文章编号: 1001-0920 (2015) 05-0929-05 DOI: 10.13195/j.kzyjc.2014.0311

不确定广义线性时变系统的鲁棒稳定和二次稳定

王 刚[1], 苏晓明[2], 冯 钧[1], 李 宇[1]

(1. 南京理工大学 泰州科技学院，江苏 泰州 225300；2. 沈阳工业大学 理学院，沈阳 110870)

摘 要: 针对不确定广义线性时变系统, 采用矩阵不等式的分析方法, 提出不确定广义线性时变系统鲁棒稳定和二次稳定的概念. 建立该类系统的矩阵不等式, 将该类系统的鲁棒控制问题转化为求解矩阵不等式问题, 得到该类系统鲁棒稳定和二次稳定的充分必要条件, 并给出一种状态反馈鲁棒镇定控制器的设计方法. 最后, 通过数值算例表明了所提出方法的可行性.

关键词: 广义线性时变系统；鲁棒稳定；矩阵不等式；二次稳定

中图分类号: TP13 **文献标志码:** A

Robust stability and quadratic stability for linear time-varying uncertain singular system

WANG Gang[1], *SU Xiao-ming*[2], *FENG Jun*[1], *LI Yu*[1]

(1. Taizhou Institute of Science & Technology，Nanjing University of Science & Technology，Taizhou 225300，China; 2. School of Science，Shenyang University of Technology，Shenyang 110870，China．Correspondent：WANG Gang, E-mail：f20130120@sina.com)

Abstract: Considering the linear time-varying uncertain singular system, by using the analysis method of matrix inequality, the concepts of robust stability and quadratic stability for the linear time-varying uncertain singular system are proposed. Matrix inequalities for this kind of systems are established. The problems of robust control for this kind of systems are transformed to solve the matrix inequality problem, so that the necessary and sufficient conditions of robust stability and quadratic stability are obtained for the system, and the design methods for state feedback robust stabilization controllers are presented. Finally, a numerical example is provided to illustrate the feasibility of the proposed method.

Keywords: linear time-varying singular system；robust stability；matrix inequality；quadratic stability

0 引 言

广义系统理论研究始于20世纪70年代, 由于广义系统较正常系统更具广泛性, 受到很多学者关注, 并取得了一系列研究成果[1-5]. 随着研究的不断深入, 广义定常系统基本理论体系[6-11]已经形成, 但在实际系统中更多遇到的是时变系统, 因此近年来广义时变系统逐渐开始受到国内外学者的关注. 由于其系数矩阵具有时变性, 给研究工作带来了很大困难, 取得的成果也很少. Campbell等[12]对广义时变系统的能观性进行分析, 得到了广义时变系统一直能观和渐近能观的关系. Campbell等[13]给出了广义时变系统能观和能控的判据. 张雪峰等[14]研究了广义时变系统能控和能观的必要条件, 该条件不需计算状态转移矩阵, 更加容易实现. Su等[15]研究了广义时变系统的容许性和时域有限鲁棒稳定性问题.

以上研究成果主要集中在对广义时变系统能控性和能观性的分析, 以及满足一定限定条件的广义时变系统的稳定性和鲁棒性问题研究, 对于干扰出现在任意时刻的广义时变系统的鲁棒控制问题的研究, 目前还较少见到相关报道. 本文针对参数不确定性广义时变系统, 采用矩阵不等式的分析方法, 得到该类系统在任意时刻出现干扰时的鲁棒稳定和二次稳定的充分必要条件, 并得到一族状态反馈鲁棒控制器. 分析了鲁棒稳定和二次稳定的关系, 相关判据直接基于系统的系数矩阵, 因此求解和实现较为容易. 最后, 通过数值算例表明了所提出方法的可行性.

收稿日期: 2014-03-07；**修回日期:** 2014-05-26.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61074005)；江苏省高校青蓝工程项目 (苏教师 (2014)1 号).

作者简介: 王刚(1980−), 男, 讲师, 硕士, 从事广义时变系统鲁棒控制、电力传动的研究；苏晓明(1964−), 男, 教授, 博士, 从事广义时变系统的鲁棒控制、H_∞ 控制等研究.

