

基于反双曲正弦函数的扩张状态观测器

周涛

(洛阳师范学院 物理与电子信息学院, 河南 洛阳 471022)

摘要: 首先, 采用反双曲正弦函数设计一种三阶扩张状态观测器, 利用 Lyapunov 函数证明三阶扩张状态观测器误差系统渐近稳定; 然后, 利用反双曲正弦函数选取扩张状态观测器初始阶段的参数, 以抑制微分峰值现象; 最后, 通过仿真实验结果, 表明了所提出的三阶扩张状态观测器能够获取二阶系统各状态变量和非线性扰动高精度的估计值, 而且能够较好地抑制微分峰值。

关键词: 反双曲正弦函数; 扩张状态观测器; Lyapunov 函数; 微分峰值现象

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Extended state observer based on inverse hyperbolic sine function

ZHOU Tao

(School of Physics and Electronics Information, Luoyang Normal University, Luoyang 471022, China. E-mail: zhoutao041@163.com)

Abstract: Firstly, a third-order extended state observer(ESO) with an inverse hyperbolic sine function is designed. The stability of a third-order ESO error system is proved with the Lyapunov function. Then, the ESO parameters' values during the initial phase are determined with the inverse hyperbolic sine function in order to restrain the derivative peaking phenomenon. Finally, the simulation results show that the ESO can obtain higher precision estimations of all the state variables and non-linear disturbance and restrain the derivative peaking well.

Key words: inverse hyperbolic sine function; extended state observer; Lyapunov function; derivative peaking phenomenon

0 引言

在设计状态反馈控制系统时, 通常需要获取系统的各状态变量, 但是, 在许多情况下它们无法直接测量, 如果系统包含不确定性和未知扰动, 则系统各状态变量的测量将更加困难. 目前, 通常利用各种状态观测器估计系统的状态变量, 一般状态观测器的构造不仅需要控制输入和系统输出, 而且需要系统状态方程的相关矩阵, 因此, 状态观测器的实现往往比较困难. 文献[1]提出了扩张状态观测器(ESO)的概念. 扩张状态观测器根据被控对象的实际输出信号 $y(t)$ 和控制输入 $u(t)$, 实时估计出对象的状态变量以及作用于被控对象的扰动总和, 而扰动总和是一个扩张的状态变量. 利用扩张状态观测器可将非线性、不确定性系统近似线性化和确定化, 它是自抗扰控制器的一个核心. 近年来, ESO 已得到了广泛的应用^[2-6].

根据检索的结果, 目前, 专门研究扩张观测器的

文献并不多见. 文献[6]对利用 $\text{fal}(\cdot)$ 和 $\text{fhan}(\cdot)$ 函数的经典扩张观测器进行了系统论述. 文献[7]设计了一种线性高增益扩张观测器, 通过选取充分大的增益参数来保证估计精度. 文献[8]提出了一种三阶离散的线性 ESO 结构, 并进行了稳定性分析. 文献[9]利用非连续的分段 Lyapunov 函数进行二阶扩张状态观测器的误差分析与估计, 并用多 Lyapunov 函数方法证明了系统的稳定性.

本文应用反双曲正弦函数构造一种三阶扩张状态观测器以及设定 ESO 初始阶段的参数. 首先, 分析了反双曲正弦函数的一些特性; 然后, 利用反双曲正弦函数设计二阶系统的扩张状态观测器, 并利用 Lyapunov 函数证明了三阶 ESO 观测误差系统渐近稳定; 最后, 研究了利用反双曲正弦函数设定 ESO 初始阶段的参数, 以有效抑制微分峰值现象. 数字仿真实验验证了该扩张状态观测器的有效性.

收稿日期: 2014-03-08; 修回日期: 2014-05-26.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61273161); 国家863计划项目(2009AA7043001).

作者简介: 周涛(1970-), 男, 副教授, 博士, 从事高精度伺服系统、非线性控制等研究.

