

## 基于弱形式解的粒子流滤波器

张宏欣, 周穗华, 冯士民

(海军工程大学 兵器工程系, 武汉 430033)

**摘要:** 针对粒子流滤波器中粒子速度场计算复杂, 难以滤波求解的问题, 提出一种基于弱形式解的粒子流滤波器. 通过将粒子速度场等效为势函数的梯度, 推导该速度场所满足的偏微分方程的弱形式; 应用 Galerkin 有限元法和蒙特卡罗积分法, 推导出一个易于计算的弱形式常数近似解. 仿真算例表明, 在一定初始条件下, 多峰型后验分布会使高斯假设滤波器局部收敛, 而粒子流滤波器是有效的, 且具有较高的跟踪精度和较好的鲁棒性.

**关键词:** 贝叶斯滤波器; 粒子流滤波器; Galerkin 法; 弱形式解

**中图分类号:** TP202

**文献标志码:** A

### Weak solution based particle flow filter

ZHANG Hong-xin, ZHOU Sui-hua, FENG Shi-min

(Department of Weaponry Engineering, Naval University of Engineering, Wuhan 430033, China. Correspondent: ZHANG Hong-xin, E-mail: mylifeforthebattle@hotmail.com)

**Abstract:** A weak solution based particle flow filter is proposed for the difficulties of particle velocity field computation existed in the present particle flow filter. By regarding the particle velocity field as the gradient of the potential function, a weak formulation of partial differential equation(PDE) in which the velocity field is satisfied is derived. Subsequently, a weak solution with low computation is derived by using Galerkin method and Monte-Carlo integral. Simulation results show that local convergence of Gaussian approximation based filter occurs under certain initial conditions whereas the particle flow filter is nevertheless effective, with preferable tracking accuracy and robustness.

**Keywords:** Bayesian filters; particle flow filter; Galerkin method; weak solution

## 0 引言

贝叶斯非线性滤波方法通过给定观测样本, 近似计算出目标状态的后验分布统计量, 以实现系统状态的估计<sup>[1]</sup>. 根据近似方法的不同, 此类方法可分为解析近似方法和基于仿真近似方法. 解析方法将后验分布近似为高斯的, 计算非线性变换后的后验状态均值和误差矩阵, 再基于卡尔曼滤波框架来求解. 扩展卡尔曼滤波(EKF)基于一阶线性化方法, 对于高阶模型精度不高; 无迹卡尔曼滤波(UKF)与容积卡尔曼滤波(CKF)采用一组确定的样本点进行统计线性化<sup>[2-3]</sup>, 可达到二阶以上精度. 由于这些方法均采用高斯近似, 在后验分布呈现多峰时均可能出现精度下降甚至滤波发散的现象<sup>[4]</sup>.

仿真近似方法采用若干样本经过某种“变换”, 使变换后的样本满足后验概率分布, 理论上不受限于系统模型<sup>[5]</sup>. 粒子滤波(PF)从建议分布中抽取满足后

验分布的样本(重采样), 但并未改变样本本身. 因此, PF要求建议分布样本能够足量覆盖后验状态, 即建议分布必须接近后验分布, 这在实际应用中受限, 且在状态维数较高时会严重发散<sup>[6]</sup>. 针对此类问题, 反馈式粒子滤波方法对每个粒子构造反馈量, 使建议分布粒子“移动”到似然函数的高值区域. 普遍做法是对每个样本进行非线性卡尔曼滤波, 从而衍生出EKF-PF、UKF-PF和CKF-PF<sup>[7]</sup>, 但这类算法的时间复杂度较高, 且在重要性权值计算中很容易出现数值不稳定的情况.

粒子流滤波器(PFF)<sup>[8-11]</sup>是一种无需重要性采样和重采样过程的反馈式粒子滤波器, 通过构造同伦函数, 将先验分布粒子到后验分布粒子的变化过程描述为粒子的“流动”, 结合Fokker-Planck方程得到粒子速度场的偏微分方程, 求出速度场即可利用数值方法得到后验概率样本. 其优势在于无需重要性采样和

收稿日期: 2014-02-05; 修回日期: 2014-07-02.

基金项目: 国防预研基金项目(51401020503).

作者简介: 张宏欣(1987-), 男, 博士生, 从事非线性滤波、目标跟踪的研究; 周穗华(1962-), 男, 教授, 博士生导师, 从事目标特性及信息处理技术等研究.

重采样过程,且噪声可以是非高斯的.文献[8]直接求解泊松方程,给出了粒子速度场理论表达式的 Monte-Carlo 积分解,但其计算复杂度很高,难于实现.

