

基于区间梯形二型犹豫模糊数的多准则决策方法

胡军华, 蓝霞, 陈鹏

(中南大学 商学院, 长沙 410083)

摘要: 针对准则权重不完全的犹豫模糊多准则决策问题, 提出基于区间梯形二型犹豫模糊数的决策方法. 首先, 给出区间梯形二型犹豫模糊数, 根据几何面积法定义区间梯形二型犹豫模糊数的可能度和差异度; 然后, 利用差异度和离差最大化模型得到各准则权重, 基于 TOPSIS 思想得到各方案的综合贴近度, 并对方案进行排序; 最后, 通过算例分析和对比分析验证了所提出方法的可行性和有效性.

关键词: 犹豫模糊数; 区间梯形二型模糊数; 可能度; 差异度; 多准则决策

中图分类号: C931

文献标志码: A

Multi-criteria decision making method based on trapezoidal interval type-2 hesitant fuzzy number

HU Jun-hua, LAN Xia, CHEN Peng

(School of Business, Central South University, Changsha 410083, China. Correspondent: HU Jun-hua, E-mail: hujunhua@csu.edu.cn)

Abstract: In view of hesitant fuzzy linguistic multi-criteria decision making problems in which the criteria weights are partially unknown, a hesitant fuzzy linguistic multi-criteria decision making method is proposed. Firstly, the trapezoidal interval type-2 hesitant fuzzy number is proposed. Then, the weights of the criteria are determined by the model of maximizing on the basis of the difference degree. Moreover, the weighted similarity degree of every alternative with ideal points is displayed to rank all the alternatives. Finally, an example is given to illustrate the effectiveness of the proposed method.

Keywords: hesitant fuzzy number; trapezoidal interval type-2 hesitant fuzzy number; degree of possibility; difference degree; multi-criteria decision making

0 引言

在人类对客观世界的认识和改造过程中, 决策活动必然贯穿始终, 决策指的是具有决断能力的主体在不确定的复杂情境下, 对目标与方案的搜索、判断、评价直至最后选择的全过程. 决策活动具有不确定性, 这是由于人类思维的无限扩展性、人类认知的有限性、环境的复杂性和不确定性等一系列因素所导致的. Zadeh^[1]提出的模糊集理论在一定程度上解决了不确定性问题, 学者们也将其进行了拓展, 包括直觉模糊集^[2]、区间直觉模糊集^[3]、犹豫模糊集^[4]等.

语言值评价信息可以更准确地描述事物的客观状态, 比较符合人们的真实思维方式, 因此日益受到专家们的青睐. 目前, 关于语言评价值的处理方

法主要有以下3种: 利用语言下标直接处理语言信息^[5-8]、将语言转化为二元语义处理^[9-10]、将语言信息转化为模糊数来计算^[11-16]. 随着模糊集理论的不断发展完善, 第3种转化方法更受到决策者的关注. 例如: Delgado等^[11]针对决策信息是语言值的情形, 基于模糊风险区间数构造了一般的决策模型; 在此基础上, Delgado等^[12]基于模糊风险区间数提出了不确定条件下的语言决策模型; Herrera等^[13]利用模糊集理论处理基于不确定语言偏好的群决策问题; 徐泽水^[14]研究了方案的属性评估信息以模糊语言形式给出的多属性群决策问题, 定义了一种模糊语言评估标度并给出其相应的三角模糊数表达方式; Herrera等^[15]针对多粒度语言决策问题, 通过构建将语言评价值转化为

收稿日期: 2014-02-21; 修回日期: 2014-09-15.

基金项目: 国家自然科学基金项目(71371196); 国家创新研究群体科学基金项目(71221061); 教育部人文社会科学研究规划基金项目(11YJA630031).

作者简介: 胡军华(1967—), 男, 教授, 博士, 从事决策理论与方法等研究; 蓝霞(1991—), 女, 硕士生, 从事决策理论与方法的研究.

三角模糊数的转化函数,将语言评价集从多粒度转化为同一粒度,其缺陷为语言评价集转化方向只能由低向高;Liu等^[16]将不确定语言转化为一个梯形模糊数,并基于前景理论提出了不确定风险情况下的多准则决策方法.

以上语言值处理方式基本上都是将语言值转化为三角模糊数和梯形模糊数,其运算相对简单,但也会丢失一些信息.同时,在实际决策中,传统一型模糊数并不能很好地描述语言值评价信息的不确定性.二型模糊数^[17]很好地解决了此问题,它通过主隶属度和次隶属度共同描述不确定性.区间二型模糊数是次隶属度值均等于1的一种特殊二型模糊数,其计算过程比一般二型模糊数简单,描述不确定性的效果比一型模糊数好.目前,已有学者研究区间二型模糊数与语言值评价信息之间的转化^[18-20],但是成果不多,需要进行深入研究.

同时,随着犹豫模糊数的不断发展,犹豫模糊语言逐渐凸显其优势.有关犹豫模糊集的研究成果已有不少,主要集中在理论性质、集结算子、模糊测度和在多准则决策领域的应用等方面^[21-24].例如,一个专家决策小组被邀请评价某个属性的优劣程度,从语言评价集{极差,非常差,差,一般,好,非常好,极好}选择评价结果,专家的结论分为3种情况,一部分给出{非常差},一部分给出{一般},另一部分是{好},且彼此不能说服对方,则该方案满足某一属性的程度值可以表示为犹豫模糊语言集{非常差,一般,好},显然这比语言区间[非常差,好]更能客观地反映实际情况.针对犹豫模糊语言的处理方法并不多,Rosa等^[25-26]首先提出了犹豫模糊语言集、产生犹豫模糊语言的Context-free grammar方法和相应转化函数,并采用Max-lower和Min-upper算子集结评价信息;在此基础上,Li等^[27]提出了0-截集概念,将犹豫模糊语言转化为区间模糊语言,再利用区间模糊语言的可能度获得最终决策结果;Rosa等^[28]将犹豫模糊语言扩展到群决策环境中,并提出了相应的决策方法.上述文献对犹豫模糊语言评价信息的处理均采用极值等方法,计算过于简单且容易丢失部分信息.

为了解决上述问题,本文在处理模糊语言时,首先采用第3种转化成模糊数的方法,将犹豫模糊语言转化为区间梯形二型犹豫模糊集,并用几何图形完整地刻画模糊数,基于几何面积法提出区间梯形二型犹豫模糊数的可能度和差异度,利用算例对可能度和差异度进行可行性分析;然后在差异度的基础上,构建离差最大化模型并求得各准则值权重;最后利用TOPSIS思想,综合考虑方案与理想解和负理想解的

距离,得到各方案的排序,并通过算例验证所提出方法的可行性和有效性.

1 犹豫模糊集及区间梯形二型犹豫模糊数

定义1^[4] 设 X 为一给定的集合,犹豫模糊集是从 X 到 $[0,1]$ 的一个子集的映射,可以用数学符号表示为

$$E = \{ \langle x, h(x) \rangle | x \in X \},$$

其中 $h(x)$ 为 $[0,1]$ 中几个可能的模糊数的集合,表示属于集合的可能的程度,为简单起见,可看作一个犹豫模糊数.