1 反双曲正弦函数的特性

反双曲正弦函数 $\operatorname{arsh} x$ 为奇函数, 且光滑连续. 由于 $\lim_{x \rightarrow \infty} (\operatorname{arsh} x)' = 0$, 当 $|x|$ 很大时, 函数值接近 0. 由泰勒中值定理可知, 在 $x = 0$ 的邻域内, 即 $|x|$ 很小时, $\operatorname{arsh} x \approx x$, 它近似为线性函数. 在函数 $a_0 \cdot \operatorname{arsh}(b_0 x)$ 中, 参数 a_0 和 b_0 可调节 $\operatorname{arsh} x$ 的函数值和变化率. 反双曲正弦函数可使得 ESO 具有理想的状态估计效果, 系统响应快速而平稳.

2 扩张状态观测器的设计和分析

2.1 扩张状态观测器的设计

设二阶系统为

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = f(x_1, x_2) + bu(t). \end{cases} \quad (1)$$

其中: $b > 0$; 假设 $f(x_1, x_2)$ 为系统的未知非线性扰动函数, 且 $f(x_1, x_2)$ 有界; $u(t)$ 为系统控制输入.

令 $x_3(t) = f(x_1, x_2)$, $x_3(t)$ 为扩张状态变量, 并记 $\dot{x}_3(t) = w(t)$, $y(t)$ 为系统输出, 则原系统 (1) 扩张为^[5]

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t) + bu, \\ \dot{x}_3(t) = w(t), \\ y(t) = x_1(t). \end{cases} \quad (2)$$

构造系统 (2) 的一个三阶扩张状态观测器为

$$\begin{cases} e_1(t) = z_1(t) - y(t), \\ \dot{z}_1(t) = z_2(t) - a_1 e_1(t), \\ \dot{z}_2(t) = z_3(t) - a_2 \cdot \operatorname{arsh}(b_2 e_1(t)) + bu(t), \\ \dot{z}_3(t) = -a_3 \cdot \operatorname{arsh}(b_3 e_1(t)). \end{cases} \quad (3)$$

其中: $a_1 > 0, a_2 > 0, b_2 > 0, a_3 > 0, b_3 > 0$, 通常取 b_2 和 b_3 接近于 1. 适当选取参数 a_1, a_2, a_3 , 则扩张状态观测器 (3) 可以精确估计出系统 (2) 的所有状态变量 $x_1(t), x_2(t)$ 以及 $x_3(t)$, 即 $z_1(t) \rightarrow x_1(t), z_2(t) \rightarrow x_2(t), z_3(t) \rightarrow x_3(t)$, 且 $x_3(t) = f(x_1, x_2)$.

2.2 扩张状态观测器误差系统的稳定性证明

如果令 $e_1(t) = z_1(t) - y(t) = z_1(t) - x_1(t)$, $e_2(t) = z_2(t) - x_2(t)$, $e_3(t) = z_3(t) - x_3(t)$, 不妨假定 $\dot{x}_3(t) = w(t)$ 为常值, 即 $\dot{x}_3(t) = w_0$, 则扩张状态观测器系统 (3) 与系统 (2) 的误差方程为

$$\begin{cases} \dot{e}_1(t) = e_2(t) - a_1 e_1(t), \\ \dot{e}_2(t) = e_3(t) - a_2 \cdot \operatorname{arsh}(b_2 e_1(t)), \\ \dot{e}_3(t) = -a_3 \cdot \operatorname{arsh}(b_3 e_1(t)) - w_0. \end{cases} \quad (4)$$

下面证明 ESO 的误差系统 (4) 在平衡点处渐近稳定^[10].