与文献[8]直接求解泊松方程不同,本文在无旋场假设的基础上,将粒子速度场等效为势函数的梯度,推导其满足的偏微分方程弱形式;应用 Galerkin 有限元法和 Monte-Carlo 积分法,推导弱形式下粒子速度场的一个常数近似解.本文所提出的算法是一种完全基于数据的方法,无需拟合出样本的先验概率分布,消除了拟合可能导致的数值不稳定,且常数近似解只需要乘加运算,易于编程,算法精度较高,鲁棒性好.

## 1 粒子流滤波器

考虑如下非线性滤波问题模型:

$$x_k = a(x_{k-1}) + w_k, \quad (1)$$

$$z_k = h(x_k) + v_k. \quad (2)$$

其中:  $x_k \in \mathbf{R}^d$  为  $k$  时刻的  $d$  维状态向量,  $z_k \in \mathbf{R}^m$  为  $m$  维观测向量; 函数  $a: \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}^d$ , 函数  $h: \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}^m$ ;  $w_k \in \mathbf{R}^d$  为  $k$  时刻状态噪声向量,  $v_k \in \mathbf{R}^m$  为观测噪声向量, 噪声向量各分量为独立同分布(i.i.d).

由贝叶斯法则,  $k$  时刻状态后验概率密度函数可表示为

$$p(x_k | z_{1:k}) = \frac{p(z_k | x_k) p(x_k | z_{1:k-1})}{p(z_k | z_{1:k-1})}, \quad (3)$$

其中  $p(z_k | z_{1:k-1}) = \int_{x_k} p(z_k | x_k) p(x_k | z_{1:k-1}) dx_k$  为与状态无关的归一化常数. 为了便于表示, 设状态  $x \in \mathbf{R}^d$ , 记似然函数  $l(x) = p(z_k | x_k)$ , 先验概率分布密度  $g(x) = p(x_k | z_{1:k-1})$ , 由式(3)构造如下的对数同伦函数:

$$\begin{aligned} \log \theta(x, \gamma) &= \\ \log g(x) + \gamma \log l(x) - \log K(\gamma). \end{aligned} \quad (4)$$

其中:  $K(\gamma) = \int_{\mathbf{R}^d} g(x) h(x)^\gamma dx$  是与  $x$  无关的归一化常数;  $\gamma \in [0, 1]$ . 同伦函数  $\theta(x, \gamma)$  定义了从先验分布( $\gamma = 0$  时)到后验分布( $\gamma = 1$  时)的变化过程中的概率分布. 定义这过程中状态  $x$  的变化率为

$$\frac{dx}{d\gamma} = f(x, \gamma). \quad (5)$$

若将状态向量  $x$  视为  $\mathbf{R}^d$  空间标准基下的某一点的坐标, 则  $f(x, \gamma)$  可以看作是  $\gamma$  时刻该点上的速度, 由于  $f$  对所有粒子都有定义, 因此它表示粒子从先验分布到后验分布“流动”的速度场. 若能求得  $f$ , 即可通过数值积分方法计算后验粒子. 假设在变化过程中不存在噪声, 由随机滤波理论,  $\theta(x, \gamma)$  满足零扩散项的 Fokker-Planck 方程<sup>[10]</sup>, 有

$$\frac{\partial \theta(x, \gamma)}{\partial \gamma} = -\nabla \cdot (\theta(x, \gamma) f(x, \gamma)). \quad (6)$$

对式(4)求关于  $\gamma$  的偏导数, 结合式(6)可得

$$\left( \log l(x) - \frac{\partial \log K(\gamma)}{\partial \gamma} \right) \theta(x, \gamma) = -\nabla \cdot (\theta(x, \gamma) f(x, \gamma)). \quad (7)$$

为了便于表示, 记

$$\Phi(x, \gamma) = \left( \log l(x) - \frac{\partial \log K(\gamma)}{\partial \gamma} \right). \quad (8)$$

令  $\theta(x, \gamma) f(x, \gamma) = \nabla V(x, \gamma)$ , 式(8)变为关于函数  $V$  的  $d$  维泊松方程. 文献[8]直接采用格林公式求解  $V$ , 给出了  $f(x, \gamma)$  的一个 Monte-Carlo 积分解:

$$f(x, \gamma) \approx \frac{1}{N \theta(x, \gamma)} \sum_{i=1}^N \Phi(x_i, \gamma) \frac{c(2-d)(x-x_i)^T}{\|x-x_i\|}. \quad (9)$$

其中:  $x_i \sim \theta(x, \gamma)$ ,  $N$  为样本个数,  $c = \Gamma\left(\frac{d}{2}-1\right)/4\pi^{\frac{d}{2}}$ ,  $\alpha = \text{Tr}(C)^{\frac{d}{2}}/\beta$  为稳定项,  $C$  为  $x$  的协方差矩阵,  $\beta$  为人为调节常数. 式(9)难于处理, 主要有以下几个原因: 1) 获得合适的  $\beta$  值是困难的<sup>[8]</sup>; 2)  $\theta(x, \gamma)$  求值需要采用分布拟合算法, 计算代价过高; 3) 格林公式仅适用于  $d > 2$  的情况; 4) 这种形式的解已经被证明在数值上是不稳定的<sup>[12]</sup>. 因此, 需要寻求其他方法. 事实上, 文献[9]中仅给出了使用式(9)计算速度场的结果, 并未给出基于该式的滤波结果.

