

基于IFN输入的复杂系统关联MCGDM方法

熊升华, 陈振颂, 李延来

(西南交通大学 a. 交通运输与物流学院, b. 综合交通运输智能化国家地方联合工程实验室, 成都 610031)

摘要: 考虑现有直觉模糊熵公理化定义存在的不足, 提出改进直觉模糊熵的公理化定义及其计算公式; 同时, 定义广义幂均算子, 验证其相关性质, 给出确定幂方参数的方法, 并将其推广至广义直觉模糊幂均算子; 在以直觉模糊数(IFN)为信息输入的复杂系统框架内, 针对决策者及准则之间均存在交互关联关系且权重信息完全未知的多准则群决策(MCGDM)问题, 提出基于直觉模糊熵与广义直觉模糊幂均算子的关联MCGDM方法. 案例分析表明, 所提出的方法是可行且有效的.

关键词: 多准则群决策; 直觉模糊熵; 幂均算子; 广义直觉模糊幂均算子

中图分类号: C934

文献标志码: A

Interdependent multiple criteria group decision making method for complex systems based on arguments with intuitionistic fuzzy numbers

XIONG Sheng-hua, CHEN Zhen-song, LI Yan-lai

(a. School of Transportation and Logistics, b. Nation and Region Combined Engineering Lab of Intelligentizing Integrated Transportation, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China. Correspondent: LI Yan-lai, E-mail: ly12001@163.com)

Abstract: In view of the deficiency of axiomatic definitions of intuitionistic fuzzy sets among current researches, an improved axiomatic definition of the intuitionistic fuzzy entropy is presented, and a corresponding formula is structured. In order to minimize the influence of abnormal data for information aggregation, a power parameter is introduced to define the generalized power average(GPA) operator. The related properties of GPA are proposed and verified, and an approach for determining the power parameters is also presented. Furthermore, the GPA operator is extended to intuitionistic fuzzy environments to proposed the generalized intuitionistic fuzzy power average operator. In a framework of complex system whose performance is evaluated as intuitionistic fuzzy numbers(IFNs), with respect to a multiple criteria group decision making(MCGDM) problem, in which there are both interactions among decision-makers, and criteria and decision-makers' weights and criterion weights are both unknown, an interdependent MCGDM method based on an intuitionistic fuzzy entropy and a generalized intuitionistic fuzzy power average operator is proposed. A practical example illustrates the effectiveness and feasibility of the proposed decision-making methods.

Key words: multiple criteria group decision making; intuitionistic fuzzy entropy; power average operator; generalized intuitionistic fuzzy power average operator

0 引言

由大量子系统组成的复杂系统往往具有规模化、复杂化和技术化等重要特征, 因而基于复杂系统的模糊多准则群决策(FMCGDM)方法应具备处理系统高度不确定性、信息多重关联性等复杂因素的能力. 通常, 基于复杂系统的FMCGDM过程可视为利用恰当的决策理论与方法将初始模糊输入信息(包括语义信息及其模糊化数据等)转化为集成评

估信息输出的系统化过程^[1-2]. 目前, 涉及复杂系统的FMCGDM理论与方法的深入研究相对匮乏, 然而其在故障诊断、模式识别、机器学习、图像处理、决策支持系统等诸多领域的广泛应用需求则对决策体系的架构提出了更高的要求^[3-5].

近年来, 与多属性群决策(MCGDM)相关的理论与方法已引起众多学者的关注^[5-12]. 作为辅助决策者处理系统输入信息以实现方案筛选、获取合理决

收稿日期: 2014-02-19; 修回日期: 2014-05-12.

基金项目: 国家自然科学基金项目(70971017, 71371156); 西南交通大学优秀博士学位论文培育项目.

作者简介: 熊升华(1988-), 男, 博士生, 从事决策理论与方法、智能控制与应用的研究; 李延来(1971-), 男, 教授, 博士生导师, 从事交通信息工程、智能控制与应用等研究.

策结论的有效工具, MCGDM 已从信息输入类别划分角度出发在 FMCGDM、随机 MCGDM、模糊随机 MCGDM、灰色 MCGDM、灰色随机 MCGDM 等细分领域取得了显著进展^[6-13]. 就 FMCGDM 过程而言, 现有的研究分别针对寻找具备强模糊性的模糊数、完善相应模糊数的运算规则及构建合理的序关系判定定理、模糊输入信息的合理度量、有效信息集成算子的提出、属性权重及决策者权重的合理确定等分别展开研究^[8-9,13-15], 考虑基于复杂系统的 MCGDM 过程中决策者及属性之间所存在交互作用, 如何有效度量基于模糊输入信息模糊程度以及如何实现交互信息的有效集结是 FMCGDM 过程中极为关键的问题. 事实上, 对模糊信息度量以及信息集成算子的研究尚有待进一步延伸, 对此展开分析以提升决策结论的合理性和可信性极为关键.

自 Zadeh^[16]提出模糊熵概念以刻画模糊集的模糊性程度以来, 关于模糊熵的定义及构造已得到了广泛的延伸和拓展. 研究将模糊熵推广至可同时测度直觉模糊集的直觉性与模糊性而定义的直觉模糊熵则是其中极为重要的一个分支. Burillo 等^[17]基于 Luca 等^[18]所提出的模糊集的熵公理化定义, 给出了直觉模糊集的熵公理化定义, 但依据该公理化定义而构建的直觉模糊熵公式无法度量直觉模糊集的模糊性程度^[19]. Szmidt 等^[20]提出了改进的直觉模糊熵公理化定义, 并基于直觉模糊集的几何解释构造一种熵计算公式. Vlachos 等^[21]基于直觉模糊集的交叉熵公式导出一个新的直觉模糊熵计算公式, 并阐述了模糊熵与直觉模糊熵之间的联系. Xia 等^[22]提出了新的直觉模糊集的交叉熵公式, 并由此诱导出一个新的熵公式. 但是, 文献^[20-22]均只考虑了直觉模糊集隶属度与非隶属度的偏差程度, 而未考虑犹豫度对直觉模糊集不确定性的影响. Hung 等^[23]基于概率论思想提出直觉模糊熵的公理化定义, 并推广至区间直觉模糊集. 魏翠萍等^[19]对已有直觉模糊集的熵公式依据是否同时描述直觉模糊集的模糊性和直觉性进行分类, 较为全面地分析了各类熵计算公式的优缺点, 提出了一个改进的直觉模糊熵计算公式. Mao 等^[24]考虑了隶属度与非隶属度之间的绝对偏差一定时犹豫度变化对直觉模糊熵的影响、犹豫度一定时隶属度与非隶属度之间绝对偏差的变化对直觉模糊数的影响, 给出了改进的直觉模糊熵的公理化定义, 并通过定义新的直觉模糊集的交叉熵公式导出一个新的直觉模糊熵计算公式.

目前, 对于信息集成算子而言, 已有众多相关研究. 考虑日益复杂、繁冗的决策环境, 有效而切合实际的信息集成算子应充分将 FMCGDM 过程中决策者

及属性之间的交互作用纳入信息融合之中. Yager^[25]于 2001 年提出幂均算子, 通过计算输入数据之间的相互支持度提出了一类非线性信息集成方式. 万树平^[26]为解决一类系统输入元素为区间数的不确定多属性决策问题, 定义了区间数幂均算子以集成方案的综合属性值. Xu 等^[27]进一步提出了基于精确数的几何幂均算子、有序几何幂均算子以及有序加权几何幂均算子, 研究了幂均算子与几何幂均算子之间、有序加权幂均算子与有序加权几何幂均算子之间的相互联系, 并进一步将其推广至不确定决策环境. 通常, 在实际决策问题中, 复杂决策环境下的输入信息常以直觉模糊数的形式予以表征, 因此, Xu^[28]进而将幂均算子与几何幂均算子拓展至直觉模糊集, 并给出了几类多属性群决策方法. Zhou 等^[29]提出了广义幂均算子并给出了一系列拓展广义幂均算子, 进而针对输入数据为直觉模糊集的信息集成环境, 研究了广义直觉模糊幂均算子及其加权形式等. Zhang^[30]针对幂均算子在犹豫模糊集中的拓展, 提出了犹豫模糊幂均算子、犹豫模糊几何幂均算子、广义犹豫模糊幂均算子以及广义犹豫模糊几何幂均算子等, 并探讨了其相互间的联系及其在多属性群决策问题中的应用.

事实上, 关于直觉模糊熵及幂均算子的研究尚未形成完善的体系, 一方面, 直觉模糊熵的公理化定义有待进一步改进, 并需要构造相应的直觉模糊熵计算公式; 另一方面, 广义幂均算子通过引入变化参数更具有一般性, 但现有研究并未给出参数的相应确定方法, 而仅仅是以给定的值探讨信息集成的有效性与合理性. 针对上述两方面的问题, 本文首先在经典直觉模糊熵公理化定义的基础上提出改进的公理化定义, 给出并验证了一个直觉模糊熵公式的合理性; 然后引入幂方参数以定义新的广义幂均算子, 研究了该广义幂均算子的性质并予以验证. 为规避主观确定幂方参数对信息融合过程带来的影响, 提出了幂方参数的一种确定方法. 特别地, 针对以直觉模糊数 (IFNs) 为信息输入的复杂系统框架, 将广义幂均算子予以推广而定义广义直觉模糊幂均算子. 考虑决策者及准则之间均存在交互关联关系且权重信息完全未知的 MCGDM 问题, 本文提出基于直觉模糊熵与广义直觉模糊幂均算子的关联 MCGDM 方法. 通过将本文方法应用于目前市场上同等价位的高性价比 Android 手机测评的实例, 分析了所提出方法的可行性和有效性.

1 理论基础

1.1 直觉模糊数

作为对传统模糊集的拓展, Atanassov^[31]提出的直觉模糊集由于同时考虑了隶属度、非隶属度和犹豫

度3方面的信息,更加细腻地刻画了事物的模糊性本质,在处理不确定性问题方面较传统的模糊集更为精确,在理论分析与实际应用的各个领域得到了广泛的应用研究^[31-35].

