

## 带两类正态变异的多目标粒子群算法

高圣国<sup>1</sup>, 吴忠<sup>1</sup>, 李旭芳<sup>2,3</sup>, 刘升<sup>1</sup>

(1. 上海工程技术大学 管理学院, 上海 201620; 2. 同济大学 经济与管理学院, 上海 200092; 3. 复旦大学 上海市数据科学重点实验室, 上海 200433)

**摘要:** 提出一种带两类正态变异的多目标粒子群算法, 其中一类变异有助于在非劣解的邻域内发现新的非劣解, 另一类变异可以分散粒子群. 将搜索过程分为3个阶段, 在每个阶段引导粒子的选择采用不同的针对性策略. 数值结果表明, 所提出的算法能够显著提高解的多样性和收敛性.

**关键词:** 多目标规划; 粒子群优化算法; 变异; 拥挤距离

**中图分类号:** TP273

**文献标志码:** A

## Multi-objective particle swarm optimization with two normal mutations

GAO Sheng-guo<sup>1</sup>, WU Zhong<sup>1</sup>, LI Xu-fang<sup>2,3</sup>, LIU Sheng<sup>1</sup>

(1. School of Management, Shanghai University of Engineering Science, Shanghai 201620, China; 2. School of Economics & Management, Tongji University, Shanghai 200092, China; 3. Shanghai Key Laboratory of Data Science, Fudan University, Shanghai 200433, China. Correspondent: LI Xu-fang, E-mail: lucklxf@163.com)

**Abstract:** A particle swarm algorithm with two types of normal mutations is proposed for the multi-objective problem. One of variations contributes to discover new Pareto optimal solutions in the neighborhoods of these existing solutions, the other can disperse the swarm. The searching process is divided into three stages, and those particles which guide the others are selected with different targeted strategies in each stage. Numerical results show that the algorithm can significantly improve the diversity and convergence of the Pareto optimal solution.

**Keywords:** multi-objective optimization; particle swarm optimization; mutations; congestion distance

### 0 引言

多目标规划的求解是近十多年算法研究的热点问题之一. 虽然多目标规划与单目标规划的求解方式和对解的评价有显著的差异, 但有些单目标规划的方法经过适当的改变后可以求解多目标问题. 例如, Deb等<sup>[1]</sup>基于遗传算法提出的NSGA II, Li<sup>[2]</sup>结合PSO算法和非支配排序的思想提出的NSPSO算法.

基于PSO的多目标优化算法一般包含3个有机结合的模块: 1) 单个非劣解的搜索方法, 用来获得大量的备选非劣解; 2) 有限量的非劣解集(外部存储)的选择与维护方法; 3) 对非劣解搜索的引导机制.

对3个模块中的一个或者多个进行改进, 可以提高算法的性能. Coello等<sup>[3-4]</sup>提出的自适应网格、Sierra等<sup>[5]</sup>采用的拥挤距离和 $\varepsilon$ 占优机制、 $\varepsilon$ 非支配排

序<sup>[6]</sup>等都是针对模块2)的改进. 对于模块3), 有随机选择、根据非支配解的分布密度进行选择以及在选择之后进行某种加权平均、对引导粒子的速度或位置进行变异等方法<sup>[7-9]</sup>. 各种改进的PSO算法构成了模块1)的多种选择.

本文提出一种带两类正态变异的多目标粒子群(MN-PSO)算法. 带两类正态变异的粒子群算法具有较强的搜索能力, 当应用于多目标问题时, 较强的搜索能力依然可以发挥作用. 外部存储的维护方法是先加入新的非劣解, 如果非劣解个数超过最大值, 则在间距最小的非劣解中删除一个. 引导粒子的选择分阶段采用不同的策略. 对测试函数ZDT1~ZDT4的计算表明, MN-PSO算法在收敛性和多样性两方面都有较为明显的提高.

收稿日期: 2014-03-27; 修回日期: 2014-07-08.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61075115); 国家自然科学基金青年基金项目(11101265); 上海科技发展基金项目(13dz2260200).

作者简介: 高圣国(1968—), 男, 讲师, 博士, 从事最优化算法的研究; 吴忠(1968—), 男, 教授, 博士后, 从事信息管理、数据挖掘等研究.

## 1 带两类正态变异的粒子群算法

### 1.1 标准粒子群算法

在标准粒子群算法中, 单个粒子  $i$  有位置  $X_i(t)$  和速度  $V_i(t)$  属性, 可记住自己所经历的最优位置  $P_i(t)$  和群体的最优位置  $P_g(t)$ .

粒子群算法的更新公式表示如下:

$$V_i(t+1) = \omega(t)V_i(t) + c_1r_1(P_i(t) - X_i(t)) + c_2r_2(P_g(t) - X_i(t)), \quad (1)$$

$$X_i(t+1) = X_i(t) + V_i(t+1). \quad (2)$$

其中:  $t$  是计算的步数, 惯性因子  $\omega(t)$  随  $t$  增加可以调整; 学习因子  $c_1$  和  $c_2$  一般保持不变;  $r_1$  和  $r_2$  是  $(0,1)$  之间的随机数, 服从均匀分布.

PSO 算法实际上是通过  $P_g(t)$  和  $P_i(t)$  引导粒子进行随机搜索, 找到新的备选粒子. 更新公式对粒子群有一种聚合作用, 当所有粒子都进入一个局部最优点的充分小邻域之后将陷入其中, 从而丧失进一步的搜索能力, 形成所谓的“早熟”.

