$\Delta h_{i\min} \leqslant \Delta h_i \leqslant \Delta h_{i\max},\ i = 1,2,\cdots,n. \tag{9}$$

其中 $\Delta h_{i\min}$ 和 $\Delta h_{i\max}$ 分别为第 i 道次板形良好的最小压下量和最大压下量. 约束 (5)、(6)、(7) 表示各机架的轧制功率、轧制力矩、轧制力分别不超过最大轧制功率、最大轧制力矩和最大轧制力. 约束 (8) 表示各机架的出口厚度一定要小于等于入口厚度. 约束 (9) 表示各机架的压下量要在一定的范围内.

2.3 热轧操作优化模型转化为标准的 TGP

操作优化问题的变量很多, 但是, 通过各模型, 最终可归结为决策各个机架的入口厚度 h_{i-1} 和出口厚度 h_i. 从轧制力模型中可以看出, 轧制力 P 的计算公式和压扁后的接触弧长 l'_{ic} 的计算公式相互关联, 需要连解才能求出 P_i. 利用求根公式计算得到轧制力为

$$P_i = 0.5a_2R_iBQ_{ip}^2K_i^2 + 0.5\times \sqrt{a_2^2R_i^2B^2Q_{ip}^4K_i^4 + 4a_1R_iBQ_{ip}^2K_i^2(h_{i-1} - h_i)}, \tag{10}$$

其中 a_1、a_2、R_i、B 都为已知的、与决策变量 h_i 无关的正实数.

令

$$x_{1,i} = h_{i-1},\ x_{2,i} = h_i,\ x_{3,i} = \Delta h_i,$$

$$x_{4,i} = N_i - \lambda N_{i\max},\ x_{5,i} = P_i - \gamma P_{i\max},$$

$$x_{6,i} = P_i - P_{bi},$$

$$x_{7,i} = a_3 + a_4\sqrt{R_i}\Delta h_i^{0.5}(h_{i-1} + h_i)^{-1},$$

$$x_{8,i} = b_1[\ln(h_{i-1}h_i^{-1})]^{a_9+a_{10}}h_i^{-a_{10}},$$

$$x_{9,i} = c_3x_{7,i}^4x_{8,i}^4 + c_4x_{7,i}^2x_{8,i}^2x_{3,i},$$

$$x_{10,i} = a_1R_ix_{3,i} + c_2c_6x_{7,i}^2x_{8,i}^2 + 0.5c_6\sqrt{c_3x_{7,i}^4x_{8,i}^4 + c_4x_{7,i}^2x_{8,i}^2x_{3,i}},$$

$$x_{11,i} = x_{4,i} + \lambda N_{i\max},\ x_{12,i} = x_{5,i} + \gamma P_{i\max},$$

$$x_{13,i} = x_{6,i} + P_{bi},\ x_{14,i} = x_{1,i} + x_{2,i},$$

则问题转化为

TPG1 :

$$\min h(s) = \lambda_N\sum_{i=1}^{n}x_{4,i}^2 + \lambda_P\sum_{i=1}^{n}x_{5,i}^2 + \lambda_b\sum_{i=1}^{n}x_{6,i}^2. \tag{11a}$$

$$\text{s.t. } c_1c_2N_{i\max}^{-1}x_{2,i}^{-1}x_{7,i}^2x_{8,i}^2x_{10,i}^{0.5} + 0.5c_1N_{i\max}^{-1}x_{2,i}^{-1}x_{9,i}^{0.5}x_{10,i}^{0.5} < 1; \tag{11b}$$

$$c_2c_5x_{7,i}^2x_{8,i}^2x_{10,i}^{0.5} + 0.5c_5x_{9,i}^{0.5}x_{10,i}^{0.5} < 1; \tag{11c}$$

$$\frac{c_2}{P_{i\max}}x_{7,i}^2x_{8,i}^2 + \frac{0.5}{P_{i\max}}x_{9,i}^{0.5} < 1; \tag{11d}$$