定义 1^[31] 设 X 是一个非空集合,称

$$\tilde{A} = \{ \langle x, \mu_{\tilde{A}}(x), \nu_{\tilde{A}}(x) \rangle, x \in X \}$$

为直觉模糊集. 其中 $\mu_{\tilde{A}}(x)$ 和 $\nu_{\tilde{A}}(x)$ 分别为 X 中元素 x 属于 X 的隶属度 $\mu_{\tilde{A}}: X \rightarrow [0, 1]$ 和非隶属度 $\nu_{\tilde{A}}: X \rightarrow [0, 1]$, 且 $0 \leq \mu_{\tilde{A}}(x) + \nu_{\tilde{A}}(x) \leq 1$. 另外, $\pi_{\tilde{A}}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x) - \nu_{\tilde{A}}(x)$ 为 X 中元素 x 属于 X 的犹豫度, 犹豫度越小, 该直觉模糊集越清晰. X 上直觉模糊集全体记为 $\text{IFS}(X)$.

通常, 记 $\alpha = (\mu_{\alpha}, \nu_{\alpha})$ 为直觉模糊数 (IFN). 其中: $\mu_{\alpha} \in [0, 1]$ 为隶属度, $\nu_{\alpha} \in [0, 1]$ 为非隶属度, 满足 $0 \leq \mu_{\alpha} + \nu_{\alpha} \leq 1$. 此时, 直觉模糊数 α 的犹豫度记为 $\pi_{\alpha} = 1 - \mu_{\alpha} - \nu_{\alpha}$ ^[32]. 关于 IFN 的运算规则、序关系判定准则、距离度量公式等均可参见文献 [32-36]. 需要指出的是, 本文将以标准 Hamming 距离作为直觉模糊数的距离度量公式.

1.2 幂均算子

为克服信息集结过程中主观权重对集结结果的影响, Yager^[25]提出了一种依附于待集结个体与整体的差异化程度而实现客观赋权的信息集结算子, 即幂均算子. 下面简要介绍其相关概念.

定义 2^[25] 设 (a_1, a_2, \dots, a_n) 为一组待集结的实数, 称下式为幂均算子:

$$\text{PA}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{\sum_{i=1}^n (1 + T(a_i)) a_i}{\sum_{i=1}^n (1 + T(a_i))} = \sum_{i=1}^n \frac{1 + T(a_i)}{\sum_{i=1}^n (1 + T(a_i))} a_i.$$

其中 $T(a_i) = \sum_{j=1, j \neq i}^n \sup(a_i, a_j)$ 和 $\sup(a_i, a_j)$ 表示 a_j 对 a_i 的支持度, 且满足以下条件:

- 1) $\sup(a_i, a_j) \in [0, 1]$;
- 2) $\sup(a_i, a_j) = \sup(a_j, a_i)$;
- 3) 如果 $|a_i - a_j| < |a_s - a_t|$, 则 $\sup(a_i, a_j) > \sup(a_s, a_t)$.

此外, Yager^[25]同时给出了两个满足条件的支持度, 以如下定理的形式给出.

定理 1^[25] 设 (a_1, a_2, \dots, a_n) 为一组待集结的实数, 则 $\sup(a_i, a_j) = K e^{-\alpha(a_i - a_j)^2}$ 和 $\sup(a_i, a_j) = K(1 - |a_i - a_j|^{\alpha})$ 均为 a_j 对 a_i 的支持度. 其中: $\alpha \geq 0$, $K \in [0, 1]$.

2 直觉模糊熵

近年来, 关于直觉模糊熵的研究日益深入, 学者们致力于解决如何使得直觉模糊熵能够更为精确和合理地刻画直觉模糊集的不确定性. 针对传统直觉模糊熵公理化定义存在的缺陷, 魏翠萍等^[19,37]指出, 直觉模糊熵用以刻画直觉模糊集的不确定信息时, 不仅需要刻画直觉模糊集的模糊信息, 还应囊括直觉模糊集的直觉信息. Mao 等^[24]进一步指出, 模糊信息由直觉模糊集隶属度与非隶属度的绝对偏差决定, 而直觉信息则由直觉模糊集的犹豫度决定. 下面给出新的直觉模糊熵的公理化定义以及一种熵计算公式的构造形式.

定义 3 设 $\tilde{A} = \{ \langle x_i, \mu_{\tilde{A}}(x_i), \nu_{\tilde{A}}(x_i) \rangle | x_i \in X \}$ 和 $\tilde{B} = \{ \langle x_i, \mu_{\tilde{B}}(x_i), \nu_{\tilde{B}}(x_i) \rangle | x_i \in X \}$ 为两个直觉模糊集, 称函数 $E: \text{IFS}(X) \rightarrow [0, 1]$ 为直觉模糊熵, 如果它满足以下准则:

准则 1 $E(\tilde{A}) = 0$, 当且仅当 \tilde{A} 为清晰集, 即 $\forall x_i \in X$, 有 $\mu_{\tilde{A}}(x_i) = 1, \nu_{\tilde{A}}(x_i) = 0$ 或 $\mu_{\tilde{A}}(x_i) = 0, \nu_{\tilde{A}}(x_i) = 1$.

准则 2 $E(\tilde{A}) = 1$, 当且仅当 $\forall x_i \in X$, 有 $\mu_{\tilde{A}}(x_i) = \nu_{\tilde{A}}(x_i)$.

准则 3 $E(\tilde{A}) = E(\tilde{A}^c), \forall x_i \in X$.

准则 4 $E(\tilde{A}) \leq E(\tilde{B})$, 如果对于 $\forall x_i \in X$, 有:

- 1) 当 $\mu_{\tilde{B}}(x_i) \geq \nu_{\tilde{B}}(x_i)$ 时, $\mu_{\tilde{A}}(x_i) \geq \mu_{\tilde{B}}(x_i)$ 且 $\nu_{\tilde{A}}(x_i) \leq \nu_{\tilde{B}}(x_i)$;
- 2) 当 $\mu_{\tilde{B}}(x_i) \leq \nu_{\tilde{B}}(x_i)$ 时, $\mu_{\tilde{A}}(x_i) \leq \mu_{\tilde{B}}(x_i)$ 且 $\nu_{\tilde{A}}(x_i) \geq \nu_{\tilde{B}}(x_i)$.

准则 5 若存在子集 $Y \subset X$, 使得

$$\langle x_i, \mu_{\tilde{B}}(x_i), \nu_{\tilde{B}}(x_i) \rangle = \begin{cases} \langle x_i, \mu_{\tilde{A}'}(x_i), \nu_{\tilde{A}'}(x_i) \rangle, & x_i \in Y; \\ \langle x_i, \mu_{\tilde{A}}(x_i), \nu_{\tilde{A}}(x_i) \rangle, & x_i \notin Y. \end{cases}$$

其中: 对于 $\forall x_i \in Y$, 均有 $|\mu_{\tilde{A}}(x_i) - \nu_{\tilde{A}}(x_i)| = |\mu_{\tilde{B}}(x_i) - \nu_{\tilde{B}}(x_i)|$ 和 $\pi_{\tilde{A}}(x_i) < \pi_{\tilde{B}}(x_i)$ 成立. 则 $E(\tilde{A}) \leq E(\tilde{B})$.

为了更好地对改进直觉模糊熵公理化定义中准则 5 予以说明, 下面举例阐述直觉模糊准则 5 的判定形式.

例 1 设非空集合 $X = \{1, 2, 3\}, Y = \{2\}$, 则 $Y \subset X$. 令 $\tilde{A} = \{ \langle 1, 0.5, 0.3 \rangle, \langle 2, 0.6, 0.2 \rangle, \langle 3, 0.8, 0.1 \rangle \}$, $\tilde{B} = \{ \langle 1, 0.5, 0.3 \rangle, \langle 2, 0.5, 0.1 \rangle, \langle 3, 0.8, 0.1 \rangle \}$. 由于:

- 1) $1 \notin Y$, 且 $\langle 1, \mu_{\tilde{B}}(1), \nu_{\tilde{B}}(1) \rangle = \langle 1, 0.5, 0.3 \rangle = \langle 1, \mu_{\tilde{A}}(1), \nu_{\tilde{A}}(1) \rangle$;
- 2) $3 \notin Y$, 且 $\langle 3, \mu_{\tilde{B}}(3), \nu_{\tilde{B}}(3) \rangle = \langle 3, 0.8, 0.1 \rangle = \langle 3, \mu_{\tilde{A}}(3), \nu_{\tilde{A}}(3) \rangle$;
- 3) $2 \in Y, \langle 2, \mu_{\tilde{B}}(2), \nu_{\tilde{B}}(2) \rangle = \langle 2, 0.5, 0.1 \rangle \neq \langle 2, 0.6, 0.2 \rangle = \langle 1, \mu_{\tilde{A}}(2), \nu_{\tilde{A}}(2) \rangle, |\mu_{\tilde{A}}(2) - \nu_{\tilde{A}}(2)| = |\mu_{\tilde{B}}(2) - \nu_{\tilde{B}}(2)|$

$\nu_{\tilde{B}}(2)$ 且 $\pi_{\tilde{A}}(2) < \pi_{\tilde{B}}(2)$. 显然, \tilde{A} 和 \tilde{B} 是满足准则 5 的直觉模糊集.

基于定义 3, 下面给出一个新的直觉模糊熵计算公式.

定义 4 设 $\tilde{A} = \{\langle x_i, \mu_{\tilde{A}}(x_i), \nu_{\tilde{A}}(x_i) \rangle | x_i \in X\}$ 为论域 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 上的一个直觉模糊集, 则

$$\begin{aligned} E(\tilde{A}) = & \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (1 - |\mu_{\tilde{A}}(x_i) - \nu_{\tilde{A}}(x_i)|) [1 + (1 - \mu_{\tilde{A}}(x_i) - \nu_{\tilde{A}}(x_i)) \ln(1 + |\mu_{\tilde{A}}(x_i) - \nu_{\tilde{A}}(x_i)|)] = \\ & \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (1 - |\mu_{\tilde{A}}(x_i) - \nu_{\tilde{A}}(x_i)|) [1 + \pi_{\tilde{A}}(x_i) \ln(1 + |\mu_{\tilde{A}}(x_i) - \nu_{\tilde{A}}(x_i)|)] \end{aligned} \quad (1)$$

为直觉模糊集 \tilde{A} 的熵.