误差系统 (4) 可转化为

$$\dot{e}(t) = -A(e(t))e(t), \quad (5)$$

其中

$$A(e(t)) = \begin{bmatrix} a_1 & -1 & 0 \\ \frac{a_2 \cdot \operatorname{arsh}(b_2 e_1(t))}{e_1(t)} & 0 & -1 \\ \frac{a_3 \cdot \operatorname{arsh}(b_3 e_1(t))}{e_1(t)} & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

式 (6) 中, 显然 $\frac{\operatorname{arsh}(b_2 e_1(t))}{e_1(t)} > 0, \frac{\operatorname{arsh}(b_3 e_1(t))}{e_1(t)} > 0$ 且有界. 当满足下列条件时:

$$a_1 a_2 \cdot \frac{\operatorname{arsh}(b_2 e_1(t))}{e_1(t)} - a_3 \cdot \frac{\operatorname{arsh}(b_3 e_1(t))}{e_1(t)} > 0, \quad (7)$$

可得到主对角线元素均为正数的矩阵 D , 即

$$D = \begin{bmatrix} 1 & h(e_1(t)) + \delta_1 & -\gamma \\ -h(e_1(t)) - \delta_1 & \gamma & g(e_1(t)) + \delta_2 \\ \gamma & -g(e_1(t)) - \delta_2 & \gamma \end{bmatrix}, \quad (8)$$

使得 $DA(e(t))$ 为正定对称阵. 式 (8) 中: $\gamma, \delta_1, \delta_2$ 均为无穷小的正数, 且

$$\begin{aligned} h(e_1(t)) &= \frac{a_2 \cdot \frac{\operatorname{arsh}(b_2 \cdot e_1(t))}{e_1(t)}}{a_1 a_2 \cdot \frac{\operatorname{arsh}(b_2 \cdot e_1(t))}{e_1(t)} - a_3 \cdot \frac{\operatorname{arsh}(b_3 \cdot e_1(t))}{e_1(t)}}, \\ g(e_1(t)) &= \frac{1}{a_1 a_2 \cdot \frac{\operatorname{arsh}(b_2 \cdot e_1(t))}{e_1(t)} - a_3 \cdot \frac{\operatorname{arsh}(b_3 \cdot e_1(t))}{e_1(t)}}. \end{aligned}$$

取误差系统 (4) 的 Lyapunov 函数为

$$\begin{aligned} V(t) &= \int_0^t (DA(e(\tau))e(\tau), \dot{e}(\tau))d\tau + C = \\ &= \int_0^t \{-[ae_1(\tau) - e_2(\tau)]^2 - \\ &= \gamma[a_2 \cdot \operatorname{arsh}(b_2 e_1(\tau)) - e_3(\tau)]^2 - \\ &= \gamma[a_3 \cdot \operatorname{arsh}(b_3 e_1(\tau)) + w_0]^2\}d\tau + C. \quad (9) \end{aligned}$$

其中: $t > 0$, 常数 C 为充分大的正数.

在系统 (4) 的平衡点局部, $V(t)$ 中第 1 项的被积函数值为有界, 因此, 只要常数 C 取为足够大的正数, 就可以保证 $V(t) > 0$. Lyapunov 函数 (9) 的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= -[ae_1(t) - e_2(t)]^2 - \\ &= \gamma[a_2 \cdot \operatorname{arsh}(b_2 e_1(t)) - e_3(t)]^2 - \\ &= \gamma[a_3 \cdot \operatorname{arsh}(b_3 e_1(t)) + w_0]^2 \leq 0, \quad (10) \end{aligned}$$

仅当系统 (4) 为其零解时, $\dot{V}(t) = 0$. 故系统 (4) 在其平衡点处渐近稳定.

根据反双曲正弦函数的特性, 在 $e_1(t) = 0$ 的邻域内, 有 $\operatorname{arsh}(b_2 e_1(t)) \approx b_2 e_1(t), \operatorname{arsh}(b_3 e_1(t)) \approx b_3 e_1(t)$. 因此, 式 (7) 可以近似转化为 $a_1 a_2 b_2 - a_3 b_3 > 0$. 仿真研究表明, 只要式 (3) ESO 的参数满足该条件, 就可以保证误差系统 (4) 渐近稳定.

