第 30 卷 第 4 期
Vol. 30 No. 4

控 制 与 决 策
*Control and Decision*

2015 年 4 月
Apr. 2015

**文章编号:** 1001-0920 (2015) 04-0670-07 **DOI:** 10.13195/j.kzyjc.2014.0144

# 基于扩展原理的混合型证据推理不确定决策方法

张美璟[1,2], 王应明[1]

(1. 福州大学 经济与管理学院，福州 350116；2. 福建江夏学院 电子信息科学学院，福州 350108)

**摘 要:** 提出一种基于扩展原理的混合证据推理不确定决策模型. 通过 $\alpha$ 截集将同一决策问题中各属性使用的精确数、区间数和模糊数等异构评估信度统一分解为区间结构, 采用区间证据推理方法求解各隶属度下的效用区间, 并按隶属度次序重组方案效用; 化简模糊数质心公式, 并用于模糊定量评估的信度计算和方案模糊效用的排序; 最后, 通过具体实例验证了所提出方法的有效性和可行性. 将该方法在算例中的适用情况进行比较和分析, 结果表明所提出的方法具有良好的适应性.

**关键词:** 扩展原理；混合证据推理；不确定多属性决策；模糊质心

**中图分类号:** C934 **文献标志码:** A

# Hybrid evidential reasoning for decision making under uncertainty based on extension principle

*ZHANG Mei-jing*[1,2], *WANG Ying-ming*[1]

(1. School of Economics and Management，Fuzhou University，Fuzhou 350116，China；2. College of Electrionic and Information Science，Fujian Jiangxia University，Fuzhou 350108，China．Correspondent：ZHANG Mei-jing，E-mail: zmjm2@163.com)

**Abstract:** An approach called hybrid evidential reasoning is proposed based on the extension principle to deal with multiple attribute decision making under uncertainty. Heterogeneous beliefs, such as crisp value, interval value and fuzzy value, on the same problem are all decomposed into interval value to setup a uniform belief structure. Interval evidential reasoning is used to work out the interval utility of the alternative for each membership degrees, and the utility of each alternative can be assembled in the order of membership degrees. The equation of fuzzy centroid is reduced and used to calculate the belief degree of quantitative fuzzy assessment and rank the fuzzy utility of alternatives. Finally, an example is examined to illustrate the effectiveness and feasibility of the proposed method. Comparing with the application of all these approaches to the example, the results show that the proposed approach is adaptable.

**Keywords:** extension principle；hybrid evidential reasoning；multiple attribute decision making under uncertainty；fuzzy centroid

## 0 引 言

多属性决策是在综合各项指定属性评价结果的基础上选出最优方案的一种决策方法. 由于现实世界的复杂性和不确定性, 实际的多属性决策问题存在诸多的困难. 这些困难可以归纳为未知性和模糊性. 文献 [1] 指出:未知性是决策者的认知和能力的局限性造成的; 模糊性源于决策者对于待评估属性本质了解的不透彻, 进而导致属性评估的不准确. 未知性和模糊性导致决策过程中的评估参数通常表现为信息的不完整、含糊不清, 甚至完全未知, 因此单纯用精确数值难以描述, 需要结合区间数、模糊数和语言评价等形式描述不确定条件下的属性评估参数.

文献 [2] 提出了基于证据推理 (ER) 的不确定多属性决策方法; 文献 [3] 提出了区间 ER 方法; 文献 [4] 完善了区间 ER 方法; 文献 [5] 以区间信度和权重描述了存在偏好的不确定决策问题, 使用区间 ER 方法求解方案效用, 并用区间占优理论进行排序, 较好地保存了决策信息, 但不易得出方案排序; 文献 [6] 提出了一种模糊 ER 方法, 以质心法为三角模糊权重去模糊化, 取三角模糊评估的顶点和底部区间分别融合, 以

**收稿日期:** 2014-01-25；**修回日期:** 2014-05-01.

**基金项目:** 国家杰出青年科学基金项目 (70925004)；福建省教育厅科技项目 (JA12337, JB11191).

**作者简介:** 张美璟 (1981−), 男, 工程师, 博士生, 从事决策分析、信息融合等研究；王应明 (1964−), 男, 教授, 博士生导师, 从事决策理论与方法、数据包络分析等研究.

构建方案的三角模糊效用, 该方法可导致信息的损失; 文献 [7-8] 分别提出了基于三角模糊数和梯形模糊数的模糊 ER 方法, 用于求解属性评估为定量模糊数的问题; 文献 [1] 扩展了区间模糊 ER 算法, 采用区间结构表示属性模糊信度的不确定性, 提高了 ER 处理不确定问题的能力, 缺点是评估信息的模糊程度对方案排序影响极大; 文献 [9] 提出了一种混合证据融合方法, 将异构证据统一为梯形模糊数并以模糊运算法则进行融合; 文献 [10] 将扩展原理用于求解含三角模糊权重的 ER 方法, 但未用于不确定属性的求解; 文献 [11] 提出了基于 ER 的混合决策方法, 适用于属性为区间灰数与确定语言等级, 或在两个连续语言等级间且权重已知的情况.

目前, 求解混合型决策问题的方法主要有两种: 一是用 TOPSIS 方法集结异构评估信息[12-13], 二是采用 ER 方法融合异构评估信息[14]. 相比而言, TOPSIS 方法简单直观, 计算简便; ER 方法适用于包含不完整、不精确和未知评估的不确定问题, 缺点是过程较复杂, 计算量较大.

本文基于扩展原理[15]提出一种求解混合型不确定决策问题的 ER 模型, 并给出决策步骤和相关计算公式. 约简文献 [16] 的模糊质心公式, 并用于指标的等级信度计算和方案排序. 本文通过一个算例验证了该方法的可行性和有效性, 并用于各种混合算法的适用性比较分析, 结果表明本文方法具有更好的适应性.