定义2^[17] 二型模糊集表示形式为

$$\tilde{A} = \{ \langle (x, u), u_{\tilde{A}}(x, u) \rangle | \forall x \in X, \forall u \in J_x \subseteq [0, 1], 0 \leq u_{\tilde{A}}(x, u) \leq 1 \}.$$

其中: X 为 \tilde{A} 的论域, $u_{\tilde{A}}$ 为 \tilde{A} 的二型隶属函数, $J_x \subseteq [0, 1]$. \tilde{A} 还可以表示为

$$\tilde{A} = \int_{x \in X} \int_{u \in J_x} u_{\tilde{A}}(x, u) / (x, u) du dx,$$

其中 $J_x \subseteq [0, 1]$.

定义3^[17] \tilde{A} 为集合 X 上的一个二型模糊集,若对于任意 $x \in X, u_{\tilde{A}}(x, u) = 1$,则称 \tilde{A} 为区间二型模糊集,即

$$\tilde{A} = \int_{x \in X} \int_{u \in J_x} 1 / (x, u) du dx,$$

其中 $J_x \subseteq [0, 1]$.

定义4^[29] 若区间二型模糊数的上下界隶属函数均为梯形模糊数时,则称其为区间梯形二型模糊数,即

$$A = (A^U, A^L) = ((a_1^U, a_2^U, a_3^U, a_4^U; H_1(A^U), H_2(A^U)), (a_1^L, a_2^L, a_3^L, a_4^L; H_1(A^L), H_2(A^L))),$$

其中 $H_j(A^U)$ 和 $H_j(A^L)$ 分别为 A^U, A^L 中的第 $j+1$ 个元素 $a_{j+1}^U, a_{j+1}^L (1 \leq j \leq 2)$ 的隶属度.

定义5 设 X 为一给定的集合,区间梯形二型犹豫模糊集(HI2TFS)是从 X 到 $[0,1]$ 的一个子集的映射,表示为

$$E = \{ \langle x, \tilde{h}_E(x) \rangle | x \in X \},$$

其中 $\tilde{h}_E(x)$ 为几个区间梯形二型模糊数可能值构成的集合,表示 $x \in X$ 属于集合 E 的可能程度,本文将简称为区间梯形二型犹豫模糊数,有

$$\tilde{h}_E(x) = \{ (A^U, A^L) | (A^U, A^L) \in \tilde{h}_E(x) \}, (A^U, A^L) = ((a_1^U, a_2^U, a_3^U, a_4^U; H_1(A^U), H_2(A^U)), (a_1^L, a_2^L, a_3^L, a_4^L; H_1(A^L), H_2(A^L))).$$

2 区间梯形二型犹豫模糊数可能度和差异度

2.1 区间梯形二型犹豫模糊数可能度

在多准则决策中,专家们可以用定量的数据描述其准则,同时,也可以用定性的文本形式数据.本文研究的对象是语言评价信息,语言可以处理定性的评估信息.目前,用来解决该类问题的方法大多存在丢失信息的缺陷,为此,Francisco等^[10]建立了由语言术语和数值组成的二维模型,之后学者们处理定性评价信息时所采用的方法也大多基于此二维模型.本文将犹豫模糊语言转化为区间梯形二型犹豫模糊数,且转化得到的区间梯形二型模糊数满足

$$H_1(A^U) = H_2(A^U), H_1(A^L) = H_2(A^L).$$

根据定义4,区间梯形二型模糊数可以简写为

$$(A^U, A^L) = ((a_1^U, a_2^U, a_3^U, a_4^U; H(A^U)), (a_1^L, a_2^L, a_3^L, a_4^L; H(A^L))).$$

定义6^[29] 设由模糊语言转化来的两个区间梯形二型模糊数为

$$\begin{aligned} A_s &= (A_s^U, A_s^L) = \\ &((a_{s1}^U, a_{s2}^U, a_{s3}^U, a_{s4}^U; H_1(A_s^U), H_2(A_s^U)), \\ &(a_{s1}^L, a_{s2}^L, a_{s3}^L, a_{s4}^L; H_1(A_s^L), H_2(A_s^L))), \\ A_t &= (A_t^U, A_t^L) = \\ &((a_{t1}^U, a_{t2}^U, a_{t3}^U, a_{t4}^U; H_1(A_t^U), H_2(A_t^U)), \\ &(a_{t1}^L, a_{t2}^L, a_{t3}^L, a_{t4}^L; H_1(A_t^L), H_2(A_t^L))). \end{aligned}$$

其上、下界可能度公式分别为

$$\begin{aligned} p(A_s^U \geq A_t^U) &= \\ &\max \left(1 - \max \left(\left(\sum_{k=1}^4 \max(a_{tk}^U - a_{sk}^U, 0) + (a_{t4}^U - a_{s1}^U) + \right. \right. \right. \\ &\left. \left. \sum_{k=1}^2 \max(H_k(A_t^U) - H_k(A_s^U), 0) \right) / \left(\sum_{k=1}^4 |a_{tk}^U - a_{sk}^U| + \right. \right. \\ &\left. \left. (a_{t4}^U - a_{s1}^U) + \sum_{k=1}^2 |H_k(A_t^U) - H_k(A_s^U)| \right), 0 \right), 0 \right), \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(A_s^L \geq A_t^L) &= \\ &\max \left(1 - \max \left(\left(\sum_{k=1}^4 \max(a_{tk}^L - a_{sk}^L, 0) + (a_{t4}^L - a_{s1}^L) + \right. \right. \right. \\ &\left. \left. \sum_{k=1}^2 \max(H_k(A_t^L) - H_k(A_s^L), 0) \right) / \left(\sum_{k=1}^4 |a_{tk}^L - a_{sk}^L| + \right. \right. \\ &\left. \left. (a_{t4}^L - a_{s1}^L) + \sum_{k=1}^2 |H_k(A_t^L) - H_k(A_s^L)| \right), 0 \right), 0 \right). \quad (2) \end{aligned}$$

由式(1)和(2)计算两个区间梯形二型模糊数的

上界与上界相比较的可能度、下界与下界相比较的可能度,再根据加权平均算子综合两者可能度,得到两个区间梯形二型模糊数的大小排序.但是,定义6中求解可能度的方法计算过程复杂,且多次采用最大算子运算,计算结果不精确.为了更好地表明区间梯形二型模糊数的可能度定义,首先定义两个任意梯形模糊数的可能度.

定义7 设 $M = (a_1, a_2, a_3, a_4; u_1)$, $N = (b_1, b_2, b_3, b_4; u_2)$ 为任意两个梯形模糊数,分别用梯形ABCD和梯形EFGH刻画; s_1 和 s_2 分别为模糊数 M 所围梯形ABCD和模糊数 N 所围梯形EFGH的面积, s 为两个梯形模糊数相交面积, s_{11} 为模糊数 M 与坐标系中横轴 x 所围梯形ABCD和模糊数 N 与坐标系中横轴 x 所围梯形EFGH构成的多边形中,非重叠部分中右侧属于梯形ABCD的面积; s_{12} 为模糊数 M 所围梯形ABCD和模糊数 N 所围梯形EFGH构成的多边形中,非重叠部分中左侧属于梯形ABCD的面积; s_{21} 为模糊数 N 所围梯形EFGH和模糊数 M 所围梯形ABCD构成的多边形中,非重叠部分中右侧属于梯形EFGH的面积; s_{22} 为模糊数 N 所围梯形EFGH和模糊数 M 所围梯形ABCD构成的多边形中,非重叠部分中左侧属于梯形EFGH的面积. $M \geq N$ 的可能度定义为

$$p(M \geq N) = \frac{1}{2} \left(\frac{s_{11} + s/2}{S_1} + \frac{s_{22} + s/2}{S_2} \right), \quad (3)$$

类似地, $N \geq M$ 的可能度定义为

$$p(N \geq M) = \frac{1}{2} \left(\frac{s_{12} + s/2}{S_1} + \frac{s_{21} + s/2}{S_2} \right). \quad (4)$$

其中: $S_1 = s_{11} + s_{12} + s$, $S_2 = s_{21} + s_{22} + s$.