3 ESO 微分峰值现象的抑制

当ESO状态的初始值与系统状态变量初始值的误差较大时,在ESO初始时刻附近,系统的微分信号估计和加速度信号估计会出现较大的峰值,峰值是由于微分作用的高增益造成的.选取充分大的增益系数,会使线性高增益ESO存在更大的微分峰值.在ESO的初始值与被观测系统状态的初始值存在较大误差的情况下,ESO普遍存在微分峰值现象^[7,11].如果利用峰值信号来确定系统控制输入量,则将影响系统的控制效果,可能造成系统发散,甚至损坏系统中的某些元件^[7].文献[7]和[11]利用变系数法来抑制微分器及ESO峰值现象.

为了消除ESO微分峰值,在ESO初始运行阶段,本文利用反双曲正弦函数来设定式(3)ESO中的参数值 a_2 、 a_3 ,即

$$a_2 = \begin{cases} c_1 \cdot \text{arsh}(t), & 0 \leq t \leq 1; \\ d_1, & t > 1; \end{cases} \quad (11)$$

$$a_3 = \begin{cases} c_2 \cdot \text{arsh}(t), & 0 \leq t \leq 1; \\ d_2, & t > 1. \end{cases} \quad (12)$$

式(11)和(12)中, d_1 和 d_2 为ESO在观测具体系统时的可调参数,由于该ESO的鲁棒性,通常 d_1 和 d_2 都有较大的取值范围.只要保证在ESO运行的初始阶段 $0 \leq t \leq 1$ 中, $c_1 \cdot \text{arsh}(t)$ 和 $c_2 \cdot \text{arsh}(t)$ 的值较小即可,因此 c_1 和 c_2 的取值有较大的灵活性,它们的不同取值都能较好地消除微分峰值现象.式(11)和(12)同样适用于其他ESO的参数设置,以消除微分峰值.

4 仿真实验

下面进行利用ESO对二阶系统估计的仿真实验.仿真实验分两步:第1步不抑制微分峰值现象;第2步利用式(11)和(12)抑制微分峰值,并检验ESO的估计效果.

设二阶系统模型为

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = 1.0\text{sign}(\sin(0.5t)) + bu(t), \\ y(t) = x_1(t). \end{cases} \quad (13)$$

假设非线性扰动 $f(t) = 1.0\text{sign}(\sin(0.5t))$ 未知,已知输入 $u(t) = \sin(0.5t)$, $b = 2$.采用系统(3)构造三阶ESO.

Step 1 式(3)ESO的参数值 a_2 、 a_3 取固定值,进行仿真实验^[11].在式(3)的ESO中,参数 $a_1 = 20$, $b_2 = 1.2$, $b_3 = 1.5$.ESO的 $a_2 = 300$, $a_3 = 1000$.系统(13)的初始状态为 $[0.1, 0]$,ESO的初始值为 $[0, 0, 0]$,则系统状态 $x_2(t)$ 及其ESO估计如图1所示.由图1可知,在初始阶段,系统状态 $x_1(t)$ 的微分 $x_2(t)$ 的ESO估计出现了一定的峰值现象.

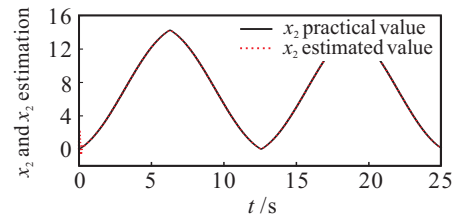


图1 系统状态 x_2 及其ESO估计值

非线性扰动 $f(t) = 1.0\text{sign}(\sin(0.5t))$ 为系统状态 $x_2(t)$ 微分值的一部分.该步的仿真实验表明,在初始阶段,系统扩张状态 $x_3(t)$ 的ESO估计也出现了较大的峰值现象.

另外,通过对比实验发现,在同样的系统中,如果采用文献[6]设计的 $\text{fhan}()$ 函数形式的经典扩张观测器,则在初始阶段,系统状态 $x_2(t)$ 和 $x_3(t)$ 的ESO估计都将出现较大峰值现象.