1 问题描述

给出参数不确定性广义时变系统

$$E(t)\dot{x}(t)=(A(t)+\Delta A(t))x(t). \tag{1}$$

其中: $x(t)\in R^n$ 为系统的状态变量; $E(t)$、$A(t)$ 为解析的时变函数矩阵, $\mathrm{rank}(E(t))=q<n$, $\Delta A(t)$ 为不确定矩阵, 且满足

$$\Delta A(t)=M(t)F(t)N(t), \tag{2}$$

$M(t)$ 和 $N(t)$ 为解析的时变函数矩阵, $F(t)$ 为具有 Lebeque 可测元的不确定时变函数矩阵, 且满足 $F^{\mathrm{T}}(t)F(t)\leqslant I$.

对于系统 (1), 当 $\Delta A(t)=0$ 时, 系统 (1) 变为

$$E(t)\dot{x}(t)=A(t)x(t). \tag{3}$$

系统 (3) 称为 (1) 的标称系统.

定义 1[16] 如果系统 (3) 是一致正则、渐近稳定、无脉冲的, 则称系统 (3) 是容许的.

定义 2 如果对于满足条件 (2) 的所有不确定性 $\Delta A(t)$, 系统 (2) 都是容许的, 则称参数不确定性广义时变系统 (1) 鲁棒稳定.

引理 1[16] 假设广义时变系统 (3) 解析可解, 则系统 (3) 容许的充分必要条件是如下 Lyapunov 不等式有解:

$$\begin{aligned}&A^{\mathrm{T}}(t)V(t)+V^{\mathrm{T}}(t)A(t)+\\&E^{\mathrm{T}}(t)\dot{V}(t)+\dot{E}^{\mathrm{T}}(t)V(t)<0,\\&E^{\mathrm{T}}(t)V(t)=V^{\mathrm{T}}(t)E(t)\geqslant 0,\\&\dot{E}^{\mathrm{T}}(t)V(t)\geqslant 0.\end{aligned} \tag{4}$$

由定义 2 和引理 1 可见, 如果系统 (1) 鲁棒稳定, 则满足 Lyapunov 不等式

$$\begin{aligned}&(A(t)+\Delta A(t))^{\mathrm{T}}V(t)+V^{\mathrm{T}}(t)(A(t)+\\&\Delta A(t))+E^{\mathrm{T}}(t)\dot{V}(t)+\dot{E}^{\mathrm{T}}(t)V(t)<0,\\&E^{\mathrm{T}}(t)V(t)=V^{\mathrm{T}}(t)E(t)\geqslant 0,\\&\dot{E}^{\mathrm{T}}(t)V(t)\geqslant 0.\end{aligned} \tag{5}$$

引理 2[17] 对于任意 $x(t)\in R^n$, 有

$$\begin{aligned}&\max\{(x^{\mathrm{T}}MF(t)Nx)^2|F^{\mathrm{T}}(t)F(t)\leqslant I\}=\\&(x^{\mathrm{T}}MM^{\mathrm{T}}x)(x^{\mathrm{T}}N^{\mathrm{T}}Nx),\end{aligned}$$

其中 M 和 N 为适当维数的实矩阵.

引理 3[17] 设矩阵 M、N、$P\in R^n$, 满足 $M\geqslant 0$, $N\geqslant 0$ 和 $P<0$, 若对于任意非零向量 $x(t)\in R^n$,有

$$(x^{\mathrm{T}}Px)^2-4(x^{\mathrm{T}}MM^{\mathrm{T}}x)(x^{\mathrm{T}}N^{\mathrm{T}}Nx)>0,$$

则存在常数 $\lambda>0$, 使得下式成立:

$$\lambda^2M+\lambda P+N<0.$$

2 鲁棒稳定及鲁棒镇定器设计

对于参数不确定性广义线性时变系统 (1), 存在如下鲁棒稳定性判据不等式.