两个梯形在坐标系中的图形关系大致可分为以下5种情形:1)图1代表两个梯形相分离的情况;2)图2代表两个梯形相交(1)的情况;3)图3代表两个梯形相包含的情况;4)图4代表两个梯形相交(2)的情况;5)图5代表两个梯形相重合的情况.以上5种情形表示梯形ABCD从左向右移动的动态过程,当梯形ABCD向右继续移动并与梯形EFGH相交和相分离时,情形与图1和图2类似.

对于图1, $S_1 =$ 梯形ABCD的面积, $S_2 =$ 梯形EFGH的面积, $s = 0$, $s_{11} = 0$, $s_{12} =$ 梯形ABCD的面积, $s_{21} =$ 梯形EFGH的面积, $s_{22} = 0$.此时, $s_{11} = s_{12} = s = 0$,根据式(3)和(4)可得 $p(M \geq N) = 0$,且 $p(N \geq M) = 1$.

对于图2, $S_1 =$ 梯形ABCD的面积, $S_2 =$ 梯形EFGH的面积, $s =$ 三角形DEO的面积, $s_{11} = 0$, $s_{12} =$ 五边形ABCOE的面积, $s_{21} =$ 五边形DOFGH的面积, $s_{22} = 0$.此时, $s_{11} = s_{12} = 0$,同理可得

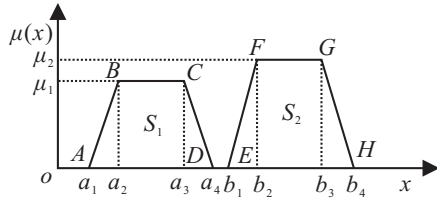


图1 梯形模糊数相分离

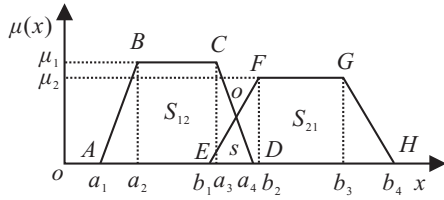


图2 梯形模糊数相交(1)

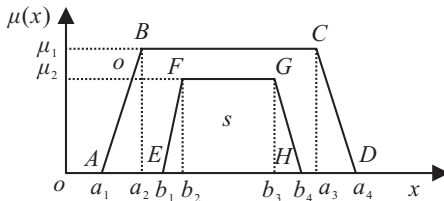


图3 梯形模糊数相包含

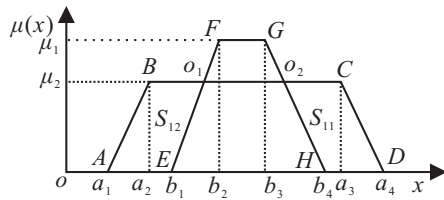


图4 梯形模糊数相交(2)

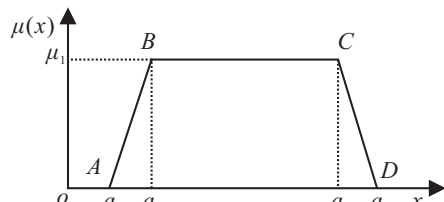


图5 梯形模糊数重合

$$p(M \geq N) = 1/2((s/2)/S_1 + (s/2)/S_2),$$

$$p(N \geq M) = 1/2((S_1 - s/2)/S_1 + (S_2 - s/2)/S_2).$$

对于图3, S_1 = 梯形 ABCD 的面积, S_2 = 梯形 EFGH 的面积, s = 梯形 EFGH 的面积, s_{11} = 多边形 OBCDHG 的面积, s_{12} = 四边形 AEO 的面积, $s_{21} = 0$, $s_{22} = 0$. 此时, $s_{21} = s_{22} = 0$, $S_2 = s$, 同理可得

$$p(M \geq N) = 1/2((s_{11} + s/2)/S_1 + 1/2),$$

$$p(N \geq M) = 1/2((s_{12} + s/2)/S_1 + 1/2).$$

对于图4, S_1 = 梯形 ABCD 的面积, S_2 = 梯形 EFGH 的面积, s = 梯形 EO₁O₂H 的面积, s_{11} = 多边形 CDHO₂ 的面积, s_{12} = 四边形 ABO₁E 的面积, $s_{22} = 1/2$ 梯形 O₁FGO₂, $s_{21} = 1/2$ 梯形 O₁FGO₂. 同理

可得

$$p(M \geq N) = 1/2((s_{11} + s/2)/S_1 + (s_{22} + s/2)/S_2),$$

$$p(N \geq M) = 1/2((s_{12} + s/2)/S_1 + s/2S_2).$$

对于图5, S_1 = 梯形 ABCD 的面积 = 梯形 EFGH 的面积 = S_2 , s = 梯形 EFGH 或梯形 ABCD 的面积, $s_{11} = 0$, $s_{12} = 0$, $s_{21} = 0$, $s_{22} = 0$. 此时, $s_{11} = s_{12} = s_{21} = s_{22} = 0$, $S_1 = S_2 = s$, 同理可得

$$p(M \geq N) = 1/2, p(N \geq M) = 1/2.$$

由于本文由犹豫模糊语言转化而来的区间梯形二型犹豫模糊数存在特殊性, $H_1(A^U) = H_2(A^U)$, $H_1(A^L) = H_2(A^L)$, 将其用几何图形表示时, 两组梯形的高度是相等的, 两个区间梯形二型模糊数的上界和下界分别构成两组梯形. 区间梯形二型模糊数的上界与上界、下界与下界分别根据定义7进行可能度求解, 从而得到两个模糊数的上界可能度和下界可能度, 并利用加权平均集结算子得到最终可能度. 下面直接根据图6和图7提出区间梯形二型模糊数的可能度计算方法.