$$x_{1,i}^{-1}x_{2,i} < 1; \tag{11e}$$

$$\Delta h_{i\max}^{-1}x_{3,i} \leqslant 1; \tag{11f}$$

$$\Delta h_{i\min}x_{3,i}^{-1} \leqslant 1; \tag{11g}$$

$$x_{1,i} \leqslant x_{2,i} + x_{3,i}; \tag{11h}$$

$$c_1c_2x_{2,i}^{-1}x_{7,i}^2x_{8,i}^2x_{10,i}^{0.5}x_{11,i}^{-1} + 0.5c_1x_{2,i}^{-1}x_{9,i}^{0.5}x_{10,i}^{0.5}x_{11,i}^{-1} \leqslant 1; \tag{11i}$$

$$c_2x_{7,i}^2x_{8,i}^2x_{12,i}^{-1} + 0.5x_{9,i}^{0.5}x_{12,i}^{-1} \leqslant 1; \tag{11j}$$

$$c_2x_{7,i}^2x_{8,i}^2x_{13,i}^{-1} + 0.5x_{9,i}^{0.5}x_{13,i}^{-1} \leqslant 1; \tag{11k}$$

$$a_3x_{7,i}^{-1} + a_4\sqrt{R_i}x_{3,i}^{0.5}x_{7,i}^{-1}x_{14,i}^{-1} \leqslant 1; \tag{11l}$$

$$b_1[\ln(x_{1,i}x_{2,i}^{-1})]^{a_9+a_{10}}x_{2,i}^{-a_{10}}x_{8,i}^{-1} \leqslant 1; \tag{11m}$$

$$c_3x_{7,i}^4x_{8,i}^4x_{9,i}^{-1} + c_4x_{3,i}x_{7,i}^2x_{8,i}^2x_{9,i}^{-1} \leqslant 1; \tag{11n}$$

$$a_1R_ix_{3,i}x_{10,i}^{-1} + c_2c_6x_{7,i}^2x_{8,i}^2x_{10,i}^{-1} + 0.5c_6x_{9,i}^{0.5}x_{10,i}^{-1} \leqslant 1; \tag{11o}$$

$$x_{11,i} \leqslant x_{4,i} + \lambda N_{i\max}; \tag{11p}$$

$$x_{12,i} \leqslant x_{5,i} + \gamma P_{i\max}; \tag{11q}$$

$$x_{13,i} \leqslant x_{6,i} + P_{bi}; \tag{11r}$$

$$x_{14,i} \leqslant x_{1,i} + x_{2,i}; \tag{11s}$$

$$x_{j,i} > 0,\ i = 1,2,\cdots,n,\ j = 1,2,\cdots,14; \tag{11t}$$

$$\lambda_N > 0,\ \lambda_P > 0,\ \lambda_b > 0,\ \lambda_N + \lambda_P + \lambda_b = 1. \tag{11u}$$

其中

$$c_1 = a_{17}a_{16}v_nh_n\phi/R_i,\ c_2 = 0.5a_2R_iB,$$

$$c_3 = a_2^2R_i^2B^2,\ c_4 = 4a_1R_iB^2,$$

$$c_5 = a_{16}\phi/M_{i\max},\ c_6 = a_2R_i/B,$$

且 c_i、a_i、b_1、B、R_i、ϕ、$N_{i\max}$、$P_{i\max}$、$M_{i\max}$、P_{ib}、λ、γ 皆为大于零的常数. 这样, 除约束 (11h)、(11p)～(11s) 外, 模型其他的约束均可转化为标准型.

引理 1 若 $x_i > 0, \omega_i > 0, \sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i = 1, 1 \leqslant i \leqslant n$, 则 $\prod\limits_{i=1}^{n}\Big(\dfrac{x_i}{\omega_i}\Big)^{\omega_i} \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n}x_i$, 等号当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 成立.