## 1　证据推理方法概述

ER 是一种以 Dempster-Shafer 理论 (DST) 为信息的集结方法, 结合风险偏好和效用理论的不确定多属性决策方法, 引入权重信息以克服 DST 的悖论[4], 考虑了决策者的主观偏好和风险意识[5], 适用于定性和定量相结合的情况, 但计算过程较复杂.

ER 的求解方法分为迭代算法[1-4, 7]和解析算法[5-6, 8-9, 12, 14, 17-18]. 解析算法较简便, 适用于信息量较大的情况[18]. ER 的解析算法描述如下.

**定义 1** [18]　设多属性决策问题有 $M$ 个方案 $a_l$, $l=1,2,\cdots,M$, $L$ 个评价指标 $e_i$, $i=1,2,\cdots,L$, $w_i$ 为 $e_i$ 的权重; $H=\{H_n|H_n\prec H_{n+1}, n=1,2,\cdots,N\}$ 为指标的评估等级, 等级效用为

$$U(H_n)=$$
$$\{U(H_n)|U(H_n)<U(H_{n+1}), n=1,2,\cdots,N\};$$

指标 $e_i$ 的评估记为 $S(e_i)=\{\beta_{n,i}, n=1,2,\cdots,N\}$. 方案的 ER 解析模型为

$$U=\sum_{n=1}^{N}U(H_n)\beta_n+U(X)\beta_H.$$

s.t.

$$\beta_n=\frac{m_n}{1-\overline{m}_H},\ \beta_H=\frac{\widetilde{m}_n}{1-\overline{m}_H};$$

$$m_n=\Big[\prod_{i=1}^{L}(m_{n,i}+m_{H,i})-\prod_{i=1}^{L}(m_{H,i})\Big]\Big/k,$$

$$\widetilde{m}_H=\Big[\prod_{i=1}^{L}m_{H,i}-\prod_{i=1}^{L}\overline{m}_{H,i}\Big]\Big/k,$$

$$\overline{m}_H=\Big[\prod_{i=1}^{L}\overline{m}_{H,i}\Big]\Big/k,$$

$$k=\sum_{n=1}^{N}\Big(\prod_{i=1}^{L}(m_{n,i}+m_{H,i})\Big)-(N-1)\prod_{i=1}^{L}\overline{m}_{H,i},$$

$$\overline{m}_{H,i}=1-w_i,\ \widetilde{m}_{H,i}=w_i\Big(1-\sum_{n=1}^{N}m_{n,i}\Big),$$

$$m_{H,i}=\widetilde{m}_{H,i}+\overline{m}_{H,i},\ \sum_{n=1}^{N}m_{n,i}+m_{H,i}=1,$$

$$i=1,2,\cdots,L,\ n=1,2,\cdots,N. \tag{1}$$

其中: 当 $X=H_N$ 时求效用上限, 当 $X=H_1$ 时求效用下限.

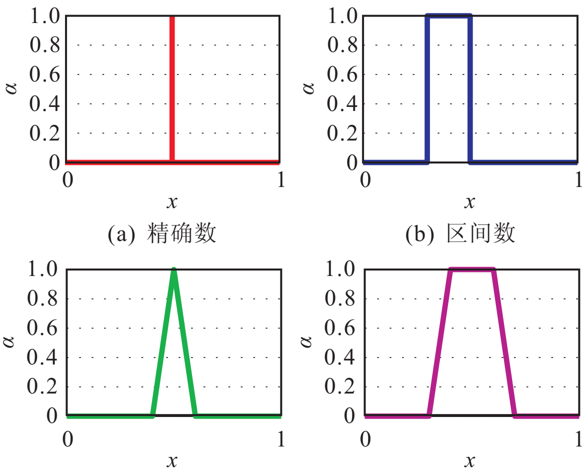
## 2　基于扩展原理的混合证据推理方法

### 2.1　混合证据推理方法的原理

模糊数是表述不确定信息的二维凸结构. 由扩展原理, 模糊数表示为序列隶属度的区间集合, 即

$$\widetilde{A}=\bigcup_{\alpha}\alpha\cdot A_\alpha=\bigcup_{\alpha}\alpha\cdot[(x)^f_\alpha,(x)\alpha^u],\ \alpha\in[0,1]. \tag{2}$$

将隶属度概念扩展至精确数和区间数, 即可构建具有二维特征的精确隶属函数和区间隶属函数, 如图 1 所示.




(a) 精确数　(b) 区间数

(c) 三角模糊数　(d) 梯形模糊数

**图 1　基于扩展原理的信度结构**

本文方法利用式 (2) 将扩展后的异构信度分解成序列隶属度的截集区间, 各隶属度的效用区间用区间 ER 方法求解, 最后按隶属度次序将各效用区间组合成方案的综合效用. 该方法分为 6 个步骤: 1) 定量属性的等级信度计算; 2) 基于扩展原理的等级信度分解; 3) 定性评估信度的合理性和完整性检验; 4) 混合信度的归一化; 5) 不确定信度的求解和截集效用区间

的计算和整合.

### 2.2 混合证据推理方法的求解

#### 2.2.1 定量属性的等级信度计算

**定义 2** [5] 设指标的定量等级标准为

$$\{(H_{n,i},Y_{n,i});n=1,2,\cdots,N\},$$

精确定量评估为 $x$, 区间定量评估为 $[x^f,x^u]$, 信度结构计算如下.