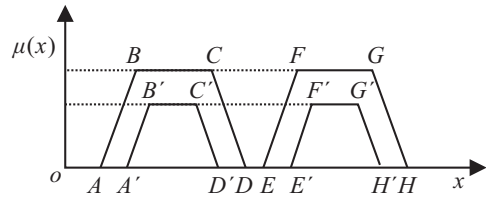


图6 两个区间梯形二型模糊数相分离

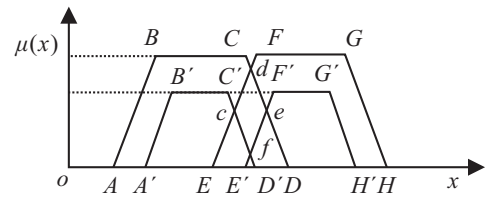


图7 两个区间梯形二型模糊数相交

定义8 由模糊语言转化来的两个区间梯形二型模糊数分别为

$$A_s = (A_s^U, A_s^L) = ((a_{s1}^U, a_{s2}^U, a_{s3}^U, a_{s4}^U; H(A_s^U)),$$

$$(a_{s1}^L, a_{s2}^L, a_{s3}^L, a_{s4}^L; H(A_s^L))),$$

$$A_t = (A_t^U, A_t^L) = ((a_{t1}^U, a_{t2}^U, a_{t3}^U, a_{t4}^U; H(A_t^U)),$$

$$(a_{t1}^L, a_{t2}^L, a_{t3}^L, a_{t4}^L; H(A_t^L))).$$

区间梯形二型模糊数在坐标系中的表示也分为图6和图7两种情况, 可能度的求解思路是将上下界分别进行计算. 点集 $\{A, B, C, D, A', B', C', D', E, F, G, H, E', F', G', H'\}$ 对应的横坐标 x 值为 $\{a_{s1}^U, a_{s2}^U, a_{s3}^U, a_{s4}^U, a_{s1}^L, a_{s2}^L, a_{s3}^L, a_{s4}^L, a_{t1}^U, a_{t2}^U, a_{t3}^U, a_{t4}^U, a_{t1}^L, a_{t2}^L, a_{t3}^L, a_{t4}^L\}$, S_s^U 和 S_t^U 分别为区间梯形二型模糊数 A_s 、 A_t 的上界与坐标系中横轴 x 所围面积, S_s^L 和 S_t^L 分别为 A_s 、 A_t

的下界与坐标系中横轴 x 所围面积, s^U 为两区间梯形二型模糊数的上界与坐标系中横轴 x 所形成的两个梯形的相交面积, s^L 为两区间梯形二型模糊数的下界与坐标系中横轴 x 所形成的两个梯形的相交面积.

图 6 中, S_s^U = 梯形 ABCD 的面积, S_t^U = 梯形 EFGH 的面积, S_s^L = 梯形 A'B'C'D' 的面积, S_t^L = 梯形 E'F'G'H' 的面积, $s_U = 0$, $s_L = 0$. 图 7 中, S_s^U = 梯形 ABCD 的面积, S_t^U = 梯形 EFGH 的面积, S_s^L = 梯形 A'B'C'D' 的面积, S_t^L = 梯形 E'F'G'H' 的面积, s^U = 三角形 $\epsilon E'D'$ 的面积, s^L = 三角形 $\epsilon E'D'$ 的面积. 若 A_s 位于 A_t 的左边 (包含重合), 则 $A_s \geq A_t$ 的可能度定义为

$$p(A_s \geq A_t) = \frac{1}{4} \left(\frac{s^U/2}{S_s^U} + \frac{s^U/2}{S_t^U} + \frac{s^L/2}{S_s^L} + \frac{s^L/2}{S_t^L} \right). \quad (5)$$

若 A_s 位于 A_t 的右边 (包含重合), 则 $A_s \geq A_t$ 的可能度定义为

$$p(A_s \geq A_t) = \frac{1}{4} \left(\frac{S_s^U - s^U/2}{S_s^U} + \frac{S_t^U - s^U/2}{S_t^U} + \frac{S_s^L - s^L/2}{S_s^L} + \frac{S_t^L - s^L/2}{S_t^L} \right). \quad (6)$$

性质 1 设 A, B, C 为 3 个由模糊语言转化来的区间梯形二型模糊数, 且

$$A = (A^U, A^L) = ((a_{s1}^U, a_{s2}^U, a_{s3}^U, a_{s4}^U; H(A_s^U)), (a_{s1}^L, a_{s2}^L, a_{s3}^L, a_{s4}^L; H(A_s^L))),$$

$$B = (B^U, B^L) = ((b_{s1}^U, b_{s2}^U, b_{s3}^U, b_{s4}^U; H(B_s^U)), (b_{s1}^L, b_{s2}^L, b_{s3}^L, b_{s4}^L; H(B_s^L))),$$

$$C = (C^U, C^L) = ((c_{s1}^U, c_{s2}^U, c_{s3}^U, c_{s4}^U; H(C_s^U)), (c_{s1}^L, c_{s2}^L, c_{s3}^L, c_{s4}^L; H(C_s^L))).$$

则有:

- 1) $0 \leq p(A \geq B) \leq 1$;
- 2) $p(A \geq A) = 1/2$;
- 3) $p(A \geq B) + p(B \geq A) = 1$;
- 4) 如果 $p(A \geq B) > 1/2$, 则当 $p(B \geq C) > 1/2$ 时, $p(A \geq C) > 1/2$.

定义 9 设区间梯形二型犹豫模糊数 $\tilde{h} = \{A_0, A_1, \dots, A_g\}$ 由模糊语言集 $S = \{s_0, s_1, \dots, s_g\}$ 转化而来, \tilde{h}_a, \tilde{h}_b 为 \tilde{h} 中的任意两个子集, 则 $\tilde{h}_a \geq \tilde{h}_b$ 的可能度定义为

$$p(\tilde{h}_a \geq \tilde{h}_b) = \frac{1}{ab} \left[\sum_{n_1=1}^a \sum_{n_2=1}^b p(A_{n_1} \geq B_{n_2}) \right]. \quad (7)$$

其中: $p(A_{n_1} \geq B_{n_2})$ 为区间梯形二型模糊数 $A_{n_1} \geq B_{n_2}$ 的可能度, a 和 b 分别为 \tilde{h}_a, \tilde{h}_b 中元素的个数, 且有

$$A_i = (A_i^U, A_i^L) = ((a_{i1}^U, a_{i2}^U, a_{i3}^U, a_{i4}^U; H(A_i^U)), (a_{i1}^L, a_{i2}^L, a_{i3}^L, a_{i4}^L; H(A_i^L))),$$

$$(a_{i1}^L, a_{i2}^L, a_{i3}^L, a_{i4}^L; H(A_i^L))),$$

$$i = 0, 1, \dots, g.$$

性质 2 设 \tilde{h}_a, \tilde{h}_b 为区间梯形二型犹豫模糊数 $\tilde{h} = \{A_0, A_1, \dots, A_g\}$ 中的任意两个子集, 其中

$$A_i = (A_i^U, A_i^L) = ((a_{i1}^U, a_{i2}^U, a_{i3}^U, a_{i4}^U; H(A_i^U)),$$

$$(a_{i1}^L, a_{i2}^L, a_{i3}^L, a_{i4}^L; H(A_i^L))),$$

$$i = 0, 1, \dots, g.$$

则有:

$$1) 0 \leq p(\tilde{h}_a \geq \tilde{h}_b) \leq 1;$$

$$2) p(\tilde{h}_a \geq \tilde{h}_b) + p(\tilde{h}_b \geq \tilde{h}_a) = 1;$$

$$3) p(\tilde{h}_a \geq \tilde{h}_a) = 0.5;$$

4) 若 \tilde{h}_a 中任意元素值大于 \tilde{h}_b 中的所有元素值, 则 $p(\tilde{h}_a \geq \tilde{h}_b) = 1$;

5) 若 \tilde{h}_a 中任意元素值小于 \tilde{h}_b 中的所有元素值, 则 $p(\tilde{h}_a \geq \tilde{h}_b) = 0$.