定理 2 $E(\tilde{A})$ 为论域 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 上的直觉模糊集 $\tilde{A} = \{\langle x_i, \mu_{\tilde{A}}(x_i), \nu_{\tilde{A}}(x_i) \rangle | x_i \in X\}$ 的直觉模糊熵.

证明 首先证明 $0 \leq E(\tilde{A}) \leq 1$.

因为 $0 \leq \mu_{\tilde{A}}(x_i), \nu_{\tilde{A}}(x_i) \leq 1$ 且 $\mu_{\tilde{A}}(x_i) + \nu_{\tilde{A}}(x_i) \leq 1$, 所以 $\ln(1 + |\mu_{\tilde{A}}(x_i) - \nu_{\tilde{A}}(x_i)|) \leq |\mu_{\tilde{A}}(x_i) - \nu_{\tilde{A}}(x_i)|$, 从而

$$\begin{aligned} 0 \leq & (1 - |\mu_{\tilde{A}}(x_i) - \nu_{\tilde{A}}(x_i)|) [1 + (1 - \mu_{\tilde{A}}(x_i) - \nu_{\tilde{A}}(x_i)) \ln(1 + |\mu_{\tilde{A}}(x_i) - \nu_{\tilde{A}}(x_i)|)] \leq \\ & (1 - |\mu_{\tilde{A}}(x_i) - \nu_{\tilde{A}}(x_i)|) [1 + \ln(1 + |\mu_{\tilde{A}}(x_i) - \nu_{\tilde{A}}(x_i)|)] \leq \\ & (1 - |\mu_{\tilde{A}}(x_i) - \nu_{\tilde{A}}(x_i)|) (1 + |\mu_{\tilde{A}}(x_i) - \nu_{\tilde{A}}(x_i)|) = \\ & 1 - |\mu_{\tilde{A}}(x_i) - \nu_{\tilde{A}}(x_i)|^2 \leq 1, \end{aligned}$$

因此有 $0 \leq E(\tilde{A}) \leq 1$ 成立.

下面证明 $E(\tilde{A})$ 满足准则 1 ~ 准则 5.

准则 1 的充分性. $\forall x_i \in X$, 分如下两类情形予以讨论:

1) 当 $\mu_{\tilde{A}}(x_i) = 1, \nu_{\tilde{A}}(x_i) = 0$ 时, 有

$$\begin{aligned} E(\tilde{A}) = & \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (1 - |1 - 0|) [1 + (1 - 1 - 0) \ln(1 + |1 - 0|)] = 0; \end{aligned}$$

2) 当 $\mu_{\tilde{A}}(x_i) = 0, \nu_{\tilde{A}}(x_i) = 1$ 时, 有

$$\begin{aligned} E(\tilde{A}) = & \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (1 - |0 - 1|) [1 + (1 - 0 - 1) \ln(1 + |0 - 1|)] = 0. \end{aligned}$$

准则 1 的必要性. $\forall x_i \in X$, 若 $E(\tilde{A}) = 0$, 则

$$1 - |\mu_{\tilde{A}}(x_i) - \nu_{\tilde{A}}(x_i)| = 0, \quad (2)$$

或者

$$1 + \pi_{\tilde{A}}(x_i) \ln(1 + |\mu_{\tilde{A}}(x_i) - \nu_{\tilde{A}}(x_i)|) = 0. \quad (3)$$

由于 $1 + \pi_{\tilde{A}}(x_i) \ln(1 + |\mu_{\tilde{A}}(x_i) - \nu_{\tilde{A}}(x_i)|) \geq 1$, 必有式 (2) 成立. 易知, 当且仅当 $\mu_{\tilde{A}}(x_i) = 1, \nu_{\tilde{A}}(x_i) = 0$ 或 $\mu_{\tilde{A}}(x_i) = 0, \nu_{\tilde{A}}(x_i) = 1$ 时, 式 (2) 成立, 从而 \tilde{A} 为清晰集.

准则 2 的充分性. $\forall x_i \in X$, 当 $\mu_{\tilde{A}}(x_i) = \nu_{\tilde{A}}(x_i)$ 时, 有

$$\begin{aligned} E(\tilde{A}) = & \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (1 - |\mu_{\tilde{A}}(x_i) - \nu_{\tilde{A}}(x_i)|) [1 + (1 - \mu_{\tilde{A}}(x_i) - \nu_{\tilde{A}}(x_i)) \ln(1 + |\mu_{\tilde{A}}(x_i) - \nu_{\tilde{A}}(x_i)|)] = 1. \end{aligned}$$

准则 2 的必要性. $\forall x_i \in X$, 若 $E(\tilde{A}) = 1$, 则有如下方程组成立:

$$\begin{cases} 1 - |\mu_{\tilde{A}}(x_i) - \nu_{\tilde{A}}(x_i)| = 1, \\ 1 + \pi_{\tilde{A}}(x_i) \ln(1 + |\mu_{\tilde{A}}(x_i) - \nu_{\tilde{A}}(x_i)|) = 1. \end{cases}$$

显然, 当且仅当 $\mu_{\tilde{A}}(x_i) = \nu_{\tilde{A}}(x_i)$ 时, 方程组成立.

准则 3. $E(\tilde{A}) = E(\tilde{A}^c)$ 显然成立.

准则 4. $\forall x_i \in X$, 令

$$g(\alpha_i, \beta_i) = (1 - \alpha_i) [1 + \beta_i \ln(1 + \alpha_i)].$$

其中: $\alpha_i = |\mu_{\tilde{A}}(x_i) - \nu_{\tilde{A}}(x_i)|, \beta_i = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x_i) - \nu_{\tilde{A}}(x_i), \alpha_i \in [0, 1], \beta_i \in [0, 1]$.

对 $g(\alpha_i, \beta_i)$ 求关于 α_i 的偏导, 有

$$g_{\alpha_i}(\alpha_i, \beta_i) = -[1 + \beta_i \ln(1 + \alpha_i)] + \frac{\beta_i(1 - \alpha_i)}{1 + \alpha_i}.$$

因为 $-[1 + \beta_i \ln(1 + \alpha_i)] \leq -1$ 且 $0 < \beta_i(1 - \alpha_i) / (1 + \alpha_i) < 1$, 所以 $g_{\alpha_i}(\alpha_i, \beta_i)$ 在 $\alpha_i \in [0, 1]$ 上恒小于 0, 从而 $g(\alpha_i, \beta_i)$ 关于 α_i 严格单调递减.

设 \tilde{A} 和 \tilde{B} 为论域上的两个直觉模糊集, 有:

1) 当 $\mu_{\tilde{B}}(x_i) \geq \nu_{\tilde{B}}(x_i), \mu_{\tilde{A}}(x_i) \geq \mu_{\tilde{B}}(x_i)$ 且 $\nu_{\tilde{A}}(x_i) \leq \nu_{\tilde{B}}(x_i)$ 时, 有

$$\nu_{\tilde{A}}(x_i) \leq \nu_{\tilde{B}}(x_i) \leq \mu_{\tilde{B}}(x_i) \leq \mu_{\tilde{A}}(x_i),$$

则

$$|\mu_{\tilde{A}}(x_i) - \nu_{\tilde{A}}(x_i)| \geq |\mu_{\tilde{B}}(x_i) - \nu_{\tilde{B}}(x_i)|.$$

由以上分析知

$$\begin{aligned} g(|\mu_{\tilde{A}}(x_i) - \nu_{\tilde{A}}(x_i)|, 1 - \mu_{\tilde{A}}(x_i) - \nu_{\tilde{A}}(x_i)) & \leq \\ g(|\mu_{\tilde{B}}(x_i) - \nu_{\tilde{B}}(x_i)|, 1 - \mu_{\tilde{B}}(x_i) - \nu_{\tilde{B}}(x_i)), \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} (1 - |\mu_{\tilde{A}}(x_i) - \nu_{\tilde{A}}(x_i)|) [1 + (1 - \mu_{\tilde{A}}(x_i) - \nu_{\tilde{A}}(x_i)) \ln(1 + |\mu_{\tilde{A}}(x_i) - \nu_{\tilde{A}}(x_i)|)] & \leq \\ (1 - |\mu_{\tilde{B}}(x_i) - \nu_{\tilde{B}}(x_i)|) [1 + (1 - \mu_{\tilde{B}}(x_i) - \nu_{\tilde{B}}(x_i)) \ln(1 + |\mu_{\tilde{B}}(x_i) - \nu_{\tilde{B}}(x_i)|)]. \end{aligned}$$

由 x_i 的任意性, 有 $E(\tilde{A}) \leq E(\tilde{B})$ 成立.

2) 当 $\mu_{\tilde{B}}(x_i) \leq \nu_{\tilde{B}}(x_i)$, $\mu_{\tilde{A}}(x_i) \leq \mu_{\tilde{B}}(x_i)$ 且 $\nu_{\tilde{A}}(x_i) \geq \nu_{\tilde{B}}(x_i)$ 时, 有

$$\mu_{\tilde{A}}(x_i) \leq \mu_{\tilde{B}}(x_i) \leq \nu_{\tilde{B}}(x_i) \leq \nu_{\tilde{A}}(x_i),$$

则

$$|\mu_{\tilde{A}}(x_i) - \nu_{\tilde{A}}(x_i)| \geq |\mu_{\tilde{B}}(x_i) - \nu_{\tilde{B}}(x_i)|.$$

同理可证

$$\begin{aligned} & (1 - |\mu_{\tilde{A}}(x_i) - \nu_{\tilde{A}}(x_i)|)[1 + (1 - \mu_{\tilde{A}}(x_i) - \\ & \nu_{\tilde{A}}(x_i)) \ln(1 + |\mu_{\tilde{A}}(x_i) - \nu_{\tilde{A}}(x_i)|)] \leq \\ & (1 - |\mu_{\tilde{B}}(x_i) - \nu_{\tilde{B}}(x_i)|)[1 + (1 - \mu_{\tilde{B}}(x_i) - \\ & \nu_{\tilde{B}}(x_i)) \ln(1 + |\mu_{\tilde{B}}(x_i) - \nu_{\tilde{B}}(x_i)|)]. \end{aligned}$$

由 x_i 的任意性, 有 $E(\tilde{A}) \leq E(\tilde{B})$ 成立.