Step 2 进行抑制ESO峰值和检验估计效果的仿真实验.二阶系统的模型与上述实验相同.式(3)ESO的 a_2 、 a_3 分别由式(11)和(12)确定,其中取 $c_1 = c_2 = 100$.ESO其他参数均保持不变.则系统状态 $x_1(t)$ 的估计误差值如图2所示;系统状态 $x_2(t)$ 及其ESO估计值如图3所示;系统状态 $x_2(t)$ 的估计误差值如图4所示;系统状态 $x_3(t)$ 及其ESO估计值如图5所示;系统状态 $x_3(t)$ 的估计误差值如图6所示.

由图2可知,状态 $x_1(t)$ 的估计精度较高,在初始阶段之后,状态 $x_1(t)$ 的ESO估计误差小于 1.0×10^{-3} .由图3和图4可知,状态 $x_2(t)$ 的估计精度也较高,在

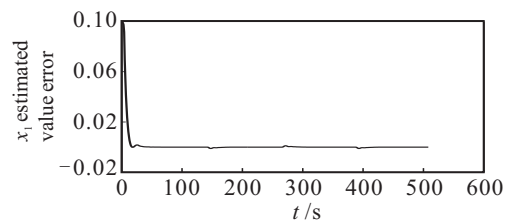


图2 系统状态 x_1 的估计误差值

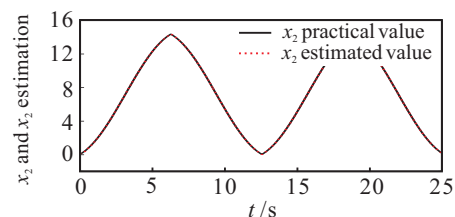


图3 系统状态 x_2 及其ESO估计值

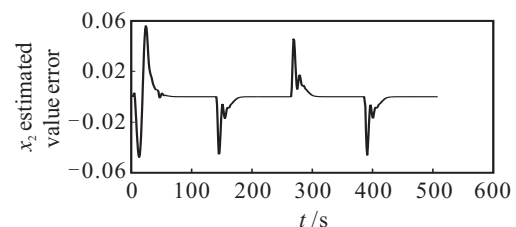


图4 系统状态 x_2 的估计误差值

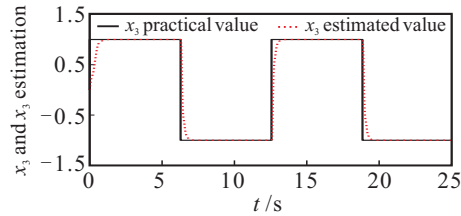


图5 系统状态 x_3 及其 ESO 估计值

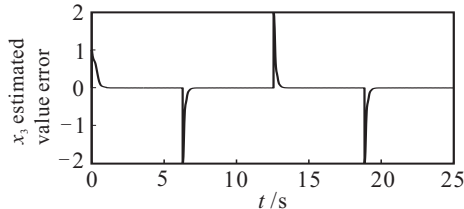


图6 系统状态 x_3 的估计误差值

初始阶段之后, 状态 $x_2(t)$ 估计误差小于 4.5×10^{-2} , 而且有效抑制了状态 $x_2(t)$ 的峰值. 非线性扰动 $f(t)$ 为方波信号, 由图 5 和图 6 可知, ESO 能快速精确地观测未知方波扰动量. 除方波的间断点之外, 观测 $f(t)$ 的稳态误差小于 1×10^{-5} , 而且有效抑制了状态 $x_3(t)$ 的峰值. 总之, 利用式 (11) 和 (12) 选取 ESO 初始阶段参数 a_2 、 a_3 , 能较好地抑制速度和加速度微分峰值现象, 同时, ESO 能够获得较高的系统状态变量估计精度.