1) 若 $Y_{n,i}\leqslant x\leqslant Y_{n+1,i}$, $N-1\geqslant n\geqslant 1$, 则有

$$\beta_{n,i}=\frac{Y_{n+1,i}-x}{Y_{n+1,i}-Y_{n,i}},\ \beta_{n+1,i}=\frac{x-Y_{n+1,i}}{Y_{n+1,i}-Y_{n,i}}. \tag{3}$$

2) 若 $Y_{n,i}\leqslant x^l\leqslant x^u\leqslant Y_{n+1,i}$, $N-1\geqslant n\geqslant 1$, 则有

$$\beta^f_{n,i}=\frac{Y_{n+1,i}-x^u}{Y_{n+1,i}-Y_{n,i}},\ \beta^u_{n,i}=\frac{Y_{n+1,i}-x^f}{Y_{n+1,i}-Y_{n,i}};$$

$$\beta^f_{n+1,i}=\frac{x^f-Y_{n,i}}{Y_{n+1,i}-Y_{n,i}},\ \beta^u_{n+1,i}=\frac{x^u-Y_{n+1,i}}{Y_{n+1,i}-Y_{n,i}}. \tag{4}$$

3) 若 $Y_{n-g,i}\leqslant x^l\leqslant Y_{n-g+1,i}\cdots\leqslant Y_{n,i}\leqslant x^u\leqslant Y_{n+1,i}$, $N\geqslant n\geqslant 2$, $N-1\geqslant g\geqslant 1$, 则有

$$\begin{aligned}&\beta^f_{n-g,i}=0,\ \beta^u_{n-g,i}=\frac{Y_{n-g+1,i}-x^f}{Y_{n-g+1,i}-Y_{n-g,i}};\\&\beta^f_{n-g+1,i}=0,\ \beta^u_{n-g+1,i}=1;\\&\qquad\vdots\\&\beta^f_{n,i}=0,\ \beta^u_{n,i}=1;\\&\beta^f_{n+1,i}=0,\ \beta^u_{n+1,i}=\frac{x^u-Y_{n,i}}{Y_{n+1,i}-Y_{n,i}}.\end{aligned} \tag{5}$$

模糊定量评估需去模糊化才可以计算等级信度. 文献 [16] 基于扩展原理提出模糊质心公式, 其前提是截集间距均等, 即 $\Delta\alpha_j=\dfrac{1}{J-1}, j=0,1,\cdots,J$, 故可进一步化简.

**定义 3** 梯形模糊数 $\widetilde{X}=(x^f,x^{m1},x^{m2},x^u)$ 被 $J$ 个截集均分, $\alpha_j=j/(J-1), j=0,1,\cdots,J$, 截集区间为

$$\begin{aligned}&\widetilde{X}=\{[x^f_j,x^u_j];j=0,1,\cdots,J\}=\\&\{[\alpha_j x^{m1}+(1-\alpha_j),\alpha_j x^{m2}+(1-\alpha_j)x^u];\\&j=0,1,\cdots,J\}.\end{aligned} \tag{6}$$

其中: $x^f_0=x^f$, $x^f_{J-1}=x^{m1}$, $x^u_{J-1}=x^{m2}$, $x^u_0=x^u$. 模糊数 $\widetilde{X}$ 的质心为

$$\begin{aligned}&C(\widetilde{X})=\int_{x^f}^{x^u}x\mu_{\widetilde{X}}(x)\mathrm{d}x\Big/\int_{x^f}^{x^u}\mu_{\widetilde{X}}(x)\mathrm{d}x=\\&\frac{1}{3}\cdot\sum_{j=0}^{J-2}(((x^u_j)^2+(x^u_{j+1})^2+x^u_jx^u_{j+1})-\\&((x^f_j)^2+(x^f_{j+1})^2+x^f_jx^f_{j+1}))\Big/\\&\sum_{j=0}^{J-2}(x^u_j+x^u_{j+1}-x^f_j-x^f_{j+1}).\end{aligned} \tag{7}$$

若 $x^{m1}=x^{m2}$, 则梯形模糊数退化为三角模糊数.

模糊定量评估及其等级标准可由式 (7) 转换为精确值, 并用式 (3) ∼ (5) 求解模糊定量评估的等级信度. 式 (7) 的推导过程如下:

$$\begin{aligned}&C(\widetilde{X})=\\&\frac{(1-\alpha_{J-2})((x^{m2})^2-(x^{m1})^2)+\sum\limits_{j=2}^{J-2}(\alpha_{j+1}-\alpha_{j-1})((x^u_j)^2-(x^f_j)^2)+\sum\limits_{j=0}^{1}\alpha_{j+1}((x^u_j)^2-(x^f_j)^2)+\sum\limits_{j=0}^{J-2}\Delta\alpha_j(x^u_jx^u_{j+1}-x^f_jx^f_{j+1})}{3((1-\alpha_{J-2})(x^{m2}-x^{m1})-\sum\limits_{j=2}^{J-2}((\alpha_{j+1}-\alpha_{j-1})(x^u_j-x^f_j))+2\Delta\alpha(x^u_1-x^f_1)+\alpha_1(x^u-x^f))}=\\&\frac{\Delta\alpha((x^{m2})^2-(x^{m1})^2)+\sum\limits_{j=2}^{J-2}2\Delta\alpha((x^u_j)^2-(x^f_j)^2)+2\Delta\alpha((x^u_1)^2-(x^f_1)^2)+\Delta\alpha((x^u)^2-(x^f)^2)+\sum\limits_{j=0}^{J-2}\Delta\alpha_j(x^u_jx^u_{j+1}-x^f_jx^f_{j+1})}{3(\Delta\alpha(x^{m2}-x^{m1})-\sum\limits_{j=2}^{J-2}(2\Delta\alpha(x^u_j-x^f_j))+2\Delta\alpha(x^u_1-x^f_1)+\Delta\alpha(x^u-x^f))}=\\&\frac{1}{3}\cdot\frac{\sum\limits_{j=0}^{J-2}(((x^u_j)^2+(x^u_{j+1})^2+x^u_jx^u_{j+1})-((x^f_j)^2+(x^f_{j+1})^2+x^f_jx^f_{j+1}))}{\sum\limits_{j=0}^{J-2}(x^u_j+x^u_{j+1}-x^f_j-x^f_{j+1})}.\end{aligned}$$

#### 2.2.2 基于扩展原理的等级信度分解

利用式 (2), 将各类信度结构通过截集统一分解为序列隶属度下的区间集合.