## 2 弱形式解推导

假设粒子速度场  $f(x, \gamma)$  是无旋的, 即满足  $\nabla \times f(x, \gamma) = 0$ , 则存在势函数  $\phi(x, \gamma)$  使得

$$f(x, \gamma) = \nabla \phi(x, \gamma), \quad (10)$$

代入式(7)可得

$$\Phi(x, \gamma) \theta(x, \gamma) = -\nabla \cdot (\theta(x, \gamma) \nabla \phi(x, \gamma)). \quad (11)$$

式(11)是关于函数  $\phi(x, \gamma)$  的偏微分方程, 其弱形式定义为, 对任意一阶可导函数  $\psi(x)$  满足

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^d} \nabla \cdot (\theta(x, \gamma) \nabla \phi(x, \gamma)) \psi(x) dx = \\ - \int_{\mathbf{R}^d} \Phi(x, \gamma) \theta(x, \gamma) \psi(x) dx. \end{aligned} \quad (12)$$

式(12)左端可展开为

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^d} \nabla \cdot (\theta(x, \gamma) \nabla \phi(x, \gamma)) \psi(x) dx = \\ \int_{\mathbf{R}^d} \nabla \theta(x, \gamma) \cdot \nabla \phi(x, \gamma) \psi(x) dx + \\ \int_{\mathbf{R}^d} \theta(x, \gamma) \nabla^2 \phi(x, \gamma) \psi(x) dx. \end{aligned} \quad (13)$$

对式(13)右端第1项利用高维分部积分可得

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^d} \nabla \theta(x, \gamma) \cdot \nabla \phi(x, \gamma) \psi(x) dx = \\ \int_{\Gamma} \theta(x, \gamma) \phi(x, \gamma) \nabla \psi(x) dx - \\ \int_{\mathbf{R}^d} \theta(x, \gamma) \nabla \cdot (\phi(x, \gamma) \nabla \psi(x)) dx, \end{aligned} \quad (14)$$

其中  $\Gamma$  为积分边界. 注意到边界上  $\theta(x, \gamma) = 0$ , 假设  $\phi(x, \gamma)$  是有界的, 则式(14)右端第1项为0. 将式(13)代入(14)可得

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^d} \nabla \cdot (\theta(x, \gamma) \nabla \phi(x, \gamma)) \psi(x) dx = \\ \int_{\mathbf{R}^d} \theta(x, \gamma) \nabla \phi(x, \gamma) \cdot \nabla \psi(x) dx. \end{aligned} \quad (15)$$

则式 (12) 可重写为

$$\int_{\mathbf{R}^d} \theta(x, \gamma) \nabla \phi(x, \gamma) \cdot \nabla \psi(x) dx = \int_{\mathbf{R}^d} \Phi(x, \gamma) \theta(x, \gamma) \psi(x) dx. \quad (16)$$

记  $f = f(x, \gamma)$ , 注意到  $\theta(x, \gamma)$  是从先验到后验变化过程中的概率分布, 将式 (10) 代入式 (16), 可得

$$E[f \cdot \nabla \psi] = E[\Phi(x, \gamma) \psi(x)]. \quad (17)$$

采用 Galerkin 有限元法<sup>[13]</sup>求解, 将  $f$  近似为有限维函数空间中一组基函数的线性组合, 表示为

$$f \approx \sum_{j=1}^L \kappa_j \mu_j(x, \gamma). \quad (18)$$

其中:  $\{\mu_j(x, \gamma)\}_{j=1}^L$  为基函数,  $\{\kappa_j\}_{j=1}^L$  为在该组基函数下的坐标. 代入式 (17) 可得

$$\sum_{j=1}^L \kappa_j E[\mu_j \cdot \nabla \psi] = E[\Phi(x, \gamma) \psi(x)], \quad (19)$$

其中每个基函数均为一个梯度函数, 即满足

$$\mu_j(x) = \nabla \epsilon_j(x). \quad (20)$$

用 Galerkin 法选取  $\psi(x)$  为  $\epsilon_j(x)$  的线性组合, 有

$$\psi(x) = \sum_{j=1}^L c_j \epsilon_j(x). \quad (21)$$

其中:  $\{c_j\}_{j=1}^L$  为任意一组不为零的常数,  $\psi(x)$  称为试函数. Galerkin 法的目的是求出使近似式 (18) 满足弱形式 (17) 的坐标, 从而使近似式部分地满足偏微分方程 (11). 为此将式 (20) 和 (21) 代入 (19) 得到

$$\sum_{k=1}^L c_k \sum_{j=1}^L \kappa_j E[\nabla \epsilon_j(x) \cdot \nabla \epsilon_k(x)] = \sum_{k=1}^L c_k E[\Phi(x, \gamma) \epsilon_k(x)], \quad (22)$$