定理 1 不确定广义线性时变系统 (1) 是鲁棒稳定的, 当且仅当存在可逆矩阵 $V(t)\in R^{n\times n}$ 和常数 $\varepsilon>0$, 使得如下矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix}G & \varepsilon^{-1}V^{\mathrm{T}}(t)M(t) & \varepsilon N^{\mathrm{T}}(t)\\ \varepsilon^{-1}M^{\mathrm{T}}(t)V(t) & -I & 0\\ \varepsilon N(t) & 0 & -I\end{bmatrix}<0,$$

$$\begin{aligned}&G=A^{\mathrm{T}}(t)V(t)+V^{\mathrm{T}}(t)A(t)+\\&\quad E^{\mathrm{T}}(t)\dot{V}(t)+\dot{E}^{\mathrm{T}}(t)V(t),\\&E^{\mathrm{T}}(t)V(t)=V^{\mathrm{T}}(t)E(t)\geqslant 0,\\&\dot{E}^{\mathrm{T}}(t)V(t)\geqslant 0.\end{aligned} \tag{6}$$

证明 对于不等式 (6), 应用 Schur 引理, 可得式 (6) 与下式等价:

$$\begin{aligned}&A^{\mathrm{T}}(t)V(t)+V^{\mathrm{T}}(t)A(t)+E^{\mathrm{T}}(t)\dot{V}(t)+\\&\dot{E}^{\mathrm{T}}(t)V(t)+\varepsilon^{-2}V^{\mathrm{T}}(t)M(t)M^{\mathrm{T}}(t)V(t)+\\&\varepsilon^2N^{\mathrm{T}}(t)N(t)<0,\\&E^{\mathrm{T}}(t)V(t)=V^{\mathrm{T}}(t)E(t)\geqslant 0,\\&\dot{E}^{\mathrm{T}}(t)V(t)\geqslant 0.\end{aligned} \tag{7}$$

1) 充分性. 假设存在可逆矩阵 $V(t)$ 和常数 ε, 使得矩阵不等式 (7) 成立, 则对于满足条件 (2) 的所有不确定性 $\Delta A(t)$, 有

$$\begin{aligned}&(A(t)+\Delta A(t))^{\mathrm{T}}V(t)+V^{\mathrm{T}}(t)(A(t)+\Delta A(t))+\\&E^{\mathrm{T}}(t)\dot{V}(t)+\dot{E}^{\mathrm{T}}(t)V(t)=\\&E^{\mathrm{T}}(t)\dot{V}(t)+\dot{E}^{\mathrm{T}}(t)V(t)+\\&(A(t)+M(t)F(t)N(t))^{\mathrm{T}}V(t)+\\&V^{\mathrm{T}}(t)(A(t)+M(t)F(t)N(t))=\\&E^{\mathrm{T}}(t)\dot{V}(t)+\dot{E}^{\mathrm{T}}(t)V(t)+A^{\mathrm{T}}(t)V(t)+\\&V^{\mathrm{T}}(t)A(t)+N^{\mathrm{T}}(t)F^{\mathrm{T}}(t)M^{\mathrm{T}}(t)V(t)+\\&V^{\mathrm{T}}(t)M(t)F(t)N(t)\leqslant\\&E^{\mathrm{T}}(t)\dot{V}(t)+\dot{E}^{\mathrm{T}}(t)V(t)+A^{\mathrm{T}}(t)V(t)+\\&V^{\mathrm{T}}(t)A(t)+\varepsilon^{-2}V^{\mathrm{T}}(t)M(t)M^{\mathrm{T}}(t)V(t)+\\&\varepsilon^2N^{\mathrm{T}}(t)N(t)<0.\end{aligned}$$

进而有

$$\begin{aligned}&(A(t)+\Delta A(t))^{\mathrm{T}}V(t)+V^{\mathrm{T}}(t)(A(t)+\Delta A(t))+\\&E^{\mathrm{T}}(t)\dot{V}(t)+\dot{E}^{\mathrm{T}}(t)V(t)<0,\\&E^{\mathrm{T}}(t)V(t)=V^{\mathrm{T}}(t)E(t)\geqslant 0,\\&\dot{E}^{\mathrm{T}}(t)V(t)\geqslant 0.\end{aligned}$$

所以系统 (1) 是鲁棒稳定的.