**定义 4** 设指标的梯形模糊信度 $\widetilde{A}=(A^f, A^{m1},A^{m2},A^u)$, 三角模糊信度 $\widetilde{B}=(B^f,B^m,B^u)$, 区间信度 $\widetilde{C}=[C^f,C^u]$ 被 $J$ 个截集均分, 各信度的截集集合如下:

$$\begin{aligned}&\widetilde{A}=\{[\alpha_jx^{m1}+A^f(1-\alpha_j),\alpha_jx^{m2}+(1-\alpha_j)x^u];\\&\quad j=0,1,\cdots,J\},\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}&\widetilde{B}=\{[\alpha_jx^{m}+A^f(1-\alpha_j),\alpha_jx^{m}+(1-\alpha_j)x^u];\\&\quad j=0,1,\cdots,J\},\end{aligned} \tag{9}$$

$$\widetilde{C}=\{[C^f_j,C^u_j];j=0,1,\cdots,J\}. \tag{10}$$

该方法也适用于指标权重的处理[9].

#### 2.2.3 信度结构的合理性和完整性检验

**定义 5** [3] 若指标 $e_i$ 的等级信度之和 $\sum\limits_{n=1}^{N}\beta_{n,i}=1$, 则该信度结构完整, 否则不完整.

**定义 6** [3]　若指标 $e_i$ 的等级信度之和 $\sum_{n=1}^{N}\beta_{n,i} \leqslant 1$, 则该信度结构合理, 否则不合理.

结合文献 [19], 由定义5 和定义 6 可得, 区间信度的合理性定义如下.

**定义 7**　若区间评估信度 $\{[\beta_{n,i}^f, \beta_{n,i}^u]; n=1,2,\cdots,N\}$ 满足 $\sum_{n=1}^{N}\beta_{n,i}^f \leqslant 1$, 则该区间信度结构合理, 否则不合理.

依据扩展原理, 可得模糊信度结构的合理性定理如下.

**定理 1**　梯形模糊评估信度 $\{(\beta_{n,i}^f, \beta_{n,i}^{m1}, \beta_{n,i}^{m2}, \beta_{n,i}^u); n=1,2,\cdots,N\}$ 被 $J$ 个截集均分, 其信度的截集集合为

$\{[\alpha_j\beta_{n,i}^{m1}+\beta_{n,i}^f(1-\alpha_j), \alpha_j\beta_{n,i}^{m2}+\beta_{n,i}^u(1-\alpha_j)];$
$\alpha_j=j/(J-1),\ n=1,2,\cdots,N,\ j=0,1,\cdots,J-1\}.$

若 $\sum_{n=1}^{N}\beta_{n,i}^{m1} \leqslant 1$, 则该梯形模糊信度结构合理.

**证明**　1) 对隶属度 $\mu_{\widetilde{A}}(x)=\alpha_0=0$ 有截集区间集合 $\{[\beta_{n,i}^f, \beta_{n,i}^u]; n=1,2,\cdots,N\}$. 由定义 7 可知, 若该截集区间合理, 则有 $\sum_{n=1}^{N}\beta_{n,i}^f \leqslant 1$.

2) 对隶属度 $\mu_{\widetilde{A}}(x)=\alpha_{J-1}=1$ 有截集区间集合 $\{[\beta_{n,i}^{m1}, \beta_{n,i}^{m2}];\ n=1,2,\cdots,N\}$. 由定义 7 可知, 若该截集区间合理, 则有 $\sum_{n=1}^{N}\beta_{n,i}^{m1} \leqslant 1$.

3) 对隶属度 $\mu_{\widetilde{A}}(x)=\alpha_j(j=1,2,\cdots,J-2)$ 有截集区间集合

$$\{[\alpha_j\beta_{n,i}^{m1}+\beta_{n,i}^f(1-\alpha_j), \alpha_j\beta_{n,i}^{m2}+\beta_{n,i}^u(1-\alpha_j)];$$
$$\alpha_j=j/(J-1),\ n=1,2,\cdots,N\}.$$

由定义 7 可知, 若该截集区间合理, 则有

$$\sum_{n=1}^{N}(\alpha_j\beta_{n,i}^{m1}+\beta_{n,i}^f(1-\alpha_j)) \leqslant 1.$$

已知梯形模糊信度满足 $0 \leqslant \beta_{n,i}^f \leqslant \beta_{n,i}^{m1} \leqslant \beta_{n,i}^{m2} \leqslant \beta_{n,i}^u \leqslant 1$. 综合证明过程 1)～3), 有

$$\sum_{n=1}^{N}\beta_{n,i}^f \leqslant \sum_{n=1}^{N}(\alpha_j\beta_{n,i}^{m1}+\beta_{n,i}^f(1-\alpha_j)) \leqslant \sum_{n=1}^{N}\beta_{n,i}^{m1} \leqslant 1.$$

如果 $\sum_{n=1}^{N}\beta_{n,i}^{m1} \leqslant 1$, 则该梯形模糊信度结构合理. □

当 $\beta_{n,i}^{m1}=\beta_{n,i}^{m2}$ 时, 可得三角模糊信度的合理性定义.

**定义 8**　若三角模糊信度 $\{(\beta_{n,i}^f, \beta_{n,i}^m, \beta_{n,i}^u); n=1,2,\cdots,N\}$ 满足 $\sum_{n=1}^{N}\beta_{n,i}^m \leqslant 1$, 则该三角模糊信度结构合理, 否则不合理.

#### 2.2.4　混合信度的归一化处理

经过合理性检验, 属性的评估信度需归一化.