证明 由于 $\mathrm{d}^2(\ln u)/\mathrm{d}x^2 = -1/u^2 < 0$, 在开区间 $(0, +\infty)$ 上 $\ln u$ 是严格凹函数, 从而有 $\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i\ln u_i \leqslant \ln\Big(\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_iu_i\Big)$, 即 $\prod\limits_{i=1}^{n}x_i^{\omega_i} \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n}\omega_ix_i$, 等号当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 成立.

令 $x_i = \dfrac{b_i}{\omega_i}$, 进而得到 $\prod\limits_{i=1}^{n}\Big(\dfrac{b_i}{\omega_i}\Big)^{\omega_i} \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n}b_i$. □

引理 2[10] 若 $u_i > 0, \omega_i > 0, \sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i = 1, \sum\limits_{i=1}^{n}u_i \geqslant 1, 1 \leqslant i \leqslant n$, 则有 $\prod\limits_{i=1}^{n}\Big(\dfrac{u_i}{\omega_i}\Big)^{-\omega_i} \leqslant 1$.

由引理 2, 约束 (11h)、(11p)、(11q)、(11r)、(11s) 可以转化为标准的超越几何规划的约束, 因此 TGP1 问题可以简化为

$$\min\ h(s) = \lambda_N\sum_{i=1}^{n}x_{4,i}^2 + \lambda_P\sum_{i=1}^{n}x_{5,i}^2 + \lambda_b\sum_{i=1}^{n}x_{6,i}^2;$$

$$\text{s.t. } b_1[\ln(x_{1,i}x_{2,i}^{-1})]^{a_9+a_{10}}x_{2,i}^{-a_{10}}x_{8,i}^{-1} \leqslant 1,$$

$$\sum_{i=1}^{n}C_i\prod_{j=1}^{m}x_{ji}^{a_{ij}} \leqslant 1,\ i = 1, 2, \cdots, n.$$

由于中间的变换均为等价变换, 与原问题等价.

3 基于超越几何规划的操作优化问题的全局优化理论分析

热轧操作优化问题是一个非线性的强耦合复杂问题, 不能直接判断其凹凸性, 从而不易找到全局最优解. 由于模型中存在对数, 可以将问题转化为超越几何规划问题, 从而研究问题的全局最优解.

引理 3 对于任意实数 a_i 和 x, $f(x) = \mathrm{e}^{\sum\limits_{i=1}^{n}a_ix_i}$ 为凸函数.

证明 由于 $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x > 0$, e^x 为凸函数, 有 $\mathrm{e}^{\lambda x+(1-\lambda)x} \leqslant \lambda\mathrm{e}^x + (1-\lambda)\mathrm{e}^x$. 且有

$$f(\lambda x_{1i} + (1-\lambda)x_{2i}) = \mathrm{e}^{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i(\lambda x_{1i}+(1-\lambda)x_{2i})} =$$

$$\mathrm{e}^{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\lambda x_{1i}+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i(1-\lambda)x_{2i}} = \mathrm{e}^{\lambda\sum\limits_{i=1}^{n}a_ix_{1i}+(1-\lambda)\sum\limits_{i=1}^{n}a_ix_{2i}} \leqslant$$

$$\lambda\mathrm{e}^{\sum\limits_{i=1}^{n}a_ix_{1i}} + (1-\lambda)\mathrm{e}^{\sum\limits_{i=1}^{n}a_ix_{2i}} = \lambda f(x) + (1-\lambda)f(x).\ \square$$

引理 4[11] 设函数 f 在开凸集 R^n 上为二阶连续可微, 则 f 为凸函数的充要条件是对于任意的 $x \in R$, f 的 Hesse 矩阵 $\nabla^2 f(x)$ 均为半正定.

引理 5 对于任意 $a < 0, x_1 > 0, x_2 > 0, f(x) = x_1^a\mathrm{e}^{-x_2}$ 为凸函数.