2) 必要性. 假设系统 (1) 鲁棒稳定, 则对于满足条件 (2) 的所有不确定性 $\Delta A(t)$, 存在可逆矩阵 $V(t)$ 使得式 (5) 成立, 即

$$E^{\mathrm T}(t)\dot V(t)+\dot E^{\mathrm T}(t)V(t)+A^{\mathrm T}(t)V(t)+V^{\mathrm T}(t)A(t)+$$
$$N^{\mathrm T}(t)F^{\mathrm T}(t)M^{\mathrm T}(t)V(t)+V^{\mathrm T}(t)M(t)F(t)N(t)<0.$$

令

$$P=E^{\mathrm T}(t)\dot V(t)+\dot E^{\mathrm T}(t)V(t)+$$
$$A^{\mathrm T}(t)V(t)+V^{\mathrm T}(t)A(t),$$

对于任意非零向量 $x(t)\in R^n$, 有

$$x^{\mathrm T}Px<-2x^{\mathrm T}V^{\mathrm T}(t)M(t)F(t)N(t)x.$$

进而有

$$x^{\mathrm T}Px<$$
$$-2\max\{x^{\mathrm T}V^{\mathrm T}(t)M(t)F(t)N(t)x|F^{\mathrm T}(t)F(t)\leqslant I\}\leqslant 0.$$

因此有

$$(x^{\mathrm T}Px)^2>$$
$$4\max\{(x^{\mathrm T}V^{\mathrm T}(t)M(t)F(t)N(t)x)^2|F^{\mathrm T}(t)F(t)\leqslant I\}.$$

由引理 2 可得

$$(x^{\mathrm T}Px)^2>$$
$$4(x^{\mathrm T}V^{\mathrm T}(t)M(t)M^{\mathrm T}(t)V(t)x)(x^{\mathrm T}N^{\mathrm T}(t)N(t)x),$$

由引理 3 可得, 存在常数 $\lambda>0$, 使得下式成立:

$$N^{\mathrm T}(t)N(t)+\lambda P+\lambda^2V^{\mathrm T}(t)M(t)M^{\mathrm T}(t)V(t)<0.$$

上式两端同除以 λ, 并令 $\lambda=\varepsilon^{-2}$, 可得

$$E^{\mathrm T}(t)\dot V(t)+\dot E^{\mathrm T}(t)V(t)+A^{\mathrm T}(t)V(t)+V^{\mathrm T}(t)A(t)+$$
$$\varepsilon^{-2}V^{\mathrm T}(t)M(t)M^{\mathrm T}(t)V(t)+\varepsilon^{-2}N^{\mathrm T}(t)N(t)<0.$$

应用 Schur 补引理, 可得式 (6) 成立. □

通过鲁棒稳定性判据, 进一步讨论闭环不确定广义时变系统鲁棒镇定问题. 考虑系统

$$E(t)\dot x(t)=$$
$$(A(t)+\Delta A(t))x(t)+(B(t)+\Delta B(t))u(t),\tag{8}$$

其中 $\Delta A(t)$ 和 $\Delta B(t)$ 为不确定时变矩阵, 且满足

$$[\Delta A(t)\ \ \Delta B(t)]=F(t)M(t)[N_1(t)\ \ N_2(t)],$$
$$F^{\mathrm T}(t)F(t)\leqslant I.$$

当 $\Delta A(t)=0$ 且 $\Delta B(t)=0$ 时, 系统 (8) 变为

$$E(t)\dot x(t)=A(t)x(t)+B(t)u(t).\tag{9}$$

系统 (9) 称为 (8) 的标称系统.

引入状态反馈

$$u(t)=K(t)x(t),\tag{10}$$

则反馈 (10) 和系统 (8) 构成闭环系统

$$E(t)\dot x(t)=(A_c(t)+\Delta A_c(t))x(t).\tag{11}$$

其中

$$A_c(t)=A(t)+B(t)K(t),$$
$$\Delta A_c(t)=\Delta A(t)+\Delta B(t)K(t).$$

定义 3 如果通过状态反馈 (10), 可使闭环系统 (11) 鲁棒稳定, 则 $K(t)$ 称为系统 (11) 的鲁棒镇定控制器.

定理 2 若存在可逆矩阵 $V(t)\in R^{n\times n}$ 和常数 $\varepsilon>0$, 使得如下矩阵不等式 (以下省略时间变量, 但各矩阵仍为时变的) 成立:

$$\begin{bmatrix} H & \sqrt2\varepsilon^{-1}M & \varepsilon V^{\mathrm T}{N_1}^{\mathrm T}\\ \sqrt2\varepsilon^{-1}M^{\mathrm T} & -I & 0\\ \varepsilon N_1V & 0 & -I\end{bmatrix}<0,$$
$$H=V^{\mathrm T}E^{\mathrm T}\dot V^{-1}V+V^{\mathrm T}\dot V^{\mathrm T}+AV+V^{\mathrm T}A^{\mathrm T}-$$
$$B(I+\varepsilon^2{N_2}^{\mathrm T}N_2)^{-1}B^{\mathrm T},$$
$$E^{\mathrm T}(t)V(t)=V^{\mathrm T}(t)E(t)\geqslant 0,$$
$$\dot E^{\mathrm T}(t)V(t)\geqslant 0.\tag{12}$$