**定义 9** [3]　区间信度 $S(e_i)=\{[\beta_{n,i}^f, \beta_{n,i}^u];\ n=1,2,\cdots,N,H\}$ 有 $\sum_{n=1}^{N}\beta_{n,i}^f \leqslant 1$, 其归一化公式为

$$S(e_i)=\Big\{\Big[\max\Big(\beta_{n,i}^f, 1-\sum_{p\neq n}\beta_{n,i}^u\Big), \min\Big(\beta_{n,i}^u, 1-\sum_{p\neq n}\beta_{n,i}^f\Big)\Big];\ n,p=1,2,\cdots,N,H\Big\}. \tag{11}$$

**定义 10**　三角模糊信度

$$S(e_i)=\{(\beta_{n,i}^f, \beta_{n,i}^m, \beta_{n,i}^u);\ n=1,2,\cdots,N,H\}$$

满足 $\sum_{n=1}^{N}\beta_{n,i}^m \leqslant 1$, 其归一化信度为

$$S(e_i)=\Big\{\Big[\max\Big(\beta_{n,i}^f, 1-\sum_{p\neq n}\beta_{n,i}^u\Big), \beta_{n,i}^m, \min\Big(\beta_{n,i}^u, 1-\sum_{p\neq n}\beta_{n,i}^f\Big)\Big];\ n,p=1,2,\cdots,N,H\Big\}. \tag{12}$$

**定义 11**　梯形模糊信度

$$S(e_i)=\{(\beta_{n,i}^f, \beta_{n,i}^{m1}, \beta_{n,i}^{m2}, \beta_{n,i}^u);\ n=1,2,\cdots,N,H\}$$

满足 $\sum_{n=1}^{N}\beta_{n,i}^m \leqslant 1$, 其归一化信度为

$$S(e_i)=\Big\{\Big[\max\Big(\beta_{n,i}^f, 1-\sum_{p\neq n}\beta_{n,i}^u\Big), \max\Big(\beta_{n,i}^{m1}, 1-\sum_{p\neq n}\beta_{n,i}^{m2}\Big), \min\Big(\beta_{n,i}^{m2}, 1-\sum_{p\neq n}\beta_{n,i}^{m1}\Big), \min\Big(\beta_{n,i}^u, 1-\sum_{p\neq n}\beta_{n,i}^f\Big)\Big];\ n,p=1,2,\cdots,N,H\Big\}. \tag{13}$$

#### 2.2.5　等级不确定信度的求解

由于评估存在主观性和不确定性, 需计算指标的不确定信度才能获得方案的全面效用.

**定义 12**　精确评估信度 $\{\beta_{n,i}; n=1,2,\cdots,N\}$ 有 $\sum_{n=1}^{N}\beta_{n,i}<1$, 其不确定信度 $\beta_{H,i}=1-\sum_{n=1}^{N}\beta_{n,i}$.

**定义 13**　区间评估信度 $\{[\beta_{n,i}^f, \beta_{n,i}^u]; n=1,2,\cdots,N\}$ 有 $\sum_{n=1}^{N}\beta_{n,i}^u<1$, 其不确定信度

$$\beta_{H,i}=\Big[\max\Big(0, 1-\sum_{n=1}^{N}\beta_{n,i}^u\Big), \Big(1-\sum_{n=1}^{N}\beta_{n,i}^f\Big)\Big].$$

**定义 14**　三角模糊信度 $\{(\beta_{n,i}^f, \beta_{n,i}^m, \beta_{n,i}^u); n=1,2,\cdots,N\}$ 被 $J$ 个隶属度均分, 不确定信度截集集

合为

$$\beta_{H,i}=\Big\{\Big[\max\Big(0,1-\sum_{n=1}^{N}(\alpha_j\beta_{n,i}^{m}+(1-\alpha_j)\beta_{n,i}^{u})\Big),\Big(1-\sum_{n=1}^{N}(\alpha_j\beta_{n,i}^{m}+(1-\alpha_j)\beta_{n,i}^{f})\Big)\Big];\ \alpha_j=j/J-1,\ n=1,2,\cdots,N,\ j=0,1,\cdots,J-1\Big\}. \tag{14}$$

**定义 15** 设梯形模糊信度$\{(\beta_{n,i}^{f},\beta_{n,i}^{m1},\beta_{n,i}^{m2},\beta_{n,i}^{u});n=1,2,\cdots,N\}$被$J$个隶属度均分, 其不确定信度截集集合为

$$\beta_{H,i}=\Big\{\Big[\max\Big(0,1-\sum_{n=1}^{N}(\alpha_j\beta_{n,i}^{m2}+(1-\alpha_j)\beta_{n,i}^{u})\Big),\Big(1-\sum_{n=1}^{N}(\alpha_j\beta_{n,i}^{m1}+(1-\alpha_j)\beta_{n,i}^{f})\Big)\Big];\ \alpha_j=j/J-1,\ n=1,2,\cdots,N,\ j=0,1,\cdots,J-1\Big\}. \tag{15}$$

### 2.2.6 基于扩展原理的混合信度融合模型

决策的有序等级序列为

$$H=\{H_n|H_n\prec H_{n+1},n=1,2,\cdots,N\},$$

等级效用为

$$U=\{U(H_n)|U(H_n)<U(H_{n+1}),n=1,2,\cdots,N\},$$

$w_i$为$e_i$的权重. 设评估信度合理且被$J$个隶属度均分, 隶属度$\alpha_j$的截集为

$$\{[(\beta_{n,i}^{f})_j,(\beta_{n,i}^{u})_j];j=0,1,\cdots,J-1,\ n=1,2,\cdots,N,H\},$$

对应基本概率赋值如下:

$$(m_{n,i})_j\in[w_i(\beta_{n,i}^{f})_j,w_i(\beta_{n,i}^{u})_j]; \tag{16}$$

$$(\overline{m}_{H,i})_j=1-w_i; \tag{17}$$

$$(\overline{m}_{H,i})_j\in w_i\Big[\max\Big(0,\Big(1-\sum_{n=1}^{N}(m_{n,i}^{u})_j\Big)\Big),\Big(1-\sum_{n=1}^{N}(m_{n,i}^{f})_j\Big)\Big]; \tag{18}$$

$$(m_{H,i})_j=(\overline{m}_{H,i})_j+(\widetilde{m}_{H,i})_j; \tag{19}$$

$$i=1,2,\cdots,L.$$

方案基于隶属度$\alpha_j$的效用区间$[(U_{\min})_j,(U_{\max})_j]$的求解过程如下:

$$(U_{\min})_j=\sum_{n=2}^{N}U(H_n)(\beta_n)_j+U(H_1)((\beta_1)_j+(\beta_H)_j), \tag{20}$$

$$(U_{\max})_j=\sum_{n=1}^{N-1}U(H_n)(\beta_n)_j+U(H_N)((\beta_N)_j+(\beta_H)_j); \tag{21}$$

s.t.