证明 x_1^a 和 e^{-x_2} 皆为基本的初等函数, 它们在定义域内是连续的, 因为连续函数通过有限次四则运算和有限次复合后所得到的函数仍连续, 所以函数 $f(x) = x_1^a\mathrm{e}^{-x_2}$ 在其定义域上是连续函数. 且 $a < 0$, $f(x)$ 存在二阶导数, 在其定义域上是二阶连续可微的, 其 Hesse 矩阵为

$$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a(a-1)x_1^{a-2}\mathrm{e}^{-x_2} & -ax_1^{a-1}\mathrm{e}^{-x_2} \\ -ax_1^{a-1}\mathrm{e}^{-x_2} & x_1^a\mathrm{e}^{-x_2} \end{bmatrix}.$$

由于 $a < 0$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, 一阶顺序主子式为 $a(a-1)x_1^{a-2}\mathrm{e}^{-x_2} \geqslant 0$. 二阶顺序主子式为

$$\begin{vmatrix} a(a-1)x_1^{a-2}\mathrm{e}^{-x_2} & -ax_1^{a-1}\mathrm{e}^{-x_2} \\ -ax_1^{a-1}\mathrm{e}^{-x_2} & x_1^a\mathrm{e}^{-x_2} \end{vmatrix} =$$

$$a(a-1)x_1^{2a-2}\mathrm{e}^{-2x_2} - a^2x_1^{2a-2}\mathrm{e}^{-2x_2} =$$

$$ax_1^{2a-2}\mathrm{e}^{-2x_2} > 0.$$

因此 $f(x)$ 的 Hesse 矩阵是正定的, 由引理 2 可知, 函数 $f(x)$ 为凸函数. □

引理 6 对于任意 $a > 0, x_1 > 0, x_2 > 0, f(x) = x_1^a\mathrm{e}^{-x_2}$ 为凸函数.

证明 令 $y = x^{-1}$, 有 $f(x) = x_1^a\mathrm{e}^{-x_2} = y^{-a}\mathrm{e}^{-x_2}$. 令 $-a = b$, 有 $b < 0$, $f(x) = y^b\mathrm{e}^{-x_2}$. 增加等价约束 $x^{-1} \geqslant y$, 即 $xy \leqslant 1$, 利用 $x = \mathrm{e}^t$, $y = \mathrm{e}^w$ 可知, 增加的等价约束也为凸函数. 由引理 5 可知, $f(x) = y^b\mathrm{e}^{-x_2}$ 为凸函数, 因此 $f(x) = x_1^a\mathrm{e}^{-x_2}$ 可化为凸函数. □

定理 1 热轧操作优化问题可以转化为凸规划问题.

证明 由第 2.3 节可知, 热轧操作优化问题可转化为标准的 TGP 问题, 简化形式如下:

$$\min\ h(s) = \lambda_N\sum_{i=1}^{n}x_{4,i}^2 + \lambda_P\sum_{i=1}^{n}x_{5,i}^2 + \lambda_b\sum_{i=1}^{n}x_{6,i}^2;$$

$$\text{s.t. } \sum_{i=1}^{n}C_i\prod_{j=1}^{m}x_{ji}^{a_{ij}} \leqslant 1,$$

$$b_1[\ln(x_{1,i}x_{2,i}^{-1})]^{a_9+a_{10}}x_{2,i}^{-a_{10}}x_{8,i}^{-1} \leqslant 1.$$

令 $x_{ji} = \mathrm{e}^{y_{ji}}, y_{1,i} - y_{2,i} = x_{15,i}$, 问题可化为

TGP2 :

$$\min\ h(s)=\lambda_N\sum_{i=1}^{n}\mathrm{e}^{2y_{4,i}}+\lambda_P\sum_{i=1}^{n}\mathrm{e}^{2y_{5,i}}+\lambda_b\sum_{i=1}^{n}\mathrm{e}^{2y_{6,i}};$$

$$\text{s.t. } b_1(x_{15,i})^{a_9+a_{10}}\mathrm{e}^{-a_{10}x_{2,i}-x_{8,i}}\leqslant 1,$$

$$\sum_{i=1}^{n}C_i\mathrm{e}^{\sum\limits_{j=1}^{m}a_{j,i}y_{j,i}}\leqslant 1,\ i=1,2,\cdots,n.$$

由引理3、引理5和引理6可知, 目标函数和约束皆为凸函数, 问题TGP2为凸规划问题, 因此热轧操作优化问题是凸规划问题. □

将热轧操作优化问题转化为凸规划问题, 其任一局部极小点即为全局极小点, 可采用凸规划软件获得全局最优解.