则存在鲁棒镇定控制器 (10) 使得闭环系统是鲁棒稳定的. 若式 (12) 成立, 则所求鲁棒镇定控制器为

$$K(t)=-(I+\varepsilon^2{N_2}^{\mathrm T}(t)N_2(t))^{-1}B^{\mathrm T}(t).\tag{13}$$

证明 假设存在可逆矩阵 $V(t)$ 和常数 $\varepsilon>0$, 使得式 (12) 成立, $K(t)$ 由式 (13) 给出. 令

$$Y(t)=\begin{bmatrix} V(t)^{-1} & 0 & 0\\ 0 & I & 0\\ 0 & 0 & I\end{bmatrix},$$

对矩阵不等式 (12) 左乘矩阵 $Y(t)^{-1}$ 和右乘矩阵 $Y(t)$, 并且令 $X(t)=V(t)^{-1}$, 整理可得 (省略时间变量 t)

$$\begin{bmatrix} I & \sqrt2\varepsilon^{-1}X^{\mathrm T}M & \varepsilon{N_1}^{\mathrm T}\\ \sqrt2\varepsilon^{-1}M^{\mathrm T}X & -I & 0\\ \varepsilon N_1 & 0 & -I\end{bmatrix}<0,$$
$$I=A^{\mathrm T}X+X^{\mathrm T}A+E^{\mathrm T}\dot X+\dot E^{\mathrm T}X-$$
$$X^{\mathrm T}B(I+\varepsilon^2{N_2}^{\mathrm T}N_2)^{-1}B^{\mathrm T}X,$$
$$E^{\mathrm T}X=X^{\mathrm T}E\geqslant 0,$$
$$\dot E^{\mathrm T}X\geqslant 0.\tag{14}$$

令

$$\hat Q=$$
$$A^{\mathrm T}(t)X(t)+X^{\mathrm T}(t)A(t)+E^{\mathrm T}(t)\dot X(t)+$$
$$\dot E^{\mathrm T}(t)X(t)+2\varepsilon^{-2}X^{\mathrm T}(t)M(t)M^{\mathrm T}(t)X(t)+$$
$$\varepsilon^2{N_1}^{\mathrm T}(t)N_1(t)-X^{\mathrm T}(t)B(t)(I+$$
$$\varepsilon^2{N_2}^{\mathrm T}(t)N_2(t))^{-1}B^{\mathrm T}(t)X(t)<0.\tag{15}$$

因为

$$\Delta A_c(t)=\Delta A(t)+\Delta B(t)K(t)=$$
$$[M(t)\ \ N(t)]\begin{bmatrix} F(t) & 0\\ 0 & F(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} N_1(t)\\ N_2(t)K(t)\end{bmatrix}=$$
$$\bar M(t)\bar F(t)\bar N(t),$$

其中

$$\bar{M}(t)=[M(t)\ \ M(t)],$$

$$\bar{F}(t)=\begin{bmatrix}F(t) & 0\\ 0 & F(t)\end{bmatrix},\ \bar{N}(t)=\begin{bmatrix}N_1(t)\\ N_2(t)K(t)\end{bmatrix},$$

$$F^{\mathrm{T}}(t)F(t)\leqslant I.$$

所以有 $\bar{F}^{\mathrm{T}}(t)\bar{F}(t)\leqslant I$. 于是

$$\begin{aligned}&Q=\\&A_c{}^{\mathrm{T}}(t)X(t)+X^{\mathrm{T}}(t)A_c(t)+E^{\mathrm{T}}(t)\dot{X}(t)+\\&\dot{E}^{\mathrm{T}}(t)X(t)+\varepsilon^2\bar{N}^{\mathrm{T}}(t)\bar{N}(t)+\\&\varepsilon^{-2}X^{\mathrm{T}}(t)\bar{M}(t)\bar{M}^{\mathrm{T}}(t)X(t)=\\&A^{\mathrm{T}}(t)X(t)+X^{\mathrm{T}}(t)A(t)+E^{\mathrm{T}}(t)\dot{X}(t)+\\&\dot{E}^{\mathrm{T}}(t)X(t)+K^{\mathrm{T}}(t)B^{\mathrm{T}}(t)X(t)+\\&X^{\mathrm{T}}(t)B(t)K(t)+2\varepsilon^{-2}X^{\mathrm{T}}(t)M(t)M^{\mathrm{T}}(t)X(t)+\\&\varepsilon^2N_1{}^{\mathrm{T}}(t)N_1(t)+\varepsilon^2K(t)N_2{}^{\mathrm{T}}(t)N_2(t)K(t).\end{aligned}\tag{16}$$