2.2 区间梯形二型犹豫模糊数差异度

定义 10 设区间梯形二型犹豫模糊数 $\tilde{h} = \{A_0, A_1, \dots, A_g\}$ 由模糊语言集 $S = \{s_0, s_1, \dots, s_g\}$ 转化而来, \tilde{h}_a, \tilde{h}_b 为 \tilde{h} 中的任意两个子集, 且

$$A_i = (A_i^U, A_i^L) = ((a_{i1}^U, a_{i2}^U, a_{i3}^U, a_{i4}^U; H(A_i^U)),$$

$$(a_{i1}^L, a_{i2}^L, a_{i3}^L, a_{i4}^L; H(A_i^L))),$$

$$i = 0, 1, \dots, g,$$

则 \tilde{h}_a, \tilde{h}_b 之间的差异度可以定义为

$$d(\tilde{h}_a, \tilde{h}_b) = |p(\tilde{h}_a \geq \tilde{h}) - p(\tilde{h}_b \geq \tilde{h})|, \quad (8)$$

其中 $p(\tilde{h}_a \geq \tilde{h})$ 为 \tilde{h}_a 大于包含所有语言评价等级的 \tilde{h} 的可能度大小. 将 \tilde{h} 看作评价水平基准线, 则 $p(\tilde{h}_a \geq \tilde{h})$ 表示模糊数 \tilde{h}_a 大于评价水平基准线的程度, 其值越大, 表明 \tilde{h}_a 所对应的评价等级越高, 因此式 (8) 可以衡量 \tilde{h}_a, \tilde{h}_b 之间的等级差异程度.

性质 3 设 \tilde{h}_a, \tilde{h}_b 为区间梯形二型犹豫模糊数 $\tilde{h} = \{A_0, A_1, \dots, A_g\}$ 中的任意两个子集, 其中

$$A_i = (A_i^U, A_i^L) = ((a_{i1}^U, a_{i2}^U, a_{i3}^U, a_{i4}^U; H(A_i^U)),$$

$$(a_{i1}^L, a_{i2}^L, a_{i3}^L, a_{i4}^L; H(A_i^L))),$$

$$i = 0, 1, \dots, g,$$

$d(\tilde{h}_a, \tilde{h}_b)$ 为 \tilde{h}_a, \tilde{h}_b 之间的差异度, 则有:

$$1) 0 \leq d(\tilde{h}_a, \tilde{h}_b) \leq g/(g+1);$$

$$2) d(\tilde{h}_a, \tilde{h}_a) = 0;$$

3) $d(\tilde{h}_a) = d(\tilde{h}_b)$, 当且仅当 $p(\tilde{h}_a \geq \tilde{h}) = p(\tilde{h}_b \geq \tilde{h})$;

$$4) d(\tilde{h}_a, \tilde{h}_b) = d(\tilde{h}_b, \tilde{h}_a);$$

5) 若 $p(\tilde{h}_a \geq \tilde{h}) \geq p(\tilde{h}_b \geq \tilde{h}) \geq p(\tilde{h}_c \geq \tilde{h})$, 则 $d(\tilde{h}_a, \tilde{h}_c) \geq d(\tilde{h}_a, \tilde{h}_b), d(\tilde{h}_a, \tilde{h}_c) \geq d(\tilde{h}_b, \tilde{h}_c)$.

3 基于区间梯形二型犹豫模糊数权重信息部分确定的多准则决策方法

对于一个犹豫模糊语言多准则决策问题, 设有 m 个方案 $A = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$, n 个决策准则 $C = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$, 各准则相互独立, 对应的准则权重向量为

$$w = (w_1, w_2, \dots, w_j)^T,$$

$$w_j \geq 0, \sum_{j=1}^n w_j = 1.$$

决策者由于自身能力的限制, 不能确定各准则权重大小, 但是给出了各准则权重范围 $w_j^- \leq w_j \leq w_j^+$ ($j = 1, 2, \dots, n$). 同时, 决策者对各决策方案给出的评价信息是犹豫语言值, 语言值所对应的区间梯形二型模糊数如表1所示, 对应转换后得到评价矩阵为 $R = (\tilde{h}_{ij})_{m \times n}$, \tilde{h}_{ij} 表示决策者给出方案 i 在准则 j 下的准则值, 且 \tilde{h}_{ij} 为区间梯形二型犹豫模糊数, 试确定方案的排序.

表1 语言标度集及其对应的区间梯形二型模糊数

语言标度	区间梯形二型模糊数
nothing(n)	((0, 0, 0, 0.1;1), (0, 0, 0, 0.5;0.9))
very low(vl)	((0, 0.1, 0.1, 0.3;1), (0.05, 0.1, 0.1, 0.2;0.9))
low(l)	((0.1, 0.3, 0.3, 0.5;1), (0.2, 0.3, 0.3, 0.4;0.9))
medium(m)	((0.3, 0.5, 0.5, 0.7;1), (0.4, 0.5, 0.5, 0.6;0.9))
high(h)	((0.5, 0.7, 0.7, 0.9;1), (0.6, 0.7, 0.7, 0.8;0.9))
very high(vh)	((0.7, 0.9, 0.9, 1;1), (0.8, 0.9, 0.9, 0.95;0.9))
perfect(p)	((0.9, 1, 1, 1;1), (0.95, 1, 1, 1;0.9))

Step 1: 将语言决策信息矩阵转化为区间梯形二型犹豫模糊数决策矩阵. 根据决策者给出的犹豫语言决策信息, 利用表1将语言决策信息集转化为区间梯形二型犹豫模糊数, 构造新的决策矩阵 $R = (\tilde{h}_{ij})_{m \times n}$.

Step 2: 构建可能度矩阵, 计算差异度. 根据式(5)~(7)计算所有 $p(\tilde{h}_{ij} \geq \tilde{h})$ 的值, 同时利用式(8)计算所有 $d(\tilde{h}_{ij}, \tilde{h}_{kj})$ 的值. $p(\tilde{h}_{ij} \geq \tilde{h})$ 为方案 A_i 在准则 c_j 下的评价价值高于标准等级的可能度大小, $d(\tilde{h}_{ij}, \tilde{h}_{kj})$ 为方案 A_i 与 A_k 在准则 c_i 下的差异度. \tilde{h}_{ij} 和 \tilde{h}_{kj} 为区间梯形二型犹豫模糊数, \tilde{h}_{ij} 为 \tilde{h} 的子集, 表示决策者给出方案 i 在准则 j 下的准则值. $\tilde{h} = \{A_0, A_1, \dots, A_6\}$ 由模糊语言集 $S = \{s_0, s_1, \dots, s_6\}$ 转化而来, 且有