4 计算实例

为了验证所提出方法的可行性, 以7机架热轧精轧生产线为例进行分析. 带钢宽度为1 535 mm, 来料厚度为36.7 mm, 成品厚度为5.7 mm, 粗轧出口温度为1 067°C, 精轧出口温度为891 °C, 目标凸度为0.016. 其他参数直接代入模型中, 计算出中间的温度为$t_1=1\,009$°C, $t_2=991$°C, $t_3=976$°C, $t_4=959$°C, $t_5=943$°C, $t_6=928$°C, $t_7=913$°C. 计算轧制力时需要的温度为

$$T_i=t_i+273/1\,000,\ T_1=1.282,\ T_2=1.264,$$
$$T_3=1.249,\ T_4=1.232,\ T_5=1.216,$$
$$T_6=1.201,\ T_7=1.186.$$

令

$$x_{1,i}=h_{i-1},\ x_{2,i}=h_i,\ x_{3,i}=\Delta h_i=h_{i-1}-h_i,$$
$$x_{4,i}=N_i-\lambda N_{i\max},\ x_{5,i}=P_i-\gamma P_{i\max},$$
$$x_{6,i}=P_i-P_{bi},$$
$$x_{7,i}=0.785+0.25\sqrt{R_i}\Delta h_i^{0.5}(h_{i-1}+h_i)^{-1},$$
$$x_{8,i}=1.15\exp(6.949\,2-3.348\,5T)\times$$
$$[\ln(h_{i-1}h_i^{-1})]^{-0.081-3.348\,5T}h_i^{-0.283\,4},$$
$$x_{9,i}=f_3x_{7,i}^4x_{8,i}^4+f_4x_{7,i}^2x_{8,i}^2x_{3,i},$$
$$x_{10,i}=R_ix_{3,i}+f_9c_6x_{7,i}^2x_{8,i}^2+$$
$$f_6\sqrt{f_3x_{7,i}^4x_{8,i}^4+f_4x_{7,i}^2x_{8,i}^2x_{3,i}^2},$$
$$x_{11,i}=x_{4,i}+\lambda N_{i\max},\ x_{12,i}=x_{5,i}+\gamma P_{i\max},$$
$$x_{13,i}=x_{6,i}+P_{bi},\ x_{14,i}=x_{1,i}+x_{2,i}.$$

为了书写方便, 将常数简化, 令

$$f_1=6.25\times10^{-4}N_{i\max}^{-1},\ f_2=18.49R_i^{-1}N_{i\max}^{-1},$$
$$f_3=1.14\times10^{-9}R_i^2,\ f_4=6.14R_i,$$
$$f_5=2.42\times10^{-10}R_i^2,\ f_6=7.165\times10^{-6}R_i,$$
$$f_7=1.52\times10^{-5}R_iM_{i\max}^{-1},\ f_8=0.45M_{i\max}^{-1},$$
$$f_9=2.42\times10^{-10}R_i^2,\ f_{10}=7.165\times10^{-6}R_i,$$
$$f_{11}=1.688\,5\times10^{-5}R_iP_{i\max}^{-1},\ f_{12}=0.5P_{i\max}^{-1},$$
$$f_{13}=6.25\times10^{-4},\ f_{14}=18.49R_i^{-1},$$
$$f_{15}=1.688\,5\times10^{-5}R_i,\ f_{16}=0.25\sqrt{R_i},$$
$$f_{17}=1.15\exp(6.949\,2-3.348\,5T_i),$$
$$f_{18}=0.181-3.348\,5T,$$