$$(\beta_n)_j=\frac{(m_n)_j}{1-(\overline{m}_H)_j},\ (\beta_H)_j=\frac{(\widetilde{m}_n)_j}{1-(\overline{m}_H)_j},$$

$$(m_n)_j=\Big[\prod_{i=1}^{L}((m_{n,i})_j+(m_{H,i})_j)-\prod_{i=1}^{L}(m_{H,i})_j\Big]\Big/k_j,$$

$$(\widetilde{m}_H)_j=\Big[\prod_{i=1}^{L}(m_{H,i})_j-\prod_{i=1}^{L}(\overline{m}_{H,i})_j\Big]\Big/k_j,$$

$$(\overline{m}_H)_j=\Big[\prod_{i=1}^{L}(\overline{m}_{H,i})_j\Big]\Big/k_j,$$

$$k_j=\sum_{n=1}^{N}\prod_{i=1}^{L}((m_{n,i})_j+(m_{H,i})_j)-(N-1)\prod_{i=1}^{L}(\overline{m}_{H,i})_j,$$

$$(\overline{m}_{H,i})_j=1-w_i,\ (\widetilde{m}_{H,i})_j=w_i\Big(1-\sum_{n=1}^{N}(m_{n,i})_j\Big),$$

$$(m_{H,i})_j=(\widetilde{m}_{H,i})_j+(\overline{m}_{H,i})_j,$$

$$\sum_{n=1}^{N}(m_{n,i})_j+(m_{H,i})_j=1,$$

$$(m_{n,i}^{f})_j\leqslant(m_{n,i})_j\leqslant(m_{n,i}^{u})_j,$$

$$(\widetilde{m}_{n,i}^{f})_j\leqslant(\widetilde{m}_{n,i})_j\leqslant(\widetilde{m}_{n,i}^{u})_j,$$

$$U(H_n)^f\leqslant U(H_n)\leqslant U(H_n)^u,\ \sum_{n=1}^{N}w_i=1,$$

$$i=1,2,\cdots,L,\ n=1,2,\cdots,N. \tag{22}$$

$J$个效用区间的顺序组合$\{[(U_{\min})_j,(U_{\max})_j];\ j=0,1,\cdots,J-1\}$即为方案的模糊效用.

## 2.3 模糊效用的计算和比较

**定义 16** 设方案模糊效用的顺序截集区间集合为$\{[(U_{\min})_j,(U_{\max})_j];j=0,1,\cdots,J-1\}$, 结合式(7)可得模糊效用质心公式为

$$C(\widetilde{X})=\Big(\sum_{j=0}^{J-2}((((U_{\max})_j)^2+((U_{\max})_{j+1}^{u})^2+(U_{\max})_j^{u}(U_{\max})_{j+1}^{u})-(((U_{\min})_j^{f})^2+((U_{\min})_{j+1}^{f})^2+(U_{\min})_j^{f}(U_{\min})_{j+1}^{f}))\Big)\Big/3\Big(\sum_{j=0}^{J-2}((U_{\max})_j^{u}+(U_{\max})_{j+1}^{u}-(U_{\min})_j^{f}-(U_{\min})_{j+1}^{f})\Big). \tag{23}$$

通过比较模糊效用质心$C(\widetilde{U})$即可对方案排序.

# 3 算例分析

某企业拟建立一套私有云存储系统, 相关部门根据企业需求制定评价体系, 并对外招标. 评估指标分别为: 访问控制机制$e_1$, 入侵检测与预防$e_2$, 系统可靠性$e_3$, 数据恢复能力$e_4$, 数据安全性$e_5$, 每秒最大事务数$e_6$(事务数/s), 最大并发数$e_7$(个), 响应

时间 $e_8$ (s), 前期资金投入 $e_9$ (十万元), 年均维持费用 $e_{10}$ (万元) 和技术人才需求 $e_{11}$ (人), 各指标的权重 $w_1$ 如表 1 所示.

以上指标中, 前 7 个为效益型指标, 后 4 个为成本型指标; $e_1 \sim e_5$ 为定性指标, $e_6 \sim e_{11}$ 为定量指标. 指标的评价分为 5 个等级: 差 $(H_1)$, 较差 $(H_2)$, 一般 $(H_3)$, 较好 $(H_4)$ 和好 $(H_5)$; 等级效用为: $U(H_1) = 0$, $U(H_2) = 0.4$, $U(H_3) = 0.6$, $U(H_4) = 0.8$, $U(H_5) = 1$; 定量指标的等级标准如表 2 所示. 3 家 IT 企业 $A_1$, $A_2$ 和 $A_3$ 参与投标, 各竞标系统的评估结果如表 1 所示.

截集数 $J = 11$, 将决策参数代入上述方法, 可得各竞标方案的效用截集集合如表 3 所示. 将表 3 中的数值代入式 (23) 可得各方案的模糊效用质心 $C(\widetilde{U}_{A_1}) = 0.588\,4$, $C(\widetilde{U}_{A_2}) = 0.596\,5$, $C(\widetilde{U}_{A_3}) = 0.555\,0$. 由 $C(\widetilde{U}_{A_3}) < C(\widetilde{U}_{A_1}) < C(\widetilde{U}_{A_2})$ 可得 $A_3 \prec A_1 \prec A_2$, 由此可知 $A_2$ 的系统最适合该企业.