$$A_i = (A_i^U, A_i^L) = ((a_{i1}^U, a_{i2}^U, a_{i3}^U, a_{i4}^U; H(A_i^U)),$$

$$(a_{i1}^L, a_{i2}^L, a_{i3}^L, a_{i4}^L; H(A_i^L))),$$

$$i = 0, 1, \dots, g.$$

Step 3: 利用离差最大化模型计算各准则权重. 基于式(7)和(8)求得每个准则下各方案评价价值之间的

距离 $d(\tilde{h}_{ij}, \tilde{h}_{kj})$, 构建离差最大化模型求得各准则的权重. 假设决策者给出的各准则权重范围为

$$w_1^- \leq w_1 \leq w_1^+, w_2^- \leq w_2 \leq w_2^+, \dots,$$

$$w_n^- \leq w_n \leq w_n^+,$$

则有

$$\max Z(w) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m d(\tilde{h}_{ij}, \tilde{h}_{kj}) w_j;$$

$$\text{s.t. } w_j^- \leq w_j \leq w_j^+,$$

$$w_1 + w_2 + \dots + w_n = 1,$$

$$w_1, w_2, \dots, w_n \geq 0.$$

Step 4: 计算各方案与正负理想方案的差值. 根据TOPSIS思想, 分别确定理想方案为 $G^+ = \{s_6\}$, 负理想方案为 $G^- = \{s_0\}$, 并计算方案 A_i 与正负理想方案的加权差值, 即

$$D(\tilde{h}_i, G^+) =$$

$$w_1 d(\tilde{h}_{i1}, G^+) + w_2 d(\tilde{h}_{i2}, G^+) + \dots + w_n d(\tilde{h}_{in}, G^+),$$

$$D(\tilde{h}_i, G^-) =$$

$$w_1 d(\tilde{h}_{i1}, G^-) + w_2 d(\tilde{h}_{i2}, G^-) + \dots + w_n d(\tilde{h}_{in}, G^-).$$

Step 5: 计算系数 c_i , 确定方案排序, 其中

$$c_i = \frac{D(\tilde{h}_i, G^-)}{D(\tilde{h}_i, G^+) + D(\tilde{h}_i, G^-)}.$$

c_i 越大, 该方案越优.

4 算例分析

算例数据源于文献[27], 通过计算结果的对比, 得到3个待评价方案 A_1, A_2 和 A_3 , 每个方案有3个评价准则 C_1, C_2 和 C_3 . 假设决策者对各准则的重要程度不能给出明确的评价价值, 但是给出了各准则权重范围

$$0.20 \leq w_1 \leq 0.40,$$

$$0.20 \leq w_2 \leq 0.38,$$

$$0.10 \leq w_3 \leq 0.50.$$

评价采用7标度语言评价集, 即

$$S =$$

$$\{s_0 : \text{nothing}(n), s_1 : \text{very low}(vl), s_2 : \text{low}(l),$$

$$s_3 : \text{medium}(m), s_4 : \text{high}(h), s_5 : \text{very high}(vh),$$

$$s_6 : \text{perfect}(p)\}.$$

具体评价信息如表2所示(该评价信息已经过初步处理).

表2 犹豫模糊语言评价信息

	C_1	C_2	C_3
A_1	$\{s_1, s_2, s_3\}$	$\{s_4, s_3\}$	$\{s_4\}$
A_2	$\{s_2, s_3\}$	$\{s_3\}$	$\{s_0, s_1, s_2\}$
A_3	$\{s_4, s_5, s_6\}$	$\{s_1, s_2\}$	$\{s_4, s_5, s_6\}$

根据以上信息,对3个备选方案进行排序,选出最优方案,具体步骤如下.

Step 1: 利用表1将表2转化为区间梯形二型犹豫模糊数,构造新的决策矩阵

$$R = (\tilde{h}_{ij})_{3 \times 3} \begin{bmatrix} \tilde{h}_{11} & \tilde{h}_{12} & \tilde{h}_{13} \\ \tilde{h}_{21} & \tilde{h}_{22} & \tilde{h}_{23} \\ \tilde{h}_{31} & \tilde{h}_{32} & \tilde{h}_{33} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{h}_{11} = \{((0, 0.1, 0.1, 0.3; 1), (0.05, 0.1, 0.1, 0.2; 0.9)), ((0.1, 0.3, 0.3, 0.5; 1), (0.2, 0.3, 0.3, 0.4; 0.9)), ((0.3, 0.5, 0.5, 0.7; 1), (0.4, 0.5, 0.5, 0.6; 0.9))\},$$

$$\tilde{h}_{12} = \{((0.5, 0.7, 0.7, 0.9; 1), (0.6, 0.7, 0.7, 0.8; 0.9)), ((0.7, 0.9, 0.9, 1; 1), (0.8, 0.9, 0.9, 0.95; 0.9))\},$$

$$\tilde{h}_{13} = \{((0.5, 0.7, 0.7, 0.9; 1), (0.6, 0.7, 0.7, 0.8; 0.9))\},$$

$$\tilde{h}_{21} = \{((0.1, 0.3, 0.3, 0.5; 1), (0.2, 0.3, 0.3, 0.4; 0.9)), ((0.3, 0.5, 0.5, 0.7; 1), (0.4, 0.5, 0.5, 0.6; 0.9))\},$$

$$\tilde{h}_{22} = \{((0.3, 0.5, 0.5, 0.7; 1), (0.4, 0.5, 0.5, 0.6; 0.9))\},$$

$$\tilde{h}_{23} = \{((0, 0, 0, 0.1; 1), (0, 0, 0, 0.05; 0.9)), ((0, 0.1, 0.1, 0.3; 1), (0.05, 0.1, 0.1, 0.2; 0.9)), ((0.1, 0.3, 0.3, 0.5; 1), (0.2, 0.3, 0.3, 0.4; 0.9))\},$$

$$\tilde{h}_{31} = \{((0.5, 0.7, 0.7, 0.9; 1), (0.6, 0.7, 0.7, 0.8; 0.9)), ((0.7, 0.9, 0.9, 1; 1), (0.8, 0.9, 0.9, 0.95; 0.9)), ((0.9, 1, 1, 1; 1), (0.95, 1, 1, 1; 0.9))\},$$

$$\tilde{h}_{32} = \{((0, 0.1, 0.1, 0.3; 1), (0.05, 0.1, 0.1, 0.2; 0.9)), ((0.1, 0.3, 0.3, 0.5; 1), (0.2, 0.3, 0.3, 0.4; 0.9))\},$$

$$\tilde{h}_{33} = \{((0.5, 0.7, 0.7, 0.9; 1), (0.6, 0.7, 0.7, 0.8; 0.9)), ((0.7, 0.9, 0.9, 1; 1), (0.8, 0.9, 0.9, 0.95; 0.9)), ((0.9, 1, 1, 1; 1), (0.95, 1, 1, 1; 0.9))\}.$$