将 $K(t)$ 代入式 (16), 整理可得 $Q+K^{\mathrm{T}}(t)K(t)=\hat{Q}$, 由式 (15) 和 (16) 可得 $Q<0$, 则有

$$\begin{aligned}&A_c{}^{\mathrm{T}}(t)X(t)+X^{\mathrm{T}}(t)A_c(t)+E^{\mathrm{T}}(t)\dot{X}(t)+\\&\dot{E}^{\mathrm{T}}(t)X(t)+\varepsilon^2\bar{N}^{\mathrm{T}}(t)\bar{N}(t)+\\&\varepsilon^{-2}X^{\mathrm{T}}(t)\bar{M}(t)\bar{M}^{\mathrm{T}}(t)X(t)<0.\end{aligned}$$

由 Schur 补引理, 可得

$$\begin{bmatrix}J & \varepsilon^{-1}X^{\mathrm{T}}(t)\bar{M}(t) & \varepsilon\bar{N}^{\mathrm{T}}(t)\\ \varepsilon^{-1}\bar{M}^{\mathrm{T}}(t)X(t) & -I & 0\\ \varepsilon\bar{N}(t) & 0 & -I\end{bmatrix}<0,$$

$$\begin{aligned}J=\ &A_c^{\mathrm{T}}(t)X(t)+X^{\mathrm{T}}(t)A_c(t)+\\&E^{\mathrm{T}}(t)\dot{X}(t)+\dot{E}^{\mathrm{T}}(t)X(t).\end{aligned}$$

由定理 1 可知, 闭环广义时变系统 (16) 鲁棒稳定. □

3 二次稳定

对于系统 (1), 取广义 Lyapunov 函数

$$V(t)=x^{\mathrm{T}}(t)E^{\mathrm{T}}(t)V(t)x(t),\tag{17}$$

其中 $V(t)\in R^{n\times n}$. 在式 (17) 中对 t 求导, 可得

$$\begin{aligned}&\dot{V}(t)=\\&x^{\mathrm{T}}(t)\{E^{\mathrm{T}}(t)\dot{V}(t)+\dot{E}^{\mathrm{T}}(t)V(t)+\\&(A(t)+\Delta A(t))^{\mathrm{T}}V(t)+V^{\mathrm{T}}(t)(A(t)+\Delta A(t))\}x(t).\end{aligned}\tag{18}$$

定义 4 对于系统 (1), 存在矩阵 $V(t)\in R^{n\times n}$ 和正定矩阵 $W(t)\in R^{n\times n}$, 使得系统 (1) 满足

$$\begin{aligned}&(A(t)+\Delta A(t))^{\mathrm{T}}V(t)+V^{\mathrm{T}}(t)(A(t)+\Delta A(t))+\\&E^{\mathrm{T}}(t)\dot{V}(t)+\dot{E}^{\mathrm{T}}(t)V(t)\leqslant W(t),\\&E^{\mathrm{T}}(t)V(t)=V^{\mathrm{T}}(t)E(t)\geqslant 0,\\&\dot{E}^{\mathrm{T}}(t)V(t)\geqslant 0.\end{aligned}\tag{19}$$

定理 3 若系统 (1) 满足不确定条件 (2), 则系统 (1) 二次稳定性和鲁棒稳定性是等价的.

证明 1) 必要性. 根据定义 4, 如果系统 (1) 二次稳定, 则一定存在矩阵 $V(t)\in R^{n\times n}$ 和正定矩阵 $W(t)\in R^{n\times n}$ 满足式 (19), 所以有

$$\begin{aligned}&(A(t)+\Delta A(t))^{\mathrm{T}}V(t)+V^{\mathrm{T}}(t)(A(t)+\\&\Delta A(t))+E^{\mathrm{T}}(t)\dot{V}(t)+\dot{E}^{\mathrm{T}}(t)V(t)\leqslant\\&-W(t)<0,\end{aligned}$$

系统 (1) 鲁棒稳定.