5 结 论

反双曲正弦函数是光滑连续函数, 具有快速响应特性. 本文设计了一种利用反双曲正弦函数构造的三阶扩张状态观测器, 并且 ESO 观测误差系统在平衡点处渐近稳定. 仿真实验表明, 该 ESO 能够精确观测二阶系统的状态变量和加速度非线性扰动, 系统响应快速而平稳. 同时, 利用反双曲正弦函数设定 ESO 初始阶段的参数 a_2 、 a_3 , 能够有效地抑制微分峰值现象. 利用反双曲正弦函数设计 ESO 以及抑制微分峰值现象, 具有重要的参考意义和工程应用价值.

参考文献(References)

- [1] 韩京清. 一类不确定对象的扩张状态观测器[J]. 控制与决策, 1995, 10(1): 85-88.
(Han J Q. The extended state observer of an uncertain object[J]. Control and Decision, 1995, 10(1): 85-88.)
- [2] 马晓军, 袁东, 李匡成, 等. 基于扩张状态观测器的炮控系统串联滑模控制[J]. 光学精密工程, 2011, 19(10): 2409-2416.
(Ma X J, Yuan D, Li K C, et al. Series sliding mode control for gun control system[J]. Optics and Precision Engineering, 2011, 19(10): 2409-2416.)
- [3] 夏长亮, 刘均华, 俞卫, 等. 基于扩张状态观测器的永磁无刷直流电机滑模变结构控制[J]. 中国电机工程学报,

2006, 26(20): 139-142.

(Xia C L, Liu J H, Yu W, et al. Variable structure control of BLDCM based on extended state observer[J]. Proc of the CSEE, 2006, 26(20): 139-142.)

- [4] 郑雪梅, 李秋明, 史宏宇, 等. 用于永磁同步电机的一种非奇异高阶终端滑模观测器[J]. 控制理论与应用, 2011, 28(10): 1467-1472.
(Zheng X M, Li Q M, Shi H Y, et al. Higher-order nonsingular terminal-sliding-mode observer for permanent-magnet synchronous motor[J]. Control Theory & Applications, 2011, 28(10): 1467-1472.)
- [5] 周林阳, 王生捷. 基于反正切非线性函数的自抗扰控制[J]. 上海交通大学学报, 2013, 47(7): 1043-1048.
(Zhou L Y, Wang S J. An improved ADRC based-on nonlinear arctangent function[J]. J of Shanghai Jiaotong University, 2013, 47(7): 1043-1048.)
- [6] 韩京清. 自抗扰控制技术——估计补偿不确定因素的控制技术[M]. 北京: 国防工业出版社, 2008: 197-208.
(Han J Q. Active disturbance rejection control technique — The technique for estimating and compensating the uncertainties[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2008: 197-208.)
- [7] 王新华, 刘金琨. 微分器设计与应用, 信号滤波与求导[M]. 北京: 电子工业出版社, 2010: 144-155.
(Wang X H, Liu J K. Differentiator design and application-signal filtering and differentiation[M]. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2010: 144-155.)
- [8] 邵立伟, 廖晓钟, 夏元清, 等. 三阶离散扩张状态观测器的稳定性分析及其综合[J]. 信息与控制, 2008, 37(2): 135-139.
(Shao L W, Liao X Z, Xia Y Q, et al. Stability analysis and synthesis of third order discrete extended state observer[J]. Information and Control, 2008, 37(2): 135-139.)
- [9] 王宇航, 姚郁, 马克茂. 二阶扩张状态观测器的误差估计[J]. 吉林大学学报, 2010, 40(1): 143-147.
(Wang Y H, Yao Y, Ma K M. Error estimation of second order extended state observer[J]. J of Jilin University, 2010, 40(1): 143-147.)
- [10] 赵海香, 陈松林, 李明. 三阶扩张状态观测器稳定的一个充分条件[C]. 第32届中国控制会议. 西安, 2013: 1526-1531.
(Zhao H X, Chen S L, Li M. A sufficient condition for the stability of the third-order extended state observer[C]. Proc of 32nd Chinese Control Conf. Xi'an, 2013: 1526-1531.)
- [11] Liu Jinkun, Wang Xinhua. Advanced sliding mode control for mechanical systems: Design analysis and Matlab simulation[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2011: 174-177.

(责任编辑: 李君玲)