消去  $c_k$  可得

$$\sum_{j=1}^L \kappa_j E[\nabla \epsilon_j(x) \cdot \nabla \epsilon_k(x)] = E[\Phi(x, \gamma) \epsilon_k(x)]. \quad (23)$$

取  $L = d$ , 则式 (23) 可转化为由  $d$  个方程组成的线性方程组  $A\kappa = b$ , 其中  $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_d)^T$ .

$$\begin{cases} (A)_{kj} = E[\nabla \epsilon_j \cdot \nabla \epsilon_k], \\ b_k = E[\Phi(x, \gamma) \epsilon_k(x)]. \end{cases} \quad (24)$$

由于系数矩阵  $A$  的每个元素均要通过积分获得, 一般情况下 Galerkin 有限元法需要较大的计算量. 为提高计算效率<sup>[14]</sup>, 可选取  $\epsilon_j(x) = x_j$  代入式 (24), 此时  $A = I$ ,  $u_j$  为  $d$  维单位向量, 则  $f \approx \kappa = b$ , 可得  $f$  的近似解为

$$f \approx E[f] = E\left[\left(\log l(x) - \frac{\partial \log K(\gamma)}{\partial \gamma}\right)x\right]. \quad (25)$$

注意到

$$\frac{\partial \log K(\gamma)}{\partial \gamma} = \int_x \theta(x) \log l(x) = E[\log l(x)]. \quad (26)$$

将式 (26) 代入 (25), 利用 Monte-Carlo 积分, 得到粒子速度场的闭集解为

$$f(x, \gamma) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\log l(x_i) - E[\log l(x_i)]) x_i, \quad (27)$$

其中  $x_i \sim \theta(x, \gamma)$ . 进一步求解便可由先验样本  $x^-$  求得后验样本  $x^+$ , 即

$$\begin{cases} x^+ = x^- + \int_0^1 f(x_\gamma) d\gamma, \\ dx_\gamma = f(x_\gamma) d\gamma. \end{cases} \quad (28)$$

则状态估计值为

$$\hat{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^+. \quad (29)$$

利用式 (28) 可以容易地设计出迭代算法, 进行滤波求解. 在高斯噪声条件下, 滤波过程只需乘加运算, 不涉及复杂矩阵操作及指数运算.

式 (27) 对每个粒子都得到相同近似值是以期望代替真实值所得到的结果. 相比于式 (9), 式 (27) 的优点在于: 1) 没有采用格林公式, 可用于一维或二维状态的估计; 2) 计算仅依赖样本, 无需估计出样本分布和调节常数; 3) 不需要对每个粒子求解. 仅考虑迭代次数, 式 (9) 的时间复杂度为  $O(N(N^2 + N))$ ; 而式 (27) 的时间复杂度仅为  $O(N)$ .

综上所述, 可设计出弱形式解粒子流滤波算法. 具体步骤如下.

Step 1: 初始化. 从初始分布  $p(x_0)$  中抽样  $N$  个样本  $x_0^i, i = 1, 2, \dots, N$ .

Step 2: 从  $k = 1$  到  $k = T$ , 执行循环 1.

Step 3: 根据状态方程 (1) 产生先验样本

$$x_k^{i-} = a(x_{k-1}^i) + w_{k-1}^i.$$

Step 4: 设置  $x_{k,n}^{i-} |_{n=0} = x_k^{i-}$ .

Step 5: 从  $n = 1$  到  $n = M$ , 执行循环 2.

Step 6: 计算预测观测值样本  $y_k^{i-} = h(x_{k,n}^{i-})$ .

Step 7: 计算样本对数似然值

$$\log l(x_{k,n}^{i-}) = (y_k - y_k^{i-})^T R^{-1} (y_k - y_k^{i-}).$$

Step 8: 根据式 (27) 计算粒子速度场  $f$ .

Step 9:  $x_{k,n}^{i-} = x_{k,n-1}^{i-} + f \Delta \gamma$ .

Step 10: 循环 2 结束.

Step 11: 得到后验样本  $x_k^i = x_{k,n}^{i-} |_{n=M}$ .

Step 12: 根据式 (29) 计算状态估计值  $\hat{x}_k$ .

Step 13: 循环 1 结束.