则 $f_i>0\ (i=1,2,\cdots,17)$, $f_{18}<0$. 由引理2, 问题可转化为TGP1, 即

$$\min h(s)=\lambda_N\sum_{i=1}^{7}x_{4,i}^2+\lambda_P\sum_{i=1}^{7}x_{5,i}^2+\lambda_b\sum_{i=1}^{7}x_{6,i}^2;$$

$$\text{s.t. } f_1x_{2,i}^{-1}x_{7,i}^2x_{8,i}^2x_{10,i}^{0.5}+f_2x_{2,i}^{-1}x_{9,i}^{0.5}x_{10,i}^{0.5}<1;$$
$$f_7x_{7,i}^2x_{8,i}^2x_{10,i}^{0.5}+f_8x_{9,i}^{0.5}x_{10,i}^{0.5}<1;$$
$$f_{11}x_{7,i}^2x_{8,i}^2+f_{12}x_{9,i}^{0.5}<1;$$
$$x_{1,i}^{-1}x_{2,i}<1,\ \Delta h_{i\max}^{-1}x_{3,i}\leqslant 1,\ \Delta h_{i\min}x_{3,i}^{-1}\leqslant 1;$$
$$\left(\frac{x_{2,i}x_{1,i}^{-1}}{w_1}\right)^{w_1}\left(\frac{x_{3,i}x_{1,i}^{-1}}{w_2}\right)^{w_2}\leqslant 1;$$
$$f_{13}x_{2,i}^{-1}x_{7,i}^2x_{8,i}^2x_{10,i}^{0.5}x_{11,i}^{-1}+$$
$$f_{14}x_{2,i}^{-1}x_{9,i}^{0.5}x_{10,i}^{0.5}x_{11,i}^{-1}\leqslant 1;$$
$$f_{15}x_{7,i}^2x_{8,i}^2x_{12,i}^{-1}+0.5x_{9,i}^{0.5}x_{12,i}^{-1}\leqslant 1;$$
$$f_{15}x_{7,i}^2x_{8,i}^2x_{13,i}^{-1}+0.5x_{9,i}^{0.5}x_{13,i}^{-1}\leqslant 1;$$
$$0.785x_{7,i}^{-1}+f_{16}x_{3,i}^{0.5}x_{7,i}^{-1}x_{14,i}^{-1}\leqslant 1;$$
$$f_{17}[\ln(x_{1,i}x_{2,i}^{-1})]^{f_{18}}x_{2,i}^{-0.283\,4}x_{8,i}^{-1}\leqslant 1;$$
$$f_3x_{7,i}^4x_{8,i}^4x_{9,i}^{-1}+f_4x_{3,i}x_{7,i}^2x_{8,i}^2x_{9,i}^{-1}\leqslant 1;$$
$$R_ix_{3,i}x_{10,i}^{-1}+f_9x_{7,i}^2x_{8,i}^2x_{10,i}^{-1}+f_6x_{9,i}^{0.5}x_{10,i}^{-1}\leqslant 1;$$
$$\left(\frac{x_{4,i}x_{11,i}^{-1}}{w_3}\right)^{w_3}\left(\frac{\lambda N_{i\max}x_{11,i}^{-1}}{w_4}\right)^{w_4}\leqslant 1;$$
$$\left(\frac{x_{6,i}x_{13,i}^{-1}}{w_5}\right)^{w_5}\left(\frac{P_{b,i}x_{13,i}^{-1}}{w_6}\right)^{w_6}\leqslant 1;$$
$$\left(\frac{x_{1,i}x_{14,i}^{-1}}{w_7}\right)^{w_7}\left(\frac{x_{2,i}x_{14,i}^{-1}}{w_8}\right)^{w_8}\leqslant 1;$$
$$x_{j,i}>0,\ i=1,2,\cdots,7,\ j=1,2,\cdots,14;$$
$$\lambda_N>0,\lambda_P>0,\lambda_b>0,\lambda_N+\lambda_P+\lambda_b=1.$$