相比而言, 文献 [12-13] 等基于 TOPSIS 思想的方法不适用于上述算例. TOPSIS 方法要求在定性指标使用评估信度时等级明确且结构完整, 否则无法计算指标的相对距离. 由于算例中指标 $e_1 \sim e_5$ 的评估属于不完整的分布式定性信度结构, 不符合 TOPSIS 的适用条件, 无法求解计算方案间的相对接近度, 导致上述方法失效. 文献 [14] 中基于 ER 的方法只适用于指标为区间灰度和确定语言等级的问题, 无法处理算例中指标 $e_9$ 和 $e_{10}$ 所用的模糊定量评估的情况. 另外, 文献 [13-14] 中的方法为群决策方法, 指标的权重和评估值需综合多方意见得出, 导致决策参数的形式具有多样性, 本文方法可参考其思想扩展为群决策方法.

综上所述, 本文方法可有效处理单独或混合使用各类评估形式的不确定决策问题, 其适用条件为同一

**表 1　竞标系统的测试评估结果**

| 指标 | 权重 | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ |
|---|---|---|---|---|
| $e_1$ | 0.1 | $\{(H_4,(0.2,0.3,0.4)),(H_5,(0.6,0.65,0.7))\}$ | $\{(H_3,(0.1,0.2,0.3)),(H_4,(0.2,0.3,0.4)),(H_5,(0.3,0.4,0.5))\}$ | $\{(H_3,(0.1,0.2,0.3)),(H_4,(0.3,0.4,0.5)),(H_5,(0.2,0.3,0.4))\}$ |
| $e_2$ | 0.12 | $\{(H_3,(0.3,0.4,0.5,0.65)),(H_4,(0.4,0.5,0.55,0.6))\}$ | $\{(H_2,(0.1,0.2,0.3,0.4)),(H_3,(0.2,0.3,0.4,0.5)),(H_4,(0.4,0.5,0.55,0.6))\}$ | $\{(H_3,(0.1,0.2,0.3,0.4)),(H_4,(0.3,0.4,0.5,0.6)),(H_5,(0.3,0.35,0.4,0.45))\}$ |
| $e_3$ | 0.1 | $\{(H_3,[0.4,0.6]),(H_4,[0.5,0.7])\}$ | $\{(H_3,[0.4,0.6]),(H_4[0.3,0.5]),(H_5,[0.1,0.2])\}$ | $\{(H_3,[0.2,0.5]),(H_4,[0.4,0.5]),(H_5,[0.1,0.2])\}$ |
| $e_4$ | 0.12 | $\{(H_2,(0.2,0.3,0.4)),(H_3,(0.3,0.5,0.6)),(H_4,(0.1,0.2,0.3))\}$ | $\{(H_3,(0.4,0.5,0.6)),(H_4,(0.2,0.4,0.5))\}$ | $\{(H_2,(0.3,0.4,0.5)),(H_3,(0.5,0.6,0.7))\}$ |
| $e_5$ | 0.08 | $\{(H_3,(0.1,0.2,0.3,0.4)),(H_4,(0.2,0.3,0.4,0.5)),(H_5,(0.3,0.4,0.5,0.55))\}$ | $\{(H_3,(0.4,0.5,0.6,0.7)),(H_4,(0.3,0.4,0.5,0.6))\}$ | $\{(H_3,(0.2,0.3,0.4,0.5)),(H_4,(0.4,0.5,0.6,0.7))\}$ |
| $e_6$ | 0.08 | 5.4 | 6 | 6.9 |
| $e_7$ | 0.08 | $[16,22]$ | $[18,21]$ | $[19,26]$ |
| $e_8$ | 0.1 | 0.33 | 0.27 | 0.41 |
| $e_9$ | 0.07 | $(12,15,16)$ | $(15,16,17)$ | $(15,17,20)$ |
| $e_{10}$ | 0.09 | $(19,21,23,25)$ | $(16,17,19,21)$ | $(15,16,17,18)$ |
| $e_{11}$ | 0.06 | $[5,8]$ | $[6,7]$ | $[6,8]$ |

**表 2　定量指标等级标准**

| 指标 | $H_1$ | $H_2$ | $H_3$ | $H_4$ | $H_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $e_6$ | [0, 3] | [3, 6] | [6, 9] | [9, 12] | [12, $\infty$] |
| $e_7$ | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 |
| $e_8$ | 0.5 | 0.4 | 0.3 | 0.2 | 0.1 |
| $e_9$ | (16, 18, 20) | (12, 15, 18) | (10, 12, 14) | (16, 18, 20) | (16, 18, 20) |
| $e_{10}$ | (24, 26, 28, 30) | (20, 22, 24, 26) | (16, 18, 20, 22) | (12, 14, 16, 18) | (8, 10, 12, 14) |
| $e_{11}$ | [10, $\infty$] | [8, 10] | [6, 8] | [4, 6] | [2, 4] |

**表 3　各隶属度下竞标系统的效用区间**

| 系统 | $\alpha = 0$ | $\alpha = 0.1$ | $\alpha = 0.2$ | $\alpha = 0.3$ | $\alpha = 0.4$ | $\alpha = 0.5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | [0.525 7, 0.636 6] | [0.530 7, 0.635 0] | [0.535 6, 0.633 4] | [0.540 6, 0.631 8] | [0.545 6, 0.630 1] | [0.550 6, 0.628 5] |
| $A_3$ | [0.506 4, 0.666 6] | [0.513 5, 0.663 9] | [0.520 7, 0.661 2] | [0.533 6, 0.658 4] | [0.535 1, 0.655 7] | [0.542 3, 0.652 9] |
| $A_2$ | [0.486 2, 0.614 2] | [0.491 4, 0.611 4] | [0.496 6, 0.611 1] | [0.501 8, 0.595 4] | [0.507 0, 0.603 2] | [0.512 2, 0.600 4] |
| 系统 | $\alpha = 0.6$ | $\alpha = 0.7$ | $\alpha = 0.8$ | $\alpha = 0.9$ | $\alpha = 1$ | |
| $A_1$ | [0.555 7, 0.626 9] | [0.560 7, 0.625 2] | [0.565 8, 0.623 6] | [0.570 9, 0.622 0] | [0.576 0, 0.620 3] | |
| $A_3$ | [0.550 0, 0.650 2] | [0.562 4, 0.647 4] | [0.564 2, 0.644 6] | [0.571 5, 0.641 8] | [0.578 9, 0.639 0] | |
| $A_2$ | [0.517 5, 0.597 6] | [0.522 7, 0.594 8] | [0.528 1, 0.592 0] | [0.533 4, 0.589 2] | [0.538 8, 0.586 4] | |