$T$  为观测值采样点数,  $M = 1/\Delta \gamma$ ,  $\Delta \gamma$  为积分步长. Step 5 ~ Step 10 利用了欧拉积分法, 也可以替换为其他数值积分法, 如龙格-库塔法<sup>[15]</sup>等.

### 3 结果及分析

#### 3.1 双峰后验分布模型

考虑如下一维非线性系统<sup>[16]</sup>:

$$\begin{cases} dx = x(1-x^2)dt + 0.001dv, \\ y = x^2 + 0.01x + 0.1dw. \end{cases} \quad (30)$$

其中:  $dv$  为过程噪声,  $dw$  为观测噪声, 且  $dv \sim N(0, r)$ ,  $dw \sim N(0, q)$ ,  $q, r$  为相应的噪声方差. 该模型的状态后验概率密度具有明显的双峰分布特性: 根据给定初始条件  $x_0$  的不同, 状态  $x$  会稳定在  $-1$  或  $1$  处.

令  $dt \approx \Delta t = 0.1$ , 过程噪声方差  $q = 11.92\Delta t$ , 观测噪声方差  $r = 0.077\Delta t$ , 初始估计误差  $p_0 = 0.3$ . 采用 Euler 离散化, 离散化后模型为

$$\begin{cases} x_k = x_{k-1} + x_{k-1}(1-x_{k-1}^2)\Delta t + 0.001v_k, \\ y_k = x_k^2 + 0.01x_k + 0.1w_k. \end{cases} \quad (31)$$

其中:  $v_k \sim \mathcal{N}(0, r)$ ,  $w_k \sim \mathcal{N}(0, q)$ .

分别使用 FF、PF 和 UKF 三种滤波器进行不同初始条件下的状态估计, 分别为: 1) 初始真值  $x_0 = 0.5$ , 初始估值  $\hat{x}_0 = 0.1$ ; 2)  $x_0 = -0.5$ ,  $\hat{x}_0 = 1$ . 仿真中, PF 样本数为 1000, 采用残差重采样; PFF 粒子数为 100, 为减小数值积分计算量, 采用二阶龙格-库塔法, 取积分步长  $\Delta\gamma = 0.05$ . 仿真结果如图 1 所示.

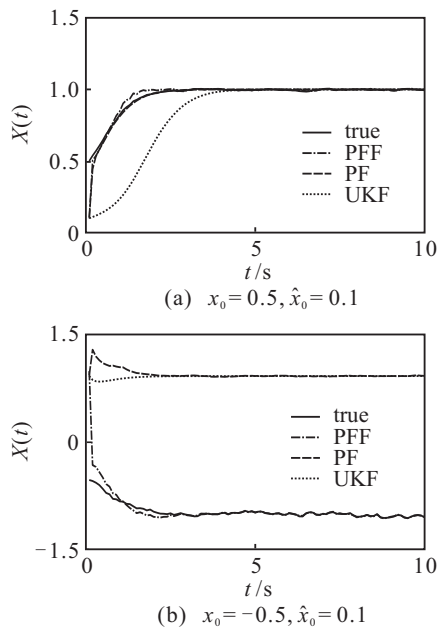


图 1 不同初始条件下滤波器的估计效果

从图 1(a) 可以看出, 在初始估计值和真实初值位于同一侧后验峰时, 3 种算法都收敛到了真实状态. 从图 1(b) 可以看出, UKF 和 PF 算法均错误收敛, 这是因为初始估计值在双峰中不包含真实状态的一侧, 导致 PF 产生的粒子集中于  $x = 1$  附近; 相似地, UKF 基于高斯分布假设, 将  $x = 1$  一侧峰近似为一个单峰高斯分布, 因而两种滤波器均错误地收敛到了  $x = 1$  处. 而 PFF 收敛到了真实状态, 这表明 PFF 能够更准确地产生后验粒子.

### 3.2 双基站只测角跟踪模型

只测角跟踪 (BOT) 具有较强的非线性特征和弱

可观测性, 对二维平面内双基站 BOT 模型进行仿真, 采用数值性能较稳定的平方根 UKF (srUKF) 和 PF 与 PFF 作对比. 目标状态模型为

$$X_k = AX_{k-1} + \Lambda Q_{k-1}. \quad (32)$$

其中:  $k$  时刻目标状态  $X_k = (x_k, v_k^{(x)}, y_k, v_k^{(y)})^T$ ,  $(x_k, y_k)$  为直角坐标系下目标位置,  $(v_k^{(x)}, v_k^{(y)})$  为目标速度;  $Q_k \sim \mathcal{N}([0, 0]^T, \Delta t I_{2 \times 2})$ ,  $\Delta t = 0.1$ ;

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \Delta t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\Lambda = \sigma_B \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \sigma_B = 0.1^2.$$

观测模型由下式给出:

$$\begin{cases} Z_k = h(X_k) + \sigma_W W_k; \\ h_j(X_k) = \arctan\left(\frac{y_k - s_y^j}{x_k - s_x^j}\right), \quad j = 1, 2. \end{cases} \quad (33)$$

其中:  $(s_x^j, s_y^j)$  为第  $j$  个观测点坐标,  $W_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$ ,  $\sigma_W = 0.07^2$ .