令

$$x_{j,i}=\mathrm{e}^{y_{j,i}},\ y_{1,i}-y_{2,i}=x_{15,i},$$
$$y_{k,i}=\mathrm{e}^{z_{k,i}},\ x_{15,i}=\mathrm{e}^{z_{15,i}},$$
$$i=1,2,\cdots,7,\ j=1,2,\cdots,14,\ k=1,2,$$

则上述问题转化为TGP2, 即

$$\min h(s)=\lambda_N\sum_{i=1}^{7}\mathrm{e}^{2y_{4,i}}+\lambda_P\sum_{i=1}^{7}\mathrm{e}^{2y_{5,i}}+\lambda_b\sum_{i=1}^{7}\mathrm{e}^{2y_{6,i}}.$$

$$\text{s.t. } f_1\mathrm{e}^{-y_{2,i}+2y_{7,i}+2y_{8,i}+0.5y_{10,i}}+$$
$$f_2\mathrm{e}^{-y_{2,i}+0.5y_{9,i}+0.5y_{10,i}}<1;$$

$$f_7 e^{2y_{7,i}+2y_{8,i}+0.5y_{10,i}} + f_8 e^{0.6y_{9,i}+0.5y_{10,i}} < 1;$$

$$f_{11} e^{2y_{7,i}+2y_{8,i}} + f_{12} e^{0.5y_{9,i}} < 1;$$

$$e^{y_{2,i}-y_{1,i}} < 1,\ \Delta h_{i\max}^{-1} e^{y_{3,i}} \leqslant 1,\ \Delta h_{i\min} e^{-y_{3,i}} \leqslant 1;$$

$$w_1{}^{-w_1} w_2{}^{-w_2} e^{-w_1 y_{1,i}+w_1 y_{2,i}-w_2 y_{1,i}+w_2 y_{3,i}} \leqslant 1;$$

$$f_{13} e^{-y_{2,i}+2y_{7,i}+2y_{8,i}+0.5y_{10,i}-y_{11,i}} +$$

$$f_{14} e^{-y_{2,i}+0.5y_{9,i}+0.5y_{10,i}-y_{11,i}} \leqslant 1;$$

$$f_{15} e^{2y_{7,i}+2y_{8,i}-y_{12,i}} + 0.5 e^{0.5y_{9,i}-y_{12,i}} \leqslant 1;$$

$$0.78 e^{-y_{7,i}} + f_{14} e^{0.5y_{3,i}-y_{7,i}-y_{14,i}} \leqslant 1;$$

$$f_{17} x_{15}^{f_{18}} e^{-0.2834y_{2,i}-y_{8,i}} \leqslant 1;$$

$$R_i e^{y_{3,i}-y_{10,i}} + f_9 e^{2y_{7,i}+2y_{8,i}-y_{10,i}} +$$

$$f_6 e^{0.5y_{9,i}-y_{10,i}} \leqslant 1;$$

$$w_3^{-w_3} (\lambda N_{i\max})^{w_4} w_4^{-w_4} e^{w_3 y_{4,i}-w_3 y_{11,i}-w_4 y_{11,i}} \leqslant 1;$$

$$w_5^{-w_5} P_{b,i}^{w_6} w_6^{-w_6} e^{w_5 y_{6,i}-w_5 y_{13,i}-w_6 y_{13,i}} \leqslant 1;$$

$$w_7^{-w_7} w_8^{-w_8} e^{y_{1,i}-w_7 y_{14,i}+w_8 y_{2,i}-w_8 y_{14,i}} \leqslant 1;$$

$$f_3 e^{4y_{7,i}+4y_{8,i}-y_{9,i}} + f_4 e^{y_{3,i}+2y_{7,i}+2y_{8,i}-y_{9,i}} \leqslant 1;$$

$$e^{y_{15,i}-y_{1,i}} + e^{y_{2,i}-y_{1,i}} \leqslant 1,$$

$$i = 1,2,\cdots,7,\ j = 1,2,\cdots,8;$$

$$\lambda_N > 0,\ \lambda_P > 0,\ \lambda_b > 0,$$

$$\lambda_N + \lambda_P + \lambda_b = 1,\ w_1 + w_2 = 1, w_3 + w_4 = 1,$$

$$w_5 + w_6 = 1,\ w_7 + w_8 = 1,\ w_k > 0,\ k = 1,2,\cdots,8.$$

由引理3和引理5可知, 问题TGP2是凸规划问题.