准则 5. 设 \tilde{A} 和 \tilde{B} 为论域上的两个直觉模糊集, 若存在子集 $Y \subset X$, 使得

$$\langle x_i, \mu_{\tilde{B}}(x_i), \nu_{\tilde{B}}(x_i) \rangle = \begin{cases} \langle x_i, \mu_{\tilde{A}}(x_i), \nu_{\tilde{A}}(x_i) \rangle, & x_i \in Y; \\ \langle x_i, \mu_{\tilde{A}}(x_i), \nu_{\tilde{A}}(x_i) \rangle, & x_i \in X, x_i \notin Y. \end{cases}$$

其中: 对于 $\forall x_i \in Y$, 均有 $|\mu_{\tilde{A}}(x_i) - \nu_{\tilde{A}}(x_i)| = |\mu_{\tilde{B}}(x_i) - \nu_{\tilde{B}}(x_i)|$ 和 $\pi_{\tilde{A}}(x_i) < \pi_{\tilde{B}}(x_i)$ 成立.

1) 当 $\mu_{\tilde{A}}(x_i) = \nu_{\tilde{A}}(x_i)$, $\mu_{\tilde{B}}(x_i) = \nu_{\tilde{B}}(x_i)$ 时, 由准则 2 知, $E(\tilde{A}) = E(\tilde{B}) = 1$;

2) 当 $\mu_{\tilde{A}}(x_i) \neq \nu_{\tilde{A}}(x_i)$, $\mu_{\tilde{B}}(x_i) \neq \nu_{\tilde{B}}(x_i)$ 时, 有

$$\begin{aligned} & 1 + \pi_{\tilde{A}}(x_i) \ln(1 + |\mu_{\tilde{A}}(x_i) - \nu_{\tilde{A}}(x_i)|) \leq \\ & 1 + \pi_{\tilde{B}}(x_i) \ln(1 + |\mu_{\tilde{B}}(x_i) - \nu_{\tilde{B}}(x_i)|). \end{aligned}$$

由 x_i 的任意性, 有 $E(\tilde{A}) < E(\tilde{B})$ 成立.

综上所述, $E(\tilde{A}) \leq E(\tilde{B})$. \square

为便于阐释本文所提出熵公式在测度直觉模糊熵直觉信息与模糊信息方面的合理性和优越性, 首先介绍两类经典的直觉模糊熵公式. 鉴于后续众多直觉模糊熵公式均为基于此类直觉模糊熵的拓展, 以下仅考虑由 Burillo 等^[17] 所提出的仅包含直觉模糊集直觉信息的直觉模糊熵公式

$$\begin{aligned} E_1(\tilde{A}) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (1 - \mu_{\tilde{A}}(x_i) - \nu_{\tilde{A}}(x_i)) = \\ & \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \pi_{\tilde{A}}(x_i), \end{aligned}$$

以及由 Szmidt 等^[21] 考虑直觉模糊数隶属度和非隶属度的绝对偏差对直觉模糊熵的影响而提出的蕴含直觉模糊集模糊信息的直觉模糊熵公式

$$E_2(\tilde{A}) = 1 - \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n |\mu_{\tilde{A}}(x_i) - \nu_{\tilde{A}}(x_i)|,$$

并与本文所提出的熵公式进行对比分析.

结合经典直觉模糊熵公式 E_1 和 E_2 , 本文通过如下例子将式 (1) 所定义的直觉模糊熵公式与同类公式做进一步对比.

例 2 设 $\tilde{A}_1 = \{\langle x, 0.5, 0.3 \rangle\}$ 、 $\tilde{A}_2 = \{\langle x, 0.4, 0.4 \rangle\}$ 和 $\tilde{A}_3 = \{\langle x, 0.4, 0.2 \rangle\}$ 为论域 $X = \{x\}$ 上的 3 个直觉模糊集, 分别以熵公式 E 、 E_1 和 E_2 计算直觉模糊集 \tilde{A}_1 、 \tilde{A}_2 和 \tilde{A}_3 的熵, 计算结果如表 1 所示.

表 1 直觉模糊集熵公式比较分析表

直觉模糊熵	直觉模糊集		
	$\tilde{A}_1 = \{\langle x, 0.5, 0.3 \rangle\}$	$\tilde{A}_2 = \{\langle x, 0.4, 0.4 \rangle\}$	$\tilde{A}_3 = \{\langle x, 0.4, 0.2 \rangle\}$
$E(\tilde{A})$	0.764 3	1.000 0	0.728 6
$E_1(\tilde{A})$	0.200 0	0.200 0	0.400 0
$E_2(\tilde{A})$	0.900 0	1.000 0	0.900 0

由本文所提出的熵公式 E 可知, $E(\tilde{A}_2) > E(\tilde{A}_1) > E(\tilde{A}_3)$. 结果表明, 犹豫度相同时, 隶属度与非隶属度的绝对偏差越小, 直觉模糊熵便越大, 如 $E(\tilde{A}_2) > E(\tilde{A}_1)$. 同样地, 在隶属度与非隶属度的绝对偏差相同时, 犹豫度越大, 直觉模糊熵越大, 如 $E(\tilde{A}_1) > E(\tilde{A}_3)$, 这与实际相符. 然而, 虽然元素 x 隶属于 \tilde{A}_1 和 \tilde{A}_2 的犹豫度相同, 但 x 隶属于 \tilde{A}_1 的隶属度与非隶属度的绝对偏差大于 \tilde{A}_2 , 因而 \tilde{A}_1 的不确定性应小于 \tilde{A}_2 的不确定性. 利用熵公式 E_1 得到 $E_1(\tilde{A}_2) = E_1(\tilde{A}_1)$, 与实际不符. 此外, 元素 x 隶属于 \tilde{A}_1 和 \tilde{A}_3 的隶属度与非隶属度的绝对偏差相同, 然而 x 隶属于 \tilde{A}_1 的犹豫度大于 \tilde{A}_3 , 因而 \tilde{A}_1 的不确定性应大于 \tilde{A}_3 的不确定性. 利用熵公式 E_2 得到 $E_2(\tilde{A}_1) = E_2(\tilde{A}_3)$, 同样与实际不符.

例 2 表明, 式 (1) 在构造直觉模糊熵时更为全面地考虑了直觉模糊集中所蕴含的直觉性和模糊性信息, 既刻画了隶属度与非隶属度相等时犹豫度对直觉模糊熵的影响, 也反映了犹豫度相等时隶属度与非隶属度的绝对偏差所引起的直觉模糊熵变化趋势, 从而说明了式 (1) 的合理性和优越性.

3 广义幂均算子

在实际的决策环境中, 信息集结过程难以避免处理具有大偏差的输入数据, 此类数据对于信息集成结论具有较大影响, 一定程度上将影响最终的决策结论, 有时甚至会导致完全错误的决策结论. 为了尽可能地降低偏差较大数据对信息集结过程的影响, 本文定义如下广义幂均算子.

定义 5 设 (a_1, a_2, \dots, a_n) 为一组待集结的实数, 称

$$\text{GPA}_\lambda(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{\sum_{i=1}^n (1 + T(a_i))^\lambda a_i}{\sum_{i=1}^n (1 + T(a_i))^\lambda} = \sum_{i=1}^n \frac{(1 + T(a_i))^\lambda}{\sum_{i=1}^n (1 + T(a_i))^\lambda} a_i,$$

$$\lambda \in [0, +\infty)$$

为广义幂均算子. 其中: $T(a_i) = \sum_{j=1, j \neq i}^n \sup(a_i, a_j)$, $\sup(a_i, a_j)$ 表示 a_j 对 a_i 的支持度, 且满足定义 2 中的 3 个条件.

在定义 5 中, 广义幂均参数 λ 随着整体信息的变化而变化, 进而可以根据需求有效地控制偏离整体的待集结个体的权重大小. 特别地, 对于本文所定义的广义幂均算子, 当 $\lambda = 1$ 时, 广义幂均算子退化为幂均算子; 当 $\lambda = 0$ 时, 广义幂均算子退化为算术平均值, 即

$$\text{AM}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i.$$

显然, 广义幂均算子更具一般性. 容易证明, 广义幂均算子满足幂等性、有界性及置换不变性等优良性质, 在此略去详细证明过程.

性质 1 (幂等性) 设 (a_1, a_2, \dots, a_n) 为一组待集结的实数, 若对于任意 $i = 1, 2, \dots, n$, 均有 $a_i = a$, 则

$$\text{GPA}_\lambda(a_1, a_2, \dots, a_n) = \text{GPA}_\lambda(a, a, \dots, a) = a.$$

此时, 广义幂均算子便退化为算术平均值 $\text{AM}(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

性质 2 (有界性) 设 (a_1, a_2, \dots, a_n) 为一组待集结的实数, 则

$$\min_i \{a_i\} \leq \text{GPA}_\lambda(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq \max_i \{a_i\}.$$

性质 3 (置换不变性) 设 (a_1, a_2, \dots, a_n) 为一组待集结的实数, $(a'_1, a'_2, \dots, a'_n)$ 为其任意置换, 则

$$\text{GPA}_\lambda(a_1, a_2, \dots, a_n) = \text{GPA}_\lambda(a'_1, a'_2, \dots, a'_n).$$

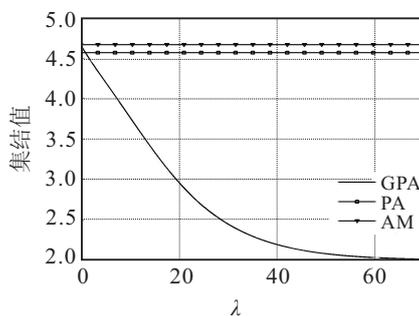
下面说明算术平均值 AM、幂均算子 PA 以及广义幂均算子 GPA_λ 在信息集成过程中的区别.

例 3 表 2 所示为 4 组待集结的数组, 以定理 1 中的 $\sup(a_i, a_j) = K e^{-\alpha(a_i - a_j)^2}$ 作为支持度函数, 并取定 $K = 0.5, \alpha = 1$, 则 4 种集结算子的集结值及相关元素的权重随广义幂均参数 λ 的变化如图 1 ~ 图 4 所示.