Step 2: 由式(5)~(7)计算所有 $p(\tilde{h}_{ij} \geq \tilde{h})$ 的值,同时利用式(8)计算所有 $d(\tilde{h}_{ij}, \tilde{h}_{kj})$ 的值,得到

$$p(\tilde{h}_{11} \geq \tilde{h}) = 0.3552,$$

$$p(\tilde{h}_{12} \geq \tilde{h}) = 0.7313,$$

$$p(\tilde{h}_{13} \geq \tilde{h}) = 0.6459,$$

$$p(\tilde{h}_{21} \geq \tilde{h}) = 0.4270,$$

$$p(\tilde{h}_{22} \geq \tilde{h}) = 0.4999,$$

$$p(\tilde{h}_{23} \geq \tilde{h}) = 0.2202,$$

$$p(\tilde{h}_{31} \geq \tilde{h}) = 0.7798,$$

$$p(\tilde{h}_{32} \geq \tilde{h}) = 0.2828,$$

$$p(\tilde{h}_{33} \geq \tilde{h}) = 0.7798;$$

$$d(\tilde{h}_{11}, \tilde{h}_{21}) = 0.0718,$$

$$d(\tilde{h}_{11}, \tilde{h}_{31}) = 0.4246,$$

$$d(\tilde{h}_{21}, \tilde{h}_{31}) = 0.3528,$$

$$d(\tilde{h}_{12}, \tilde{h}_{22}) = 0.2174,$$

$$d(\tilde{h}_{12}, \tilde{h}_{32}) = 0.4345,$$

$$d(\tilde{h}_{22}, \tilde{h}_{32}) = 0.2171,$$

$$d(\tilde{h}_{13}, \tilde{h}_{23}) = 0.4257,$$

$$d(\tilde{h}_{13}, \tilde{h}_{33}) = 0.1339,$$

$$d(\tilde{h}_{23}, \tilde{h}_{33}) = 0.5598.$$

Step 3: 利用离差最大化模型,求得各准则的权重 w_j ($j = 1, 2, 3$). 根据各准则权重范围

$$0.20 \leq w_1 \leq 0.40,$$

$$0.20 \leq w_2 \leq 0.38,$$

$$0.10 \leq w_3 \leq 0.50,$$

得到

$$\max Z(w) = 0.8492w_1 + 0.8690w_2 + 1.1194w_3;$$

$$\text{s.t. } 0.20 \leq w_1 \leq 0.40, 0.20 \leq w_2 \leq 0.38,$$

$$0.10 \leq w_3 \leq 0.50, w_1 + w_2 + w_3 = 1,$$

$$w_1, w_2, w_3 \geq 0.$$

求解可得 $w_1 = 0.4000$, $w_2 = 0.3800$, $w_3 = 0.2200$.

Step 4: 根据TOPSIS思想,分别确定理想方案为 $G^+ = \{s_6\}$, 负理想方案为 $G^- = \{s_0\}$, 并计算方案 A_i 与正负理想方案的差异度. 各方案与正负理想方案的加权差值分别为

$$D(\tilde{h}_1, G^+) = 0.3480,$$

$$D(\tilde{h}_1, G^-) = 0.4616,$$

$$D(\tilde{h}_2, G^+) = 0.4956,$$

$$D(\tilde{h}_2, G^-) = 0.3140,$$

$$D(\tilde{h}_3, G^+) = 0.3139,$$

$$D(\tilde{h}_3, G^-) = 0.4957.$$

Step 5: 计算综合评价系数

$$c_i = \frac{D(\tilde{h}_i, G^-)}{D(\tilde{h}_i, G^+) + D(\tilde{h}_i, G^-)},$$

确定方案排序, 得到

$$c_1 = 0.57016, c_2 = 0.38785, c_3 = 0.61228.$$

则 $c_3 > c_1 > c_2$, 即方案 $A_3 > A_1 > A_2$, A_3 为最优方案.

5 讨 论

利用式 (5)~(7) 计算所有可能度 $p(\tilde{h}_{ij} \geq \tilde{h})$ 的值, 得到可能度矩阵

$$P^1 = \begin{bmatrix} & c_2 & c_3 & c_4 \\ x_1 & 0.3552 & 0.7173 & 0.6459 \\ x_2 & 0.4270 & 0.4999 & 0.2202 \\ x_3 & 0.7798 & 0.2828 & 0.7798 \end{bmatrix}.$$

同一准则下对 3 个方案的可能度大小进行排序, 分别得到

$$P_{11}^1 < P_{21}^1 < P_{31}^1, P_{32}^1 < P_{22}^1 < P_{12}^1,$$

$$P_{23}^1 < P_{13}^1 < P_{33}^1.$$

同理, 分析可能度矩阵 P^2 中的同一准则^[27], 3 个方案的排序情况为

$$P^2 = \begin{bmatrix} & c_2 & c_3 & c_4 \\ x_1 & 0.4000 & 0.6667 & 0.6250 \\ x_2 & 0.4444 & 0.5000 & 0.3333 \\ x_3 & 0.6667 & 0.3333 & 0.6667 \end{bmatrix},$$

得到

$$P_{11}^1 < P_{21}^1 < P_{31}^1, P_{32}^1 < P_{22}^1 < P_{12}^1,$$

$$P_{23}^1 < P_{13}^1 < P_{33}^1.$$

可以发现, 3 个方案同一准则的可能度排序结果是相同的, 即

$$P_{11} < P_{21} < P_{31}, P_{32} < P_{22} < P_{12},$$

$$P_{23} < P_{13} < P_{33}.$$

该结果表明了本文提出的基于面积法的区间梯形二型犹豫模糊数可能度计算方法是准确的且有效的.

P^2 为 Li 等^[27] 计算所得到的可能度矩阵, 由于其选取的是已知权重, 且 $w_1 = w_2 = w_3 = 1/3$, 为了对比分析决策结果, 分析时不采用该权重, 利用式 (7) 和 (8), 根据可能度矩阵 P^2 中所有 $p(\tilde{h}_{ij} \geq \tilde{h})$ 的值求取每个准则下各方案评价价值之间的距离 $d(\tilde{h}_{ij}, \tilde{h}_{kj})$, 构建离差最大化模型以求得各准则的权重. 假设决策者给出的各准则权重范围仍然为

$$0.20 \leq w_1 \leq 0.40, 0.20 \leq w_2 \leq 0.38,$$

$$0.10 \leq w_3 \leq 0.50,$$

利用离差最大化模型求解 3 个准则的权重, 得到

$$w_1 = 0.4000, w_2 = 0.2945, w_3 = 0.3055.$$

采用评价系数公式

$$c_i = \frac{D(\tilde{h}_i, G^-)}{D(\tilde{h}_i, G^+) + D(\tilde{h}_i, G^-)}$$

求得最终评价系数

$$c_1 = 0.5599, c_2 = 0.4116, c_3 = 0.5860,$$

则 $c_3 > c_1 > c_2$, 即 $A_3 > A_1 > A_2$, 方案 A_3 为最优方案. 该方案排序结果与第 4 节中方案排序结果一致, 验证了本文所提出的基于区间梯形二型犹豫模糊数的多准则决策方法是可行的.

在处理犹豫模糊语言集时, 式 (7) 描述的两个集合中每个语言评价价值都被纳入计算范畴, 而 Li 等^[27] 沿用文献 [30] 的方法将犹豫模糊语言集用如下区间模糊集描述:

$$\text{env}(H_s) = [H_{s-}, H_{s+}], H_{s-} \leq H_{s+}. \quad (9)$$

其中: H_{s-} 为犹豫模糊语言集中最小的值, H_{s+} 为犹豫模糊语言集中最大的值. 对犹豫模糊语言集作简单化处理, 在一定程度上会造成信息的丢失. 例如, 现有两个犹豫模糊语言集 H_1 和 H_2 , $H_1 = \{n, vl, l, m\}$, $H_2 = \{n, vl, m\}$, 根据 Rosa 等^[27] 的求包络方法可得到 $\text{env}(H_1) = \text{env}(H_2) = [n, m]$, 但是 H_1 和 H_2 明显是不相同的.