2) 充分性. 若系统 (1) 鲁棒稳定, 则由定理 1 可得存在可逆矩阵 $V(t)$, 满足

$$\begin{aligned}&E^{\mathrm{T}}(t)\dot{V}(t)+\dot{E}^{\mathrm{T}}(t)V(t)+A^{\mathrm{T}}(t)V(t)+\\&V^{\mathrm{T}}(t)A(t)+\varepsilon^{-2}V^{\mathrm{T}}(t)M(t)M^{\mathrm{T}}(t)V(t)+\\&\varepsilon^{-2}N^{\mathrm{T}}(t)N(t)<0,\\&E^{\mathrm{T}}(t)V(t)=V^{\mathrm{T}}(t)E(t)\geqslant 0,\\&\dot{E}^{\mathrm{T}}(t)V(t)\geqslant 0.\end{aligned}\tag{20}$$

由于

$$\begin{aligned}&(A(t)+\Delta A(t))^{\mathrm{T}}V(t)+V^{\mathrm{T}}(t)(A(t)+\\&\Delta A(t))+E^{\mathrm{T}}(t)\dot{V}(t)+\dot{E}^{\mathrm{T}}(t)V(t)=\\&(A(t)+M(t)F(t)N(t))^{\mathrm{T}}V(t)+\\&V^{\mathrm{T}}(t)(A(t)+M(t)F(t)N(t))+\\&E^{\mathrm{T}}(t)\dot{V}(t)+\dot{E}^{\mathrm{T}}(t)V(t)=\\&E^{\mathrm{T}}(t)\dot{V}(t)+\dot{E}^{\mathrm{T}}(t)V(t)+A^{\mathrm{T}}(t)V(t)+\\&V^{\mathrm{T}}(t)A(t)+N^{\mathrm{T}}(t)F^{\mathrm{T}}(t)M^{\mathrm{T}}(t)V(t)+\\&V^{\mathrm{T}}(t)M(t)F(t)N(t)\leqslant\\&E^{\mathrm{T}}(t)\dot{V}(t)+\dot{E}^{\mathrm{T}}(t)V(t)+\\&A^{\mathrm{T}}(t)V(t)+V^{\mathrm{T}}(t)A(t)+\\&\varepsilon^{-2}V^{\mathrm{T}}(t)M(t)M^{\mathrm{T}}(t)V(t)+\varepsilon^2N^{\mathrm{T}}(t)N(t).\end{aligned}$$

由式 (20), 可得 $W(t)>0$, 式 (19) 成立, 系统 (1) 二次稳定. □

4 数值算例

例 1 对于系统 (1), 各系数矩阵为

$$E(t)=\begin{bmatrix}t & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ A(t)=\begin{bmatrix}-(1+t) & 0\\ 0 & t\end{bmatrix},$$

$$B(t)=\begin{bmatrix}-t & 0\\ 1 & t\end{bmatrix},\ D(t)=\begin{bmatrix}0.1\\ -0.5t\end{bmatrix},$$

$$M_1(t)=[\mathrm{e}^{-t}\ \ 1],\ M_2(t)=[0.1t\ \ 0].$$

令 $\varepsilon=1$, 经计算可得

$$V(t)=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^t & 0\\ 0 & -t\end{bmatrix},$$

满足矩阵不等式 (12), 进而可得状态反馈鲁棒镇定控

制器增益

$$K(t)=\begin{bmatrix}\dfrac{t\mathrm{e}^{-t}}{1+0.01t^2} & \dfrac{t^{-1}}{1+0.01t^2}\\ 0 & 1\end{bmatrix},$$

满足闭环系统 (11) 是鲁棒稳定的.

5 结 论

本文通过矩阵不等式方法研究了不确定广义线性时变系统鲁棒稳定和二次稳定的判别问题, 得到了该类系统鲁棒稳定和二次稳定的判据, 并给出了一族状态反馈鲁棒镇定控制器的设计方法. 分析了鲁棒稳定与二次稳定的关系问题, 为进一步研究广义时变系统的相关复杂控制问题做出了贡献.