状态初值  $X_0 = (250, 20, 360, -20)^T$ . 滤波器初始估计值  $\hat{X}_0 = (100, 0, 100, 0)^T$ . PF 粒子数为 1000, PF 初始估计误差矩阵  $P_0 = \text{Diag}(152^2, 23^2, 265^2, 23^2)$ . 使 PF 初始样本包含真实状态, 在一定程度上避免 PF 出现样本贫化导致发散. UKF 和 PFF 的初始估计误差  $P'_0 = \text{Diag}(3.6, 0.1, 4.5, 0.1)$ , PFF 其余参数设置与 3.1 节相同. 观测点分别位于点  $(-50, 0)$  和  $(150, 0)$ , 仿真时间为 8 s, 观测值采样率为 10 Hz, 即  $\Delta t = 0.1$ .

图 2 给出了各个滤波器对 BOT 问题模型的一次跟踪实例. 由图 2 可知: 由于 PF 和 UKF 初始条件不充分 (即初始估计误差设置与真实情况偏离较大), 都在不同程度上未能准确跟踪到目标; 而 PFF 在初始条件不充分时仍能够准确地跟踪到目标轨迹, 这表明本文算法是有效的.

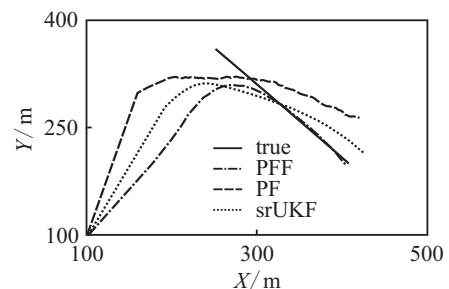


图 2 3 种滤波器的一次 BOT 跟踪结果

初始条件不变, 采用 srUKF、PFF 和 PF 各进行 100 次 Monte-Carlo 计算, 对于  $k$  时刻的某一状态分

量  $\xi_k$ , 按下式计算各个状态分量的均方根估计误差 (RMSE):

$$\text{RMSE}_{\xi}^k := \left[ \frac{1}{N_m} \sum_{i=1}^{N_m} (\xi_k^i - \hat{\xi}_k^i)^2 \right]^{1/2}. \quad (34)$$

其中:  $N_m$  为 Monte-Carlo 仿真次数;  $k = 1, 2, \dots, T$ .

图3给出了 srUKF、PF 和 PFF 的均方根估计误差随时间变化曲线。

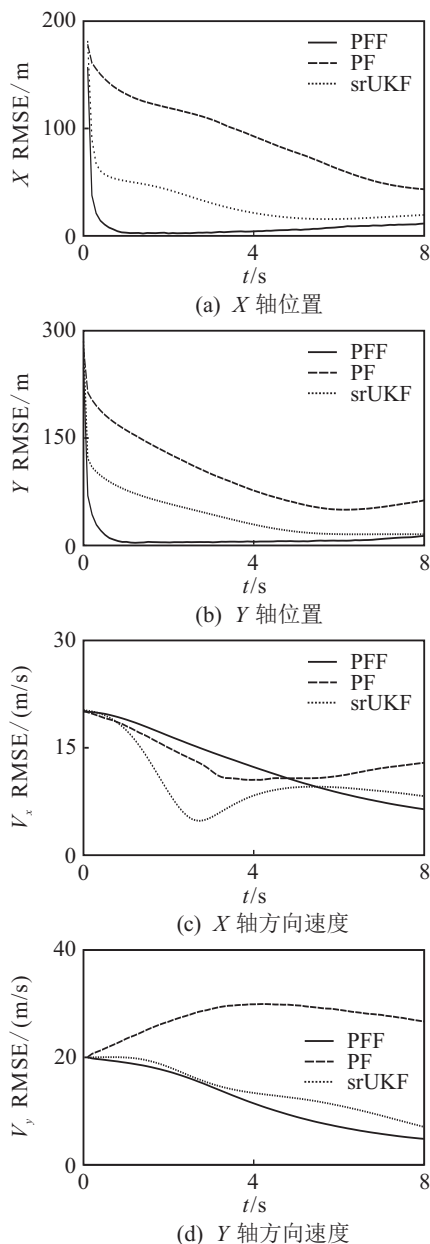


图3 状态分量随时间变化的 RMSE

由图3可知: 由于初始估计值与真实值偏差较大, 对于 X 轴和 Y 轴位置的分量, 即使将初始误差矩阵设置到合适的值, PF 算法的收敛速度仍远低于 srUKF 和 PFF, 且最终误差大于 srUKF 和 PFF; 后两者均表现出较快的收敛速度, 但 PFF 能够比 srUKF 更快地收敛, 且其估计误差要小于 srUKF. 随着目标运动远离观测点, 3 种滤波器都不同程度地出现误差增大, 这是由角度变化率下降导致位置可观测性降低的结

果. 对于 X 轴和 Y 轴方向速度, PFF 的误差均要小于 srUKF, 而 PF 则出现了较大误差.