计算两个犹豫模糊语言集的可能度时, 将犹豫模糊语言转化为区间梯形二型犹豫模糊集, 并用几何图形刻画区间梯形二型犹豫模糊数, 可以完整地保留模糊集信息, 并利用面积法进行计算. 而 Li 等^[27] 的可能度计算公式利用极大值的方法, 算法较为简单, 也会造成结果不精确.

6 结 论

本文将语言值转化为区间梯形二型模糊数处理, 提出区间梯形二型犹豫模糊数, 并从几何角度出发, 提出了基于面积法的区间二型犹豫模糊数可能度和差异度定义. 考虑到准则权重信息未知的情况, 利用决策者给出的各准则值权重范围, 结合离差最大化思想, 构造线性规划模型求得权重, 并基于 TOPSIS 的思想, 提出了基于差异度的区间梯形犹豫模糊多准则决策方法. 虽然该差异度与传统的差异度意义相同, 但是算法不同, 通过每个值大于标准值的可能度间接求得差异度. 最后, 通过算例分析和对比分析验证了所提出方法的可行性和有效性. 此外, 本文的权重模型可以适当扩展, 加入决策者对准则本身的偏好.

参考文献(References)

- [1] Zadeh L A. Fuzzy sets[J]. Information and Control, 1965, 8(3): 338-353.
- [2] Atanassov K T. Intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20(1): 87-96.
- [3] Atanassov K, Gargov G. Interval valued intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and systems, 1989, 31(3): 343-349.
- [4] Torra V. Hesitant fuzzy sets[J]. Int J of Intelligent Systems,

- 2010, 25(6): 529-539.
- [5] Yager R R. On ordered weighted averaging aggregation operators in multi-criteria decision making[J]. *IEEE Trans on System, Man and Cybernetics*, 1988, 18(1): 183-190.
- [6] Arieh D B, Chen Z F. On linguistic labels aggregation and consensus measure for autocritic decision making using group recommendations[J]. *IEEE Trans on System, Man and Cybernetics*, 2006, 36(3): 558-568.
- [7] Herrera F, Viedma E H, Martinez L. Direct approach process in group decision making using linguistic OWA operators[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1996, 79(2): 175-190.
- [8] Xu Z S. A note on linguistic hybrid arithmetic averaging operator in multiple attribute group decision making with linguistic information[J]. *Group Decision and Negotiation*, 2006, 15(6): 593-604.
- [9] Herrera F, Martinez L. A 2-tuple fuzzy linguistic representation model for computing with words[J]. *IEEE Trans on Fuzzy Systems*, 2000, 8(6): 746-752.
- [10] Herrera F, Martínez L. A model based on linguistic 2-tuples for dealing with multigranular hierarchical linguistic contexts in multi-expert decision-making[J]. *IEEE Trans on Systems, Man and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, 2001, 31(2): 227-234.
- [11] Deigdao M, Vedregya J L, Vila M A. Linguistic decision making models[J]. *Int J of Intelligent Systems*, 1992, 7(5): 479-492.
- [12] Deigdao M, Vedregya J L, Vila M A. A model for linguistic partial information in decision making problem[J]. *Int J of Intelligent Systems*, 1994, 9(4): 365-378.
- [13] Herrera F, Herrera-Viedma E, Verdegay J L. A sequential selection process group decision making with a linguistic assessment approach[J]. *Information Science*, 1995, 85(4): 223-229.
- [14] 徐泽水. 基于模糊语言评估和GIOWA算子的多属性群决策方法[J]. *系统科学与数学*, 2004, 24(2): 218-224.
(Xu Z S. Method based on fuzzy linguistic assessments and GIOWA operator in multi-attribute group decision-making[J]. *J of Systems Science and Mathematical Sciences*, 2004, 24(2): 218-224.)
- [15] Herrera F, Viedma E H, Martinez L. A fusion method for managing multi-granularity Linguistic terms sets in decision making[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2000, 114(1): 43-58.
- [16] Liu P D, Jin F, Zhang X, et al. Research on the multi-attribute decision-making under risk with interval probability based on prospect theory and the uncertain linguistic variables[J]. *Knowledge-based Systems*, 2011, 24(4): 554-561.
- [17] Mendel J M, John R I, Liu F L. Interval type-2 fuzzy logical systems made simple[J]. *IEEE Trans on Fuzzy Systems*, 2006, 14(6): 808-821.
- [18] Mendel J M, Wu H. Type-2 fuzzistics for symmetric interval type-2 fuzzy sets, Part 1: Forward problems[J]. *IEEE Trans on Fuzzy Systems*, 2006, 14(6): 781-792.
- [19] Mendel J M, Wu H. Type-2 fuzzistics for symmetric interval type-2 fuzzy sets, Part 2: Inverse problems[J]. *IEEE Trans on Fuzzy Systems*, 2007, 15(2): 301-308.
- [20] Dongrui W, Mendel J. Aggregation using the linguistic weighted average and interval type-2 fuzzy sets[J]. *IEEE Trans on Fuzzy Systems*, 2007, 15(6): 1145-1161.
- [21] Dejian Yu. Hesitant fuzzy prioritized operators and their application in multi-criteria group decision making[J]. *African J of Business Management*, 2012, 6(33): 9370-9380.
- [22] Rosa M Rodriguez, Luis Martinez, Francisco Herrera. Hesitant fuzzy linguistic term sets[M]. *Foundations of Intelligent Systems*. Berlin: Springer, 2012, 122: 287-295.
- [23] Zhiming Zhang. Hesitant fuzzy power aggregation operators and their application to multiple attribute group decision making[J]. *Information Sciences*, 2013, 234(1): 150-181.
- [24] Dinghong Peng, Changyuan Gao, Zhifang Gao. Generalized hesitant fuzzy synergetic weighted distance measures and their application to multiple criteria decision-making[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2013, 37(8): 5837-5850.
- [25] Xu Z S. A note on linguistic hybrid arithmetic averaging operator in multiple attribute group decision making with linguistic information[J]. *Group Decision and Negotiation*, 2006, 15(6): 593-604.
- [26] Herrera F, Martinez L. A 2-tuple fuzzy linguistic representation model for computing with words[J]. *IEEE Trans on Fuzzy Systems*, 2000, 8(6): 746-752.
- [27] Lee L W, Chen S M. Fuzzy decision making based on hesitant fuzzy linguistic term sets in intelligent information and database systems[M]. Berlin: Springer, 2013: 21-30.
- [28] Rodríguez R M, Martínez L, Herrera F. A group decision making model dealing with comparative linguistic expressions based on hesitant fuzzy linguistic term sets[J]. *Information Science*, 2013, 241(1): 28-42.
- [29] Chen S M, Lee L W. Fuzzy multiple attributes group decision-making based on the ranking values and the arithmetic operations of interval type-2 fuzzy sets[J]. *Expert Systems with Applications*, 2010, 37(1): 824-833.
- [30] Rodríguez R M, Martínez L, Herrera F. Hesitant fuzzy linguistic term sets for decision making[J]. *IEEE Trans on Fuzzy Systems*, 2012, 20(1): 109-119.