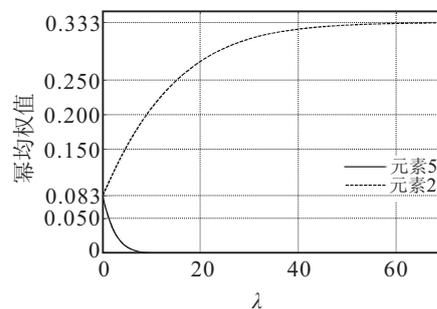
表 2 待集结数组

组数	元素
第 1 组	{1, 9, 9, 2, 4, 5, 2, 4, 1, 2, 8, 9}
第 2 组	{1, 9, 9, 9, 4, 5, 2, 4, 1, 2, 8, 9}
第 3 组	{1, 9, 9, 4, 4, 5, 4, 4, 1, 2, 8, 9}
第 4 组	{1, 2, 2, 2, 2, 5, 2, 2, 2, 2, 2, 2}

对于 4 组待集结数据中的元素“5”, 相对于各组数据中支持度最高的元素(其中第 1 组为元素“2”,

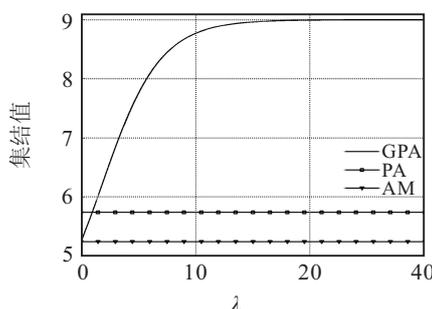


(a) 第 1 组数据的集结值随广义幂均参数 λ 变化情况

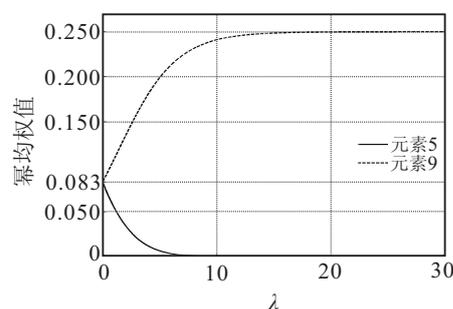


(b) 元素“5”和“2”的权重随广义幂均参数 λ 变化情况

图 1 第 1 组数据集结值及相关元素的权重随广义幂均参数 λ 变化情况

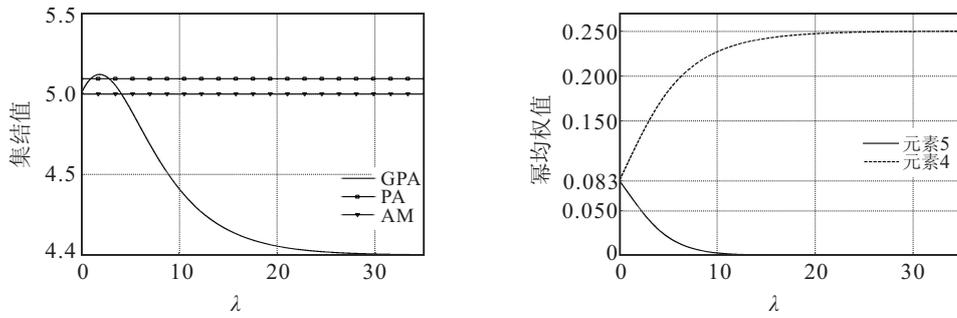


(a) 第 2 组数据的集结值随广义幂均参数 λ 变化情况



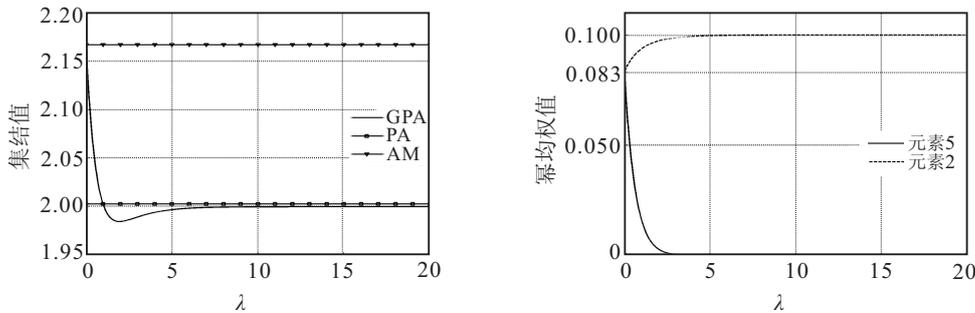
(b) 元素“5”和“9”的权重随广义幂均参数 λ 变化情况

图 2 第 2 组数据集结值及相关元素的权重随广义幂均参数 λ 变化情况



(a) 第3组数据的集结值随广义幂均参数λ变化情况 (b) 元素“5”和“4”的权重随广义幂均参数λ变化情况

图3 第3组数据集结值及相关元素的权重随广义幂均参数λ变化情况



(a) 第4组数据的集结值随广义幂均参数λ变化情况 (b) 元素“5”和“2”的权重随广义幂均参数λ变化情况

图4 第4组数据集结值及相关元素的权重随广义幂均参数λ变化情况

第2组为元素“9”，第3组为元素“4”，第4组为元素“2”，随着λ的增大，其偏离整体的程度越来越大，因而其权重越来越小，直至趋于零。相反地，支持度最高的元素的权重则会越来越大，直至趋于某一个小于或等于1的值。

由图1~图4可知，对于 GPA_λ 而言，尽管各待集结数组的集结值随着广义幂均参数λ的变化会产生巨大变化，但一个显著的特点是：当λ大于某一个大于零的常数后，各集结值均将趋近于相应待集结数组的其中一个元素的值，并在 $\lambda \rightarrow +\infty$ 时，等于该元素的值。下面对该特点进行说明。

命题1 设 (a_1, a_2, \dots, a_n) 为一组待集结的实数，对于广义幂均算子 $GPA_\lambda(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ，存在某个常数 k ，满足 $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ ，使得

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} GPA_\lambda(a_1, a_2, \dots, a_n) = a_k.$$

证明 由定义

$$GPA_\lambda(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{\sum_{i=1}^n (1 + T(a_i))^\lambda a_i}{\sum_{i=1}^n (1 + T(a_i))^\lambda} = \sum_{i=1}^n \frac{(1 + T(a_i))^\lambda}{\sum_{i=1}^n (1 + T(a_i))^\lambda} a_i,$$

$$\lambda \in [0, +\infty),$$

不失一般性，令

$$T(a_k) = \max\{T(a_i), i = 1, 2, \dots, n\},$$

其中 k 可能不唯一，则有

$$GPA_\lambda(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{(1 + T(a_i))^\lambda}{(1 + T(a_k))^\lambda} a_i}{\sum_{i=1}^n \frac{(1 + T(a_i))^\lambda}{(1 + T(a_k))^\lambda}} = \sum_{i=1}^n \frac{\left(\frac{1 + T(a_i)}{1 + T(a_k)}\right)^\lambda a_i}{\sum_{i=1}^n \left(\frac{1 + T(a_i)}{1 + T(a_k)}\right)^\lambda},$$

$$\lambda \in [0, +\infty).$$

由于 $0 < \frac{1 + T(a_i)}{1 + T(a_k)} \leq 1, i = 1, 2, \dots, n$ ，当且仅当 $i = k$ 时，等号成立。为此，当广义幂均参数 $\lambda \rightarrow +\infty$ 时，有：

1) 若 $i \neq k$ ，则

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 + T(a_i)}{1 + T(a_k)}\right)^\lambda = 0;$$

2) 若 $i = k$ ，则

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 + T(a_i)}{1 + T(a_k)}\right)^\lambda = 1.$$

进而， $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} GPA_\lambda(a_1, a_2, \dots, a_n) = a_k$ 成立。□

例3和命题1表明，广义幂均参数λ的合理选择，不仅可以有效地减小大偏差数据对广义幂均算子最终集结值的影响，还能获取更为合理的决策结论。

4 确定广义幂均算子中参数λ的熵权拟合法

以往研究通常直接假定参数λ取值由决策者予以确定，并未考虑参数不同取值下信息集结算子的有效性以及合理性分析，同时，也忽略了主观确定参数值对决策结论准确性的影响。因此，为尽可能地避免

主观确定参数取值对信息集结过程的不利影响,本文针对广义幂均算子中参数 λ 的确定提出如下熵权拟合法.

首先,利用熵权法求得各待集结元素的权重,记其为

$$W^0 = (\omega_1^0, \omega_2^0, \dots, \omega_n^0);$$

然后,利用广义幂均算子权重公式

$$\omega_j(\lambda) = \frac{(1+T(a_j))^\lambda}{\sum_{j=1}^n (1+T(a_j))^\lambda}, \lambda \in [0, +\infty),$$

计算待集结元素 $a_j(j=1, 2, \dots, n)$ 的广义幂均权重.

根据权重信息的一致性,利用模型

$$\lambda = \arg \min_{\lambda \in [0, +\infty)} \sum_{j=1}^n |\omega_j(\lambda) - \omega_j^0|,$$

求得广义幂均参数 λ .

上述确定广义幂均参数 λ 的方法称为熵权拟合法.事实上,利用熵权拟合法确定广义幂均参数 λ 较为有效.一方面,该方法充分利用待集结数据信息,从而确保了该方法的可行性;另一方面,该方法亦可视为对熵权法确定权重的一种改进,使得权重的确定过程更为合理.

5 广义直觉模糊幂均算子

实际决策环境中通常以直觉模糊数作为信息评估标度,因此本文将广义幂均算子推广至广义直觉模糊幂均(GIFPA)算子,以便于其应用.

定义6 设 (a_1, a_2, \dots, a_n) 为一组待集结的直觉模糊数,称

$$\begin{aligned} \text{GIFPA}_\lambda(a_1, a_2, \dots, a_n) &= \\ \frac{\sum_{i=1}^n (1+T(a_i))^\lambda a_i}{\sum_{i=1}^n (1+T(a_i))^\lambda} &= \sum_{i=1}^n \frac{(1+T(a_i))^\lambda}{\sum_{i=1}^n (1+T(a_i))^\lambda} a_i, \\ \lambda &\in [0, +\infty) \end{aligned}$$

为广义模糊幂均算子.其中: $T(a_i) = \sum_{j=1, j \neq i}^n \sup(a_i, a_j)$, $\sup(a_i, a_j)$ 表示直觉模糊数 a_j 对 a_i 的支持度,且满足以下条件:

- 1) $\sup(a_i, a_j) \in [0, 1]$;
- 2) $\sup(a_i, a_j) = \sup(a_j, a_i)$;
- 3) 如果 $d(a_i, a_j) < d(a_s, a_t)$,其中 $d(\cdot, \cdot)$ 为两直觉模糊数的距离测度,则 $\sup(a_i, a_j) > \sup(a_s, a_t)$.