对 3 种滤波器进行 100 次 Monte-Carlo 实验, 对于每种滤波器, 每次实验的 X 轴和 Y 轴位置的初始估计值从正态分布  $\mathcal{N}(100, 10^2)$  选择, 并按下式统计相对于时间的 RMSE, 以在不同初始估计条件下验证滤波器的鲁棒性和跟踪精度:

$$\text{RMSE}_{\xi}^i := \left[ \frac{1}{T} \sum_{k=1}^T (\xi_k^i - \hat{\xi}_k^i)^2 \right]^{1/2}, \quad (35)$$

其中  $i = 1, 2, \dots, N_m$ . 图4给出了各个状态分量的鲁棒性检验实验结果.

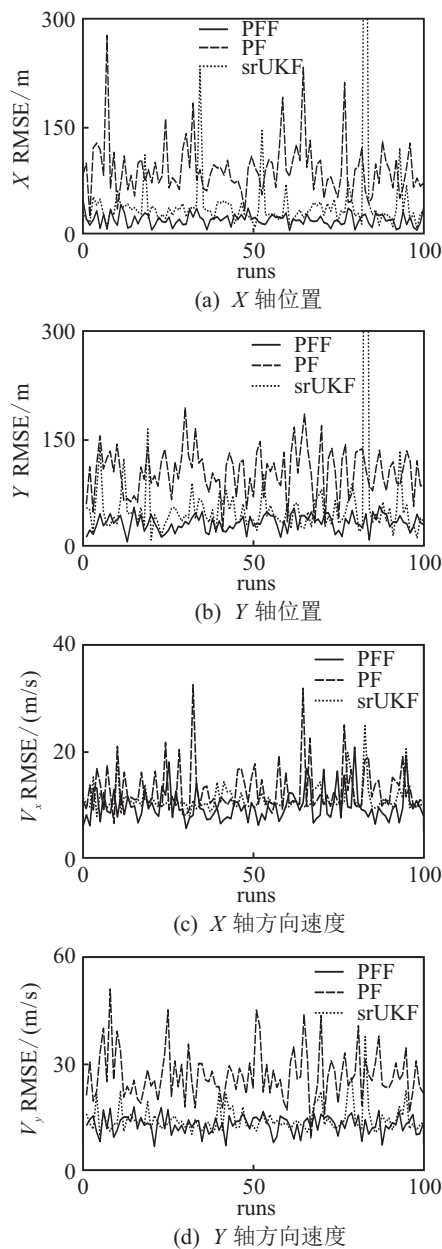


图4 状态分量 RMSE

由图4可知: PF 在大多数仿真实验中表现出很大的估计误差, 这表明其对初始估计值十分敏感, 鲁棒性较差; PFF 和 srUKF 的鲁棒性测试结果均要优于 PF, 在部分点上, 由于随机初始估计位置的影响, PFF

和UKF产生了相近的误差。srUKF在多次仿真中都出现了较大的误差,在第83次仿真实验中, $X$ 轴误差和 $Y$ 轴误差分别达到了743.4m和1016m(未在图中示出),而PFF在所有实验中都保持了较为稳定的精度,具有较好的鲁棒性。PFF通过数值积分步骤逐步反馈调整当前状态逼近后验概率样本,相比srUKF直接叠加反馈值更为稳定。表1给出了3种滤波器对于各个状态分量的平均RMSE,可以看出,PFF的平均跟踪精度要高于srUKF和PF。

表1 3种滤波器状态分量的平均RMSE

	$x/m$	$y/m$	$v_x/(m \cdot s^{-1})$	$v_y/(m \cdot s^{-1})$
PFF	19.54	31.97	9.719	12.78
srUKF	43.12	57.42	10.99	14.27
PF	90.22	103.5	12.78	26.63