指标必须使用同构评估形式. 相比文献[12-14], 本文方法适用于解决参数形式更多样化的不确定多属性决策问题.

## 4 结 论

现实决策问题的不确定性和复杂性决定了指标评价形式的多样性. 基于扩展原理的混合证据推理决策方法能够有效融合精确值、区间值、三角模糊数、梯形模糊数和语言参数等各类评价信息, 并通过等级划分标准, 等级效用和权重信息的设置融入了决策者的主观偏好, 具备主观与客观评估并重, 定性与定量分析相结合的特点. 具体算例验证了所提出的方法具有较好的可行性、有效性和适应性.

## 参考文献(References)


[1] Guo M, Yang J B, Chin K S, et al. Evidential reasoning approach for multiattribute decision analysis under both fuzzy and interval uncertainty[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2009, 17(3): 683-697.

[2] Yang J B, Singh M G. An evidential reasoning approach for multiple-attribute decision making with uncertainty[J]. IEEE Trans on Systems, Man, and Cybernetics, 1994, 24(1): 1-18.

[3] Yang J B, Xu D L. On the evidential reasoning algorithm for multiple attribute decision analysis under uncertainty[J]. IEEE Trans on System, Man, and Cybernetics, Part A: Systems and Humans, 2002, 32(3): 289-304.

[4] Xu D L, Yang J B, Wang Y M. The evidential reasoning approach for multi-attribute decision analysis under interval uncertainty[J]. European J of Operational Research, 2006, 174(3): 1914-1943.

[5] Wang Y M, Yang J B, Xu D L, et al. The evidential reasoning approach for multiple attribute decision analysis using interval belief degrees[J]. European J of Operational Research, 2006, 175(1): 35-66.

[6] Guo M, Yang J B, Chin K S, et al. Evidential reasoning based preference programming for multiple attribute decision analysis under uncertainty[J]. European J of Operational Research, 2007, 182(3): 1294-1312.

[7] Yang J B, Wang Y M, Xu D L, et al. The evidential reasoning approach MADA under both probabilistic and fuzzy uncertainties[J]. European J of Operational Research, 2006, 171(1): 309-343.

[8] Wang J Q, Zhang H Y, Zhang Z. Fuzzy multi-criteria decision-making approach with incomplete information based on evidential reasoning[J]. J of Systems Engineering and Electronics, 2010, 21(4): 604-608.

[9] Zhou M, Liu X B, Yang J B. Evidential reasoning based nonlinear programming model for MCDA under fuzzy weight and utilities[J]. Int J of Intelligent Systems, 2010, 25(1): 31-58.

[10] Gao J, Yan J J, Duanmu Z Y. Evidential reasoning based on the fuzzy beliefs[C]. The 3rd IEEE Int Conf on Computer Science and Information Technology. Chengdu: IEEE Computer Society, 2010: 103-107.

[11] 周谧. 基于证据推理的多属性决策中若干问题的研究[D]. 合肥: 合肥工业大学管理学院, 2009: 36-38.
( Zhou M. Research on some problems in the multiple attribute decision making based on evidential reasoning approach[D]. Hefei: The School of Management, Hefei University of Technology, 2009: 36-38.)

[12] 夏勇其, 吴祈宗. 一种混合型多属性决策问题的TOPSIS方法[J]. 系统工程学报, 2004, 19(6): 630-634.
(Xia Y Q, Wu Q Z. A technique of order preference by similarity to ideal solution for hybrid multiple attribute decision making problems[J]. J of Systems Engineering, 2004, 19(6): 630-634.)

[13] 梁昌勇, 戚筱雯, 丁勇, 等. 一种基于TOPSIS的混合型多属性群决策方法[J]. 中国管理科学, 2012, 20(4): 109-116.
(Liang C Y, Qi X W, Ding Y, et al. A hybrid multi-criteria group decision making with TOPSIS method[J]. Chinese J of Management Science, 2012, 20(4): 109-116.)

[14] 陈孝新. 一种基于证据推理的混合型灰色多属性群决策方法[J]. 控制与决策, 2011, 26(6): 831-836.
(Chen X X. Hybrid grey multiple attribute group decision-making method based on evidential reasoning approach[J]. Control and Decision, 2011, 26(6): 831-836.)

[15] Zadeh L A. The concept of linguistic variable and its application to approximate reasoning-I[J]. Information Sciences, 1975, 8(3): 199-249.

[16] Wang Y M. Centroid defuzzification and the maximizing set and minimizing set ranking based on alpha level sets[J]. Computers & Industrial Engineering, 2009, 57(1): 228-236.

[17] Wang Y M, Yang J B, Xu D L, et al. Consumer preference prediction by using a hybrid evidential reasoning and belief rule-based methodology[J]. Expert Systems with Applications, 2009, 36(4): 8421-8430.

[18] Wang Y M, Yang J B, Xu D L. Environment impact assessment using the evidential reasoning approach[J]. European J of Operational Research, 2006, 174(3): 1885-1913.

[19] Wang Y M, Taha M S, Elhag. On the normalization of interval and fuzzy weights[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2006, 157(18): 2456-2471.


(责任编辑: 滕 蓉)