文献[38]将直觉模糊数 a_j 对 $a_i(i, j=1, 2, \dots, n)$ 且 $i \neq j$ 的支持度定义为

$$\sup(a_i, a_j) = 1 - d(a_i, a_j),$$

其中 $d(a_i, a_j)$ 为直觉模糊数 a_i 与 a_j 的标准Hamming距离.本文利用该支持度公式测度待集结直觉模糊数间的相互支持程度.

定理3 设 (a_1, a_2, \dots, a_n) 为一组待集结的直觉模糊数,则由广义直觉模糊幂均算子集结后的值仍为直觉模糊数,且具有以下形式:

$$\begin{aligned} \text{GIFPA}_\lambda(a_1, a_2, \dots, a_n) &= \\ \left(1 - \prod_{i=1}^n (1 - \mu_{a_i})^{(1+T(a_i))^\lambda} / \sum_{i=1}^n (1+T(a_i))^\lambda, \right. \\ \left. \prod_{i=1}^n (\nu_{a_i})^{(1+T(a_i))^\lambda} / \sum_{i=1}^n (1+T(a_i))^\lambda \right), \lambda &\in [0, +\infty). \end{aligned}$$

利用数学归纳法即可证明定理3成立,在此略去详细过程.

与广义幂均算子类似,当 $\lambda=1$ 时,广义直觉模糊幂均算子退化为直觉模糊幂均算子;当 $\lambda=0$ 时,广义直觉模糊幂均算子退化为直觉模糊平均算子,即

$$\text{IFAM}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i.$$

广义直觉模糊幂均算子同样满足幂等性、有界性以及置换不变性,其具体描述及证明过程在此略去.

6 基于直觉模糊熵与广义直觉模糊幂均算子的MCGDM方法

在传统多准则群决策过程中,众多学者提出了针对决策者权重或准则的权重的确定方法,尤其以主观赋权法或主客观综合赋权法为主,鲜有由数据出发规避人为主观因素的权重确定方法,而幂均算子则有效地解决了这一问题.事实上,基于本文所提出的广义直觉模糊幂均算子的MCGDM方法优势显著,主要体现在以下3个方面:

1) 对于基于复杂系统的决策系统而言,当输入数据量较大时,利用本文方法依赖于客观真实信息的优势,可避免主观信息的干扰;

2) 对于输入信息存在大偏差数据的情形,无需采取剔除原始数据等措施,基于广义直觉模糊幂均算子可有效弱化大偏差数据对决策结论的影响;

3) 通过熵权拟合法可确定广义直觉模糊幂均算子的幂方参数,规避了依靠决策者确定主观确定参数所存在的任意性风险.

为此,本文着重考虑一类基于IFN信息关联输入的MCGDM问题,并综合运用本文所提出的直觉模糊熵及广义直觉模糊幂均算子等概念,用以处理该问题,

考虑决策者及准则之间均存在交互关联关系且权重信息完全未知的MCGDM问题,设 $M = \{1, 2, \dots, m\}$ 、 $N = \{1, 2, \dots, n\}$ 和 $S = \{1, 2, \dots, s\}$ 分别代

表相应于 m 个备选方案、 n 个准则和 s 位决策者下标集合. 记决策群组集合为 $DM = \{DM_1, DM_2, \dots, DM_s\}$, 其中 DM_k 表示第 k 个决策者, $k \in S$. 假定待评估方案集合为 $A = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$, 其中 A_i 代表第 i 个备选方案, $i \in M$; 待评估的准则集合为 $C = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$, 其中 C_j 代表第 j 个准则, $j \in N$. 假定准则类型均为效益型, 否则对非效益型准则值进行规范化处理即可. 决策者 $DM_k (k \in S)$ 以直觉模糊数 $x_{ij}^k = (\mu_{ij}^k, \nu_{ij}^k)$ 刻画方案 $A_i (i \in M)$ 在属性 $C_j (j \in N)$ 下的评估值, 则可以构建直觉模糊决策矩阵 $\mathbf{X}^k = [x_{ij}^k]_{m \times n}, k \in S$, 要求确定最优方案. 运用本文基于直觉模糊熵及广义直觉模糊幂均算子的 MCGDM 方法的具体决策步骤如下.

Step 1: 决策者以 IFNs 表征对各方案不同准则的评估信息, 由此可以确定 s 个直觉模糊决策矩阵

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^1 &= [x_{ij}^1]_{m \times n}, \\ \mathbf{X}^2 &= [x_{ij}^2]_{m \times n}, \\ &\vdots \\ \mathbf{X}^s &= [x_{ij}^s]_{m \times n}. \end{aligned}$$

其中: $x_{ij}^k = (\mu_{ij}^k, \nu_{ij}^k), i \in M, j \in N, k \in S$.

Step 2: 直觉模糊熵是度量直觉模糊集不确定性程度的有效工具, 利用式(1)计算相应于各直觉模糊决策矩阵各直觉模糊评估值的直觉模糊熵, 即可确定 s 个直觉模糊熵决策矩阵

$$\begin{aligned} \mathbf{EX}^1 &= [E(x_{ij}^1)]_{m \times n}, \\ \mathbf{EX}^2 &= [E(x_{ij}^2)]_{m \times n}, \\ &\vdots \\ \mathbf{EX}^s &= [E(x_{ij}^s)]_{m \times n}. \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} E(x_{ij}^k) &= \\ &(1 - |\mu_{\bar{A}}(x_{ij}^k) - \nu_{\bar{A}}(x_{ij}^k)|)[1 + \pi_{\bar{A}}(x_{ij}^k) \ln(1 + \\ &|\mu_{\bar{A}}(x_{ij}^k) - \nu_{\bar{A}}(x_{ij}^k)|)], i \in M, j \in N, k \in S. \end{aligned}$$

Step 3: 考虑决策者 $DM_k (k \in S)$, 相应于各准则 $C_j (j \in N)$ 的均熵为

$$SEX_j^k = \sum_{i=1}^m \frac{E(x_{ij}^k)}{m}, j \in N, k \in S,$$

利用式

$$\bar{\omega}_j^k = \frac{1 - SEX_j^k}{\sum_{j=1}^n (1 - SEX_j^k)}, j \in N, k \in S, \quad (4)$$

可计算相应于决策者 $DM_k (k \in S)$ 下准则 $C_j (j \in N)$ 的熵权重. 进而, 利用广义直觉模糊幂均算子计算直觉模糊决策矩阵 $\mathbf{X}^k (k \in S)$ 中准则 $C_j (j \in N)$ 的权重

$$\omega_j^k(\lambda_k) = \frac{(1 + T(SEX_j^k))^{\lambda_k}}{\sum_{j=1}^n (1 + T(SEX_j^k))^{\lambda_k}},$$

$$\lambda_k \in [0, +\infty), k \in S, j \in N. \quad (5)$$

广义幂均参数 $\lambda_k (k \in S)$ 可由如下模型获得:

$$\begin{aligned} \min \sum_{j=1}^n |\omega_j^k(\lambda_k) - \bar{\omega}_j^k|; \\ \text{s.t. } \lambda_k \in [0, +\infty), k \in S. \end{aligned} \quad (6)$$

Step 4: 根据信息一致性原理, 利用广义直觉模糊幂均算子对各决策者的评估信息予以集结. 其中

$$\begin{aligned} X_{ik} = \text{GIFPA}_{\lambda_k}(x_{i1}^k, x_{i2}^k, \dots, x_{in}^k) = \\ \frac{\sum_{j=1}^n (1 + T(x_{ij}^k))^{\lambda_k} x_{ij}^k}{\sum_{j=1}^n (1 + T(x_{ij}^k))^{\lambda_k}}, k \in S, i \in M \end{aligned}$$

为相应于决策者 $DM_k (k \in S)$ 对备选方案 $A_i (i \in M)$ 的评估值. 进而, 得到群体直觉模糊决策矩阵 $\mathbf{X} = [X_{ik}]_{m \times s}$.

Step 5: 重复 Step 2, 利用式(1)计算群体直觉模糊决策矩阵各元素的直觉模糊熵, 并构造群体直觉模糊熵矩阵 $\text{CEX} = [E(X_{ik})]_{m \times s}$.

Step 6: 在群体直觉模糊决策矩阵 CEX 中, 对于决策者 $DM_k (k \in S)$ 而言, 相应于各方案的群体均熵为

$$\text{SCEX}_k = \sum_{i=1}^m \frac{E(X_{ik})}{m}, k \in S,$$

利用式

$$\bar{\omega}_k = \frac{1 - \text{SCEX}_k}{\sum_{k=1}^s (1 - \text{SCEX}_k)}, k \in S, \quad (7)$$

可计算决策者 $DM_k (k \in S)$ 的群体熵权重. 进而, 利用广义直觉模糊幂均算子计算群体直觉模糊决策矩阵 CEX 中相应于决策者 $DM_k (k \in S)$ 的权重

$$\begin{aligned} \omega_k(\lambda) = \frac{(1 + T(\text{SCEX}_k))^{\lambda}}{\sum_{k=1}^s (1 + T(\text{SCEX}_k))^{\lambda}}, \\ \lambda \in [0, +\infty), k \in S, \end{aligned} \quad (8)$$

广义幂均参数 λ 可由如下模型获得:

$$\begin{aligned} \min \sum_{k=1}^s |\omega_k(\lambda) - \bar{\omega}_k|; \\ \text{s.t. } \lambda \in [0, +\infty). \end{aligned} \quad (9)$$

Step 7: 根据信息一致性原理, 利用广义直觉模糊幂均算子集结群体评估信息, 则

$$X_i = \text{GIFPA}_{\lambda}(X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{is}) =$$

$$\frac{\sum_{k=1}^s (1 + T(X_{ik}))^\lambda X_{ik}}{\sum_{k=1}^s (1 + T(X_{ik}))^\lambda}, i \in M$$