5 结 论

对于热轧操作优化问题, 以最小化等相对功率富余量、等轧制力和板形良好作为目标函数建立了钢铁热轧操作优化模型. 由于问题模型参数之间相互耦合, 不能判断凸凹性, 不易找到问题的全局最优解, 因此利用超越几何规划, 将操作优化模型转化为超越几何规划模型. 由于基于超越几何规划的操作优化模型本身含有对数项, 不能像几何规划那样直接通过e变换转化成凸规划, 根据超越几何规划操作优化模型的基本结构特点, 通过数学变换和理论分析, 将基于超越几何规划的操作优化问题等价转化成凸规划问题, 即原问题等价转化为凸规划问题, 从而利用凸规划软件获得最优解, 为操作优化问题获得最优解提供一种新的方法.

参考文献(References)

[1] 孙一康.带钢热连轧的模型与控制[M]. 北京: 冶金工业出版社, 2002: 170-181.
(Sun Y K. Model and control of hot strip mill[M]. Beijing: Press of Metallurgy Industry, 2002: 170-181.)

[2] 李维刚, 刘相华. 热连轧机轧制力成比例负荷分配的CLAD算法[J]. 东北大学学报: 自然科学版, 2012, 33(3): 354-356.
(Li W G, Liu X H. CLAD algorithm of rolling force ratio load distribution on hot strip mill[J]. J of Northeastern University: Natural Science, 2012, 33(3): 354-356.)

[3] 胡长斌, 童朝南, 彭开香. 改进型复杂过程全局进化算法在热连轧负荷分配中的应用[J]. 控制与决策, 2012, 27(1): 15-27.
(Hu C B, Tong C N, Peng K X. Load distribution optimization of hot strip mills with improvedevolutionary algorithm for complex-process optimization[J]. Control and Decision, 2012, 27(1): 15-27.)

[4] 康德孚. 大困难度几何规划问题程序设计方法[J]. 东北农学院学报, 1985, 1(1): 83-92.
(Kang D F. A method for greater difficult degree geomitric programming on the programming[J]. J of Northeast Agricultural College, 1985, 1(1): 83-92.)

[5] Luptáčk M. Geometric programming method and applications[J]. Operations Research Spektrum, 1981, 2(3): 129-143.

[6] Michael D Intriligator. Math ematical optimization and economic theory[M]. Society for Industrial Mathematics, 1971: 251.

[7] Lidor G, Wilde D J. Transcendental geometric programming[J]. J of Optimization Theory and Applications, 1978, 26(1): 77-96.

[8] 李海军. 热轧带钢精轧过程控制系统与模型的研究[D]. 沈阳: 东北大学材料与冶金学院, 2008.
(Li H J. Research on rolling process control system and model for hot strip finishing mills[D]. Shenyang: Materials Forming Engineering, Northeastern University, 2008.)

[9] 刘战英. 轧制变形规程优化设计[M]. 北京: 冶金工业出版社, 1996: 186-189.
(Liu Z Y. Optimization design of rolling deformation schedule[M]. Beijing: Press of Metallurgy Industry, 1996: 186-189.)

[10] Farnaz Ghazi Nezami, Seyed Jafar Sadjadi, Mir Bahador AryaNezhad. A geometric programming approach for a nonlinear joint production-marketing problem[C]. IEEE Int Association of Computer Science and Information Technology. Beijing, 2009: 308-312.

[11] 胡毓达. 非线性规划[M]. 北京: 高等教育出版社, 1990: 45-46.
(Hu M D. Nonlinear programming[M]. Beijing: Higher Education Press, 1990: 45-46.)

(责任编辑: 郑晓蕾)