参考文献(References)

[1] Haidar A, Boukas E K, Xu S, et al. Exponential stability and static output feedback stabilisation of singular time-delay systems with saturating actuators[J]. IET Control Theory and Applications, 2009, 9(3): 1293-1305.

[2] Zhu S, Zhang C, Cheng Z, et al. Delay-dependent robust stability criteria for two classes of uncertain singular time-delay systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2007, 52, (5): 880-885.

[3] Zhou Jian-ping, Xu Sheng-yuan, Zhang Bao-yong, et al. Robust exponential stability of uncertain stochastic neural networks with distributed delays and reaction-diffusions[J]. IEEE Trans on Neural Networks and Learning Systems, 2012, 23(9): 1407-1416.

[4] Xu S, Van Dooren P, Stefan R, et al. Robust stability and stabilization for singular systems with state delay and parameter uncertainty[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2002, 47(7): 1122-1128.

[5] 苏晓明, 王刚, 吕明珠. 广义不确定周期时变系统的鲁棒镇定控制[J]. 东北大学学报: 自然科学版, 2006, 27(7): 716 -719.
(Su X M, Wang G, Lv M Z. Robust stabilization for generalized periodically time-varying uncertain descriptor systems[J]. J of Northeastern University: Natural Science, 2006, 27(7): 716-719.)

[6] Kwang Ki, Kim K, Richard D, et al. Robustness analysis of uncertain linear descriptor systems: Unified approaches using gLFTs, LMIs and μ[J]. American Control Conf, 2013: 5857-5862.

[7] 徐胜元, 牛玉刚, 杨成梧. 参数不确定奇异系统的鲁棒 H_∞ 控制[J]. 自动化学报, 2001, 27(3): 397-400.
(Xu S Y, Niu Y G, Yang C W. Robust H_∞ control for singular systems with parameter uncertainty[J]. Acta Automatica Sinica, 2001, 27(3): 397-400.)

[8] Duan G R. Analysis and design of descriptor linear systems[M]. New York: Springer Verlag, 2010.

[9] 苏晓明, 吕明珠. 广义不确定周期时变系统的鲁棒稳定性分析[J]. 自动化学报, 2006, 32(4): 481-488.
(Su X M, Lü M Z. Analysis of robust stability for linear time-varying uncertain periodically descriptor systems[J]. Acta Automatica Sinica, 2006, 32(4): 481-488.)

[10] Xu S Y, Yang C W. An algebraic approach to the robust stability analysis and robust stabilization of uncertain singular systems[J]. Int J of Control, 2000, 31(1) : 55-61.

[11] Ma Shu-ping, Boukas E K. Stability and robust stabilization for uncertain discrete stochastic hybrid singular systems with time-delay[C]. Proc of the 47th IEEE Conf on Decision and Control. Mexico, 2008: 3415-3420.

[12] Campbell S L, Terrel W J. Observability of linear time varying descriptor systems[J]. SIAM J Matrix Anal Applicat, 1991, 12(4): 484-496.

[13] Campbell S L, Terrel W J, Nichols N K. Duality, observability and controllability for linear time-varying descriptor systems[J]. Circuits, System Signal Process, 1991, 10(4): 455-470.

[14] 张雪峰, 张庆灵. 线性时变广义系统的能控性与能观性问题[J]. 自动化学报, 2009, 35(9): 1249-1253.
(Zhang X F, Zhang Q L. On controllability and observability of linear time-varying singular systems[J]. Acta Automatica Sinica, 2009, 35(9): 1249-1253.)

[15] Su Xiao-ming, Meng Fei. Finite time domain robust stability analysis of time-varying descriptor systems[J]. J of Computational Information Systems, 2013, 22(5): 572-575.

[16] 王刚, 苏晓明, 孟飞. 一般广义时变系统的容许性和二次容许性[J]. 控制与决策, 2014, 29(2): 221-225.
(Wang G, Su X M, Meng F. Admissibility and quadratic admissibility for time-varying general singular system[J]. Control and Decision, 2014, 29(2): 221-225.)

[17] 杨冬梅, 张庆灵. 广义系统[M]. 北京: 科学教育出版社, 2004: 9-10.
(Yang D M, Zhang Q L. Singular system[M]. Beijing: Science and Technology Education Press, 2004: 9-10.)

(责任编辑: 郑晓蕾)