为相应于备选方案 $A_i (i \in M)$ 的群体评估值。

Step 8: 分别计算各方案下群体评估值 $X_i (i \in M)$ 的记分函数值和精确函数值, 即可对方案进行排序。

需要指出的是, 在本文决策方法的实现过程中, 运用熵权拟合法确定相应于决策者 $DM_k (k \in S)$ 的广义幂均参数 $\lambda_k (k \in S)$ 以及群体直觉模糊决策矩阵的集结过程中广义幂均参数 λ , 可有效地弱化决策者之间的差异化信息。

7 案例分析

自 2008 年 10 月第 1 部 Android 手机发布以来, 基于 Android 开源系统的智能手机便迅速成为中国智能手机市场的领军“人物”。IDC 报告显示, 截止 2013 年第 2 季度, Android 占据了在中国智能手机操作系统市场的 79.3%。除三星、索尼、摩托罗拉等国外品牌以外, 小米、魅族、联想、中兴、华为等一系列优秀的国产品牌

也卷入了这场没有硝烟的智能手机普及战役中。为了抢占市场, 各企业争先恐后地推出高性能的旗舰机和高性价比的低、中端机。虽然旗舰机拥有极好的硬件配置, 但由于其价格昂贵, 其销售量往往较低、中端机少。为此, 拥有高性价比的低、中端机是各企业占领市场的砺刃。某购物网站欲对 4 款即将上市的同价位位的性价比高低不一的 Android 智能手机 (记为 $A_i (i = 1, 2, 3, 4)$) 展开评测, 进而探索消费者的潜在购买意向。假定纳入考虑范围的评测准则分别为系统流畅度 (C_1)、UI 设计 (指对手机的人机交互、操作逻辑、界面美观的整体设计) (C_2)、功能多样性 (C_3) 以及硬件配置 (C_4) 4 个方面。网站邀请 4 位具备资深经验的评测专家 $DM_k (k = 1, 2, 3, 4)$ 参与此次评测活动, 各专家利用直觉模糊数给出关于各智能手机的各项评测准则的评估值。应用本文所提出的决策方法的具体步骤如下。

Step 1: 确定相应于各专家 $DM_k (k = 1, 2, 3, 4)$ 的直觉模糊决策矩阵 $\mathbf{X}^1, \mathbf{X}^2, \mathbf{X}^3, \mathbf{X}^4$, 分别如表 3~表 6 所示。

表 3 专家 DM_1 提供的评估决策矩阵 \mathbf{X}^1

待评测手机	评测准则			
	C_1	C_2	C_3	C_4
A_1	(0.662, 0.141)	(0.442, 0.132)	(0.256, 0.456)	(0.582, 0.226)
A_2	(0.670, 0.234)	(0.318, 0.281)	(0.340, 0.539)	(0.479, 0.330)
A_3	(0.545, 0.295)	(0.544, 0.329)	(0.522, 0.475)	(0.219, 0.583)
A_4	(0.510, 0.357)	(0.405, 0.267)	(0.366, 0.484)	(0.628, 0.287)

表 4 专家 DM_2 提供的评估决策矩阵 \mathbf{X}^2

待评测手机	评测准则			
	C_1	C_2	C_3	C_4
A_1	(0.533, 0.365)	(0.192, 0.612)	(0.696, 0.129)	(0.525, 0.252)
A_2	(0.461, 0.367)	(0.493, 0.408)	(0.441, 0.135)	(0.348, 0.598)
A_3	(0.586, 0.409)	(0.144, 0.722)	(0.243, 0.335)	(0.688, 0.112)
A_4	(0.736, 0.104)	(0.683, 0.223)	(0.442, 0.311)	(0.331, 0.584)

表 5 专家 DM_3 提供的评估决策矩阵 \mathbf{X}^3

待评测手机	评测准则			
	C_1	C_2	C_3	C_4
A_1	(0.570, 0.344)	(0.622, 0.177)	(0.688, 0.244)	(0.769, 0.192)
A_2	(0.809, 0.144)	(0.477, 0.135)	(0.790, 0.199)	(0.328, 0.451)
A_3	(0.439, 0.468)	(0.769, 0.139)	(0.862, 0.137)	(0.514, 0.430)
A_4	(0.588, 0.264)	(0.500, 0.426)	(0.549, 0.207)	(0.390, 0.167)

表 6 专家 DM_4 提供的评估决策矩阵 \mathbf{X}^4

待评测手机	评测准则			
	C_1	C_2	C_3	C_4
A_1	(0.891, 0.105)	(0.547, 0.363)	(0.149, 0.219)	(0.641, 0.340)
A_2	(0.814, 0.145)	(0.429, 0.525)	(0.197, 0.602)	(0.616, 0.182)
A_3	(0.352, 0.538)	(0.585, 0.228)	(0.517, 0.324)	(0.757, 0.183)
A_4	(0.380, 0.352)	(0.476, 0.450)	(0.531, 0.365)	(0.434, 0.509)

Step 2: 依据本文定义 9 中直觉模糊熵计算公式, 确定相应于各评测专家的直觉模糊熵决策矩阵

$$\begin{aligned}
 EX^1 &= \begin{bmatrix} 0.5186 & 0.7694 & 0.8420 & 0.6817 \\ 0.5836 & 0.9770 & 0.8186 & 0.8759 \\ 0.7768 & 0.8044 & 0.9531 & 0.6751 \\ 0.8630 & 0.8985 & 0.8968 & 0.6754 \end{bmatrix}, \\
 EX^2 &= \begin{bmatrix} 0.8452 & 0.6199 & 0.4670 & 0.7661 \\ 0.9200 & 0.9224 & 0.7726 & 0.7590 \\ 0.8237 & 0.4478 & 0.9417 & 0.4626 \\ 0.3968 & 0.5592 & 0.8954 & 0.7613 \end{bmatrix}, \\
 EX^3 &= \begin{bmatrix} 0.7876 & 0.5961 & 0.5699 & 0.4305 \\ 0.3430 & 0.7331 & 0.4111 & 0.8995 \\ 0.9736 & 0.3866 & 0.2751 & 0.9201 \\ 0.7041 & 0.9309 & 0.7052 & 0.8463 \end{bmatrix}, \\
 EX^4 &= \begin{bmatrix} 0.2145 & 0.8284 & 0.9698 & 0.7025 \\ 0.3380 & 0.9078 & 0.6357 & 0.6072 \\ 0.8293 & 0.6797 & 0.8296 & 0.4376 \\ 0.9792 & 0.9759 & 0.8473 & 0.9288 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Step 3: 计算相应于各专家 $DM_k (k = 1, 2, 3, 4)$ 的各准则的均熵 SEX_j^k , 如表 7 所示.

表 7 相应于各专家 $DM_k (k = 1, 2, 3, 4)$ 各准则的均熵 SEX_j^k

待评测手机	评测准则			
	C_1	C_2	C_3	C_4
DM_1	0.685 5	0.862 3	0.877 6	0.727 0
DM_2	0.746 4	0.637 3	0.769 2	0.687 3
DM_3	0.702 1	0.661 7	0.490 3	0.774 1
DM_4	0.590 2	0.847 9	0.820 6	0.669 0

利用式 (4) 计算相应于各专家的各准则的熵权重, 分别为

$$\begin{aligned}
 \bar{\omega}^1 &= (0.3711, 0.1624, 0.1444, 0.3221), \\
 \bar{\omega}^2 &= (0.2186, 0.3127, 0.1991, 0.2696), \\
 \bar{\omega}^3 &= (0.2172, 0.2466, 0.3715, 0.1647), \\
 \bar{\omega}^4 &= (0.3822, 0.1418, 0.1673, 0.3087).
 \end{aligned}$$

利用式 (5) 和 (6) 求得相应于各专家 DM_k 的直觉模糊决策矩阵序列 $X^k = [x_{ij}^k]_{m \times n}$ 的广义幂均参数分别为 $\lambda_1 = 110.0444, \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 5.9907 \times 10^{-5}$.

Step 4: 根据信息一致性原理, 利用广义直觉幂均算子集结各直觉模糊矩阵中各方案下不同准则的评估值, 即可构建群体直觉模糊决策矩阵 X , 如表 8 所示.

表 8 群体直觉模糊决策矩阵 X

待评测手机	评测专家			
	DM_1	DM_2	DM_3	DM_4
A_1	(0.466 4, 0.177 5)	(0.483 1, 0.291 9)	(0.329 0, 0.231 1)	(0.350 5, 0.230 8)
A_2	(0.570 4, 0.314 6)	(0.561 8, 0.331 6)	(0.344 6, 0.204 4)	(0.425 4, 0.302 2)
A_3	(0.465 1, 0.378 8)	(0.537 9, 0.324 4)	(0.305 3, 0.248 8)	(0.421 5, 0.292 0)
A_4	(0.477 9, 0.322 0)	(0.579 6, 0.254 8)	(0.512 1, 0.249 7)	(0.458 1, 0.414 2)

Step 5: 计算群体直觉模糊决策矩阵 X 中各元素的直觉模糊熵, 可得

$$CEX = \begin{bmatrix} 0.6855 & 0.8623 & 0.8776 & 0.7270 \\ 0.7464 & 0.6373 & 0.7692 & 0.6873 \\ 0.7021 & 0.6617 & 0.4903 & 0.7741 \\ 0.5902 & 0.8479 & 0.8206 & 0.6690 \end{bmatrix}.$$

Step 6: 结合式 (7), 计算各评测准则的群体熵权重为

$$\bar{\omega} = (0.2457, 0.2401, 0.2527, 0.2615),$$

进而利用式 (8) 和 (9) 计算得到广义幂均参数

$$\lambda = 4.5085 \times 10^{-5}.$$

Step 7: 利用广义直觉幂均算子集结群体直觉模糊决策矩阵中不同专家针对各待评测手机的群体评估值, 可得到相应于各方案的综合评估值, 即为向量

$$\begin{aligned}
 &((0.4112, 0.2293), (0.4840, 0.2833), \\
 &(0.4386, 0.3074), (0.5092, 0.3035))^T.
 \end{aligned}$$

Step 8: 分别计算各待评测手机综合评估值的记分函数和精确函数, 可得

$$\begin{aligned}
 A_1 : s(A_1) &= 0.1819, h(A_1) = 0.6405; \\
 A_2 : s(A_2) &= 0.2007, h(A_2) = 0.7673; \\
 A_3 : s(A_3) &= 0.1312, h(A_3) = 0.7460; \\
 A_4 : s(A_4) &= 0.2057, h(A_4) = 0.8127.
 \end{aligned}$$

依据定义 5, 可得各待测评手机的排序为

$$A_4 \succ A_2 \succ A_1 \succ A_3.$$

决策结论表明, 待评测手机 A_4 拥有最高性价比, 因此可推荐消费者购买. 事实上, 本文所提出的决策方法针对大型复杂系统的应用将有更为优越的表现, 案例分析为其进一步的拓展应用提供了基础. 分析该决策方法的理论与应用实践, 相较传统方法主要具有以下几方面的优势:

1) 充分利用决策者所提供的评估信息, 无论是决策者及准则权重的确定过程还是广义幂均算子参数

的确定过程,均最大程度地避免了信息的再次提供或人为因素的干扰;

2) 利用广义幂均算子集结评估值的过程,通过评估信息之间的相互支持程度有效揭示了决策者及准则之间的相互关联作用,避免了未将该关联关系引入信息集成过程而导致的决策结论偏差;

3) 提供了一种广义幂均算子中确定幂方参数的方法,便于决策方法实施者依据实际信息集结过程中所反馈的主要影响因素作出合适的选择.