以 $X$ 轴位置为例,图5给出了RMSE随粒子数 $N$ 和积分步长 $\Delta\gamma$ 变化的误差曲面。

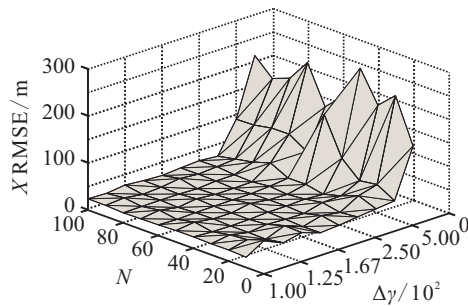


图5 随 $N$ 和 $\gamma$ 变化的 $X$ 轴位置RMSE曲面

由图5可知:粒子数量会影响粒子流滤波器的稳定性,但对精度影响较小;积分步长决定滤波精度;约在 $N > 40$ ,  $\Delta\gamma < 0.016$ 时,PFF的性能趋于稳定。

表2给出了3种算法的执行时间对比。由表2的数据可知:由于srUKF是基于确定性采样线性化的卡尔曼滤波器,其执行速度最高;作为粒子型算法,在工作参数为 $N = 100$ 、 $\Delta\gamma = 0.05$ 的条件下,PFF的执行效率高于PF;结合图5可知,PFF对粒子数量要求较低,因此限制其效率的主要因素为积分步长 $\Delta\gamma$ ,经仿真实验发现,一般取 $\Delta\gamma = 0.05$ 即可获得较好的精度。

表2 3种滤波器的平均计算时间

	执行参数	执行时间/s
srUKF	—	0.161
PF	$N = 100$	0.386
PF	$N = 1000$	3.527
PFF	$N = 100, \Delta\gamma = 0.1$	0.198
PFF	$N = 100, \Delta\gamma = 0.05$	0.306
PFF	$N = 100, \Delta\gamma = 0.01$	1.532

## 4 结论

针对粒子流滤波器中粒子速度场难于计算的问题,本文将粒子速度场等效为一个势函数的梯度,推导了速度场所满足的偏微分方程的弱形式,并运用Galerkin有限元法和Monte-Carlo积分得到了一个弱形式近似解,导出一种基于该解的粒子流滤波器,

克服了现有粒子流滤波算法时间复杂度过高和稳定性不足的缺点。分别对一维双峰后验分布模型和BOT模型进行仿真实验,以验证本文所提算法的有效性。实验结果表明,弱解形式的粒子流滤波器鲁棒性较好,精度较高,具有一定的应用前景。

## 参考文献(References)

- [1] James C. Bayesian signal processing[M]. Hoboken: John Wiley&Son Press, 2009: 3-10.
- [2] Simon J, Jeffery U, Hugh D. A new method for the nonlinear transformation of means and covariances in filters and estimators[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2000, 45(3): 477-481.
- [3] Arasaratnam I, Haykin S. Cubature Kalman filters[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2009, 56(6): 1254-1269.
- [4] Rudolph M. Sigma-Point Kalman filters for probabilistic inference in dynamic state-space models[D]. Oregon: Oregon Health & Science University, 2004: 251-256.
- [5] Gordon N J, Salmond D J, Smith A F M. Novel approach to nonlinear/non-Gaussian Bayesian state estimation[J]. IEE Proc F: Radar and Signal Processing, 1993, 140(2): 107-113.
- [6] Fred D. Nonlinear filters: Beyond Kalman filter[J]. IEEE Aero Elec Systems Magazine, 2005, 43(8): 57-69.
- [7] Rudolph M. The unscented particle filter[R]. Cambridge: Cambridge University, 2000.
- [8] Daum F. Coulomb's law particle flow for nonlinear filter[C]. Proc of SPIE on Signal Processing and Sensor Fusion. San Diego, 2011: 3351-3362.
- [9] Daum F. Numerical experiments with Coulomb's law for particle flow in nonlinear filters[C]. Proc of SPIE Conf. San Diego, 2011: 2137-2146.
- [10] Fred D, Jim H. Particle flow with non-zero diffusion for nonlinear filters[C]. Proc of SPIE on Signal Processing and Sensor Fusion. 2013: 1745-1755.
- [11] Tao D, Mark C. Implementation of the Daum-Huang exact-flow particle filter[C]. IEEE Statistical Signal Processing Workshop. Ann Arbor, 2012: 257-261.
- [12] Tao Y, Prashant M. Feedback particle filter[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2013, 58(10): 2465-2480.
- [13] Zienkiewicz C. The finite element method for solid and structure mechanics[M]. Oxford: Elsevier Press, 2005: 17-25.
- [14] Tao Y, Richard S, Sean M, et al. Multivariable feedback particle filter[C]. IEEE 51st Annual Conf on Decision and Control. Florida, 2012: 4063-4070.
- [15] Simon D. Optimal state estimation[M]. New York: John Wiley&Sons, 2006: 22-27.
- [16] Pequito S, Aguiar A, Sinopoli B. Nonlinear estimation using mean field games[C]. 2011 5th Int Conf on Network Games, Control and Optimization. Paris, 2011: 1-5.