此外,案例分析中相应于各待评测手机的记分函数数值差异性相对较大,便于排序和优选.

8 结 论

本文旨在建立基于复杂系统的决策体系,因而研究了以ITFN表征决策者所提供的评估信息的关联MCGDM方法.由于现有直觉模糊熵公理化定义往往没有考虑由式(1)直觉模糊集隶属度与非隶属度的绝对偏差一定时犹豫度变化或式(2)犹豫度一定时隶属度与非隶属度的绝对偏差变化两类情形而引起的直觉模糊熵变化,因而提出改进直觉模糊熵的公理化定义,并构造一类新的直觉模糊熵计算公式.同时,考虑信息集结过程中大偏差数据对信息集结过程存在的影响,为避免此类数据的出现造成对最终决策结论的影响,本文定义了广义幂均算子,验证其相关性质,给出确定参数的一种方法,并将其推广至广义直觉模糊幂均算子.特别地,参数确定过程充分利用既有的数据信息而非由决策者任意给出,避免了信息的再次提供以及人为因素的干扰.在以IFN为信息输入的复杂系统框架内,本文提出了基于直觉模糊熵与广义直觉模糊幂均算子的关联MCGDM方法,为解决决策者及准则之间均存在交互关联关系且权重信息完全未知的MCGDM问题提供了一类新的思路.在后续研究中,将重点关注本文所述决策方法与证据理论、前景理论、不确定理论等多学科融合而构建的新型复杂决策体系,并探讨将其运用于故障诊断、控制器设计、模式识别以及图像处理等各个领域,以分析其合理性和可行性.

参考文献(References)

- [1] Keeney L R. Foundations for group decision analysis[J]. *Decision Analysis*, 2013, 10(2): 103-120.
- [2] Lahdelma R, Salminen P. SMAA-2: Stochastic multicriteria acceptability analysis for group decision making[J]. *Operations Research*, 2001, 49(3): 444-454.
- [3] Zhang L, Li T, Xu X. Consensus model for multiple criteria group decision making under intuitionistic fuzzy environment[J]. *Knowledge-Based Systems*, 2014, 57: 127-135.
- [4] Herrera F, Herrera-Viedma E. A model of consensus in group decision making under linguistic assessments[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1996, 78(1): 73-87.
- [5] Herrera F, Herrera-Viedma E, Verdegay J L. Direct approach processes in group decision making using linguistic OWA operators[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1996, 79(2): 175-190.
- [6] Liu P, Yu X. 2-Dimension uncertain linguistic power generalized weighted aggregation operator and its application in multiple attribute group decision making[J]. *Knowledge-Based Systems*, 2014, 57: 69-80.
- [7] Perez I J, Cabrerizo F J, Alonso S, et al. A new consensus model for group decision making problems with non-homogeneous experts[J]. *IEEE Trans on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2014, 44(4): 494-498.
- [8] Dong Y, Zhang G, Hong W C, et al. Consensus models for AHP group decision making under row geometric mean prioritization method[J]. *Decision Support Systems*, 2010, 49(3): 281-289.
- [9] Xu Z. Induced uncertain linguistic OWA operators applied to group decision making[J]. *Information Fusion*, 2006, 7(2): 231-238.
- [10] Fan Z P, Liu Y, Feng B. A method for stochastic decision making based on pairwise comparisons of alternatives with random evaluations[J]. *European J of Operational Research*, 2010, 207(2): 906-915.
- [11] Fan Z P, Zhang X, Liu Y. A method for stochastic multiple attribute decision making based on concepts of ideal and anti-ideal points[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2013, 219(24): 11438-11450.
- [12] Fan Z P, Feng B. A multiple attributes decision making method using individual and collaborative attribute data in a fuzzy environment[J]. *Information Sciences*, 2009, 179(20): 3603-3618.
- [13] Wu Z, Xu J. A consistency and consensus based decision support model for group decision making with multiplicative preference relations[J]. *Decision Support Systems*, 2012, 52(3): 757-767.
- [14] Yue Z. A method for group decision-making based on determining weights of decision makers using TOPSIS[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2011, 35(4): 1926-1936.
- [15] Yue Z. Deriving decision maker's weights based on distance measure for interval-valued intuitionistic fuzzy group decision making[J]. *Expert Systems with Applications*, 2011, 38(9): 11665-11670.

- [16] Zadeh L A. Probability measures of fuzzy events[J]. *J of Mathematical Analysis and Applications*, 1968, 23(2): 421-427.
- [17] Burillo P, Bustince H. Entropy on intuitionistic fuzzy sets and on interval-valued fuzzy sets[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1996, 78(3): 305-316.
- [18] De Luca A, Termini S. A definition of a nonprobabilistic entropy in the setting of fuzzy sets theory[J]. *Information and Control*, 1972, 20(4): 301-312.
- [19] 魏翠萍, 梁霞, 张玉忠. 直觉模糊集的熵公式比较与改进[J]. *系统科学与数学*, 2012, 32(11): 1437-1448.
(Wei C P, Liang X, Zhang Y Z. A comparative analysis and improvement of entropy measure for intuitionistic fuzzy sets[J]. *J of Systems Science and Mathematical Sciences*, 2012, 32(11): 1437-1448.)
- [20] Vlachos I K, Sergiadis G D. The role of entropy in intuitionistic fuzzy contrast enhancement[C]. *Foundations of Fuzzy Logic and Soft Computing*. Berlin: Springer, 2007: 104-113.
- [21] Szmjdt E, Kacprzyk J. Entropy for intuitionistic fuzzy sets[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2001, 118(3): 467-477.
- [22] Xia M, Xu Z. Entropy/cross entropy-based group decision making under intuitionistic fuzzy environment[J]. *Information Fusion*, 2012, 13(1): 31-47.
- [23] Hung W L, Yang M S. Fuzzy entropy on intuitionistic fuzzy sets[J]. *Int J of Intelligent Systems*, 2006, 21(4): 443-451.
- [24] Mao J, Yao D, Wang C. A novel cross-entropy and entropy measures of IFSs and their applications[J]. *Knowledge-Based Systems*, 2013, 48: 37-45.
- [25] Yager R R. The power average operator[J]. *IEEE Trans on Systems, Man and Cybernetics, Part A: Systems and Humans*, 2001, 31(6): 724-731.
- [26] 万树平. 基于幂均算子的区间型多属性决策方法[J]. *控制与决策*, 2009, 24(11): 1673-1676.
(Wan S P. Method based on power average operator for interval multi-attribute decision-making[J]. *Control and Decision*, 2009, 24(11): 1673-1676.)
- [27] Xu Z, Yager R R. Power-geometric operators and their use in group decision making[J]. *IEEE Trans on Fuzzy Systems*, 2010, 18(1): 94-105.
- [28] Xu Z. Approaches to multiple attribute group decision making based on intuitionistic fuzzy power aggregation operators[J]. *Knowledge-Based Systems*, 2011, 24(6): 749-760.
- [29] Zhou L, Chen H, Liu J. Generalized power aggregation operators and their applications in group decision making[J]. *Computers & Industrial Engineering*, 2012, 62(4): 989-999.
- [30] Zhang Z. Hesitant fuzzy power aggregation operators and their application to multiple attribute group decision making[J]. *Information Sciences*, 2013, 234: 150-181.
- [31] Atanassov K. Intuitionistic fuzzy sets[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1986, 20(1): 87-96.
- [32] Xu Z S, Yager R R. Some geometric aggregation operators based on intuitionistic fuzzy sets[J]. *Int J of General Systems*, 2006, 35(4): 417-433.
- [33] Xu Z S. Intuitionistic fuzzy aggregation operators[J]. *IEEE Trans on Fuzzy Systems*, 2007, 15(6): 1179-1187.
- [34] Chen S M, Tan J M. Handling multicriteria fuzzy decision-making problems based on vague set theory[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1996, 67(2): 221-236.
- [35] Hong D H, Choi C H. Multicriteria fuzzy decision making problems based on vague set theory[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2000, 114(1): 103-113.
- [36] Xu Z S. Models for multiple attribute decision making with intuitionistic fuzzy information[J]. *Int J of Uncertainty Fuzziness and Knowledge Based Systems*, 2007, 15(3): 285-297.
- [37] 魏翠萍, 高志海, 郭婷婷. 一个基于三角函数的直觉模糊熵公式[J]. *控制与决策*, 2012, 27(4): 571-574.
(Wei C P, Gao Z H, Guo T T. An intuitionistic fuzzy entropy measure based on trigonometric function[J]. *Control and Decision*, 2012, 27(4): 571-574.)
- [38] Zhiming Zhang. Generalized Atanassov's intuitionistic fuzzy power geometric operators and their application to multiple attribute group decision making[J]. *Information Fusion*, 2013, 14(4): 460-486.

(责任编辑: 曹洪武)