### 1.2 带两类正态变异的粒子群算法

带两类正态变异的粒子群算法(N-PSO)将粒子的更新过程分为两个阶段. 第1阶段执行 PSO 更新算法, 即按式(1)和(2)产生新一代的粒子. 在第2阶段引入两类变异操作: 第1类变异以  $P_g$  为中心、按方差为  $\sigma_1 I$  ( $I$  为单位矩阵)的正态分布大量投点, 在这些点(包含  $P_g(t)$ )中找出最优者作为新的  $P_g(t)$ , 目的是在全局最优附近直接寻找更好的解; 第2类变异是随机选取若干粒子, 分别以其为中心、 $\sigma_2$  为方差进行正态变异, 避免粒子群“早熟”. 第2阶段结束后进入下一步循环.

N-PSO 算法:

1) 初始化. 令  $t = 1$ , 在决策空间中随机产生  $N$  个粒子  $X_i(t)$ , 速度为  $V_i(t)$ , 计算目标函数值

$$F_i(t) = F(X_i(t)),$$

确定  $P_i(t)$  和  $P_g(t)$ , 这里  $1 \leq i \leq N$ .

2) 按式(1)和(2)进行更新. 计算  $V_i(t+1)$  和  $X_i(t+1)$ , 更新  $P_i(t+1)$  和  $P_g(t+1)$ .

① 以  $P_g(t+1)$  为中心, 按方差为  $\sigma_1 I$  的正态分布投  $m_1$  个点, 即取随机变量  $Y \sim N(P_g(t+1), \sigma_1 I)$  的  $m_1$  个随机点, 在这  $m_1$  个随机点中, 如果存在比  $P_g(t+1)$  更好的粒子, 则以它替代  $P_g(t+1)$ . 其中:  $I$  为单位矩阵,  $\sigma_1$  可以动态调整.

② 在除  $P_g(t)$  之外的其他粒子中随机选择  $m_2$  个粒子, 记为  $P'_1(t), P'_2(t), \dots, P'_{m_2}(t)$ , 在  $m_2$  个随机变量  $Z \sim N(P'_i(t+1), \sigma_2)$  中, 各取一个随机点代替原粒子.

③ 更新  $P_i(t+1)$  和  $P_g(t+1)$ . 对第2类变异产生

的新粒子  $P_j(t+1)$  按下式更新速度:

$$V_j(t+1) = P_g(t+1) - X_j(t+1). \quad (3)$$

如果  $t \leq t_{\max}$ , 则转入2); 如果  $t > t_{\max}$ , 则计算终止.

在求解单目标问题时, 对角矩阵  $\sigma_2$  可以保持不变, 例如可以取为求解正方体的每维边长的十分之一左右. 由于随着计算精度的不断提高, 搜索范围将相应缩小,  $\sigma_1$  需要随计算步数的增加而变小.

## 2 带两类正态变异的多目标粒子群算法

由于多目标规划的求解目标与单目标不同, 在将算法应用于多目标规划时, 第1类变异的方差可以不调整, 就计算经验而言,  $\sigma_1$  取为求解矩形的最小边长的3%左右是合适的. 当求单目标规划时, 在第1类变异产生的多个粒子中只选取适应值最好的一个, 其他粒子直接丢弃; 而当求多目标问题时, 两类变异所产生的每个粒子都要作为备选解, 并与外部存储中已有的非劣解进行比较.

### 2.1 外部存储的维护与更新

外部存储起初为空集, 粒子群算法运行一步之后, 产生  $N$  个粒子, 第1类变异产生  $m_1$  个粒子, 第2类变异产生  $m_2$  个粒子, 将这  $N+m_1+m_2$  个粒子作为备选解, 有条件地逐个加入到外部存储中. 当外部存储是空集时, 粒子直接加入, 同时外部存储的个数  $N_{\text{ex}}$  从0变为1; 当  $N_{\text{ex}} > 0$  时, 如果外部存储中不存在比备选粒子占优的粒子, 则将备选粒子加入到外部存储中. 外部存储的所有粒子按目标空间的映像进行字典排序, 新插入的粒子也按顺序插在特定位置.

外部存储最多保留的粒子数为  $N_{\text{EX}}$ , 并维护一个相邻粒子之间的距离数组

$$d = [d_1, \dots, d_i, \dots], \quad 1 \leq i \leq N_{\text{EX}} - 1,$$

其中  $d_i$  为第  $i$  个粒子与第  $i+1$  个粒子在目标空间中的映像的距离. 当外部存储中的粒子数达到  $N_{\text{EX}}$  时, 符合条件的粒子依旧加入. 但加入之后立刻删除一个粒子, 被删除的粒子是相邻距离最小的两个粒子中的一个. 即如果  $d_i$  最小, 并且  $d_{i-1} < d_{i+1}$ , 则应该删除第  $i$  个粒子; 反之, 删除第  $i+1$  个粒子. 这里存在一种特殊情况: 如果要删除的粒子是外部存储中的第一个或最后一个粒子, 则删除与它相邻的粒子, 因为删除第一个或最后一个粒子将收缩解的范围.

### 2.2 引导机制

根据迭代的步数将计算过程分为前期(前40步左右)、中期(前期结束到迭代总次数的一半)和后期.

在算法进行的前期, 粒子  $i$  的位置  $X_i(t)$  和速度  $V_i(t)$  按式(1)和(2)计算, 然后进行两类变异操作. 在

进行  $P_i$  和  $P_g$  的选择时,利用支配关系“ $\prec$ ”代替单目标算法中的大小关系“ $<$ ”进行比较计算.算法前期操作的目的是发挥N-PSO算法的搜索优势,找到一些尽可能精确的非劣解.在算法前期操作结束时,  $P_g$  和部分甚至全部的  $P_i$  可能都是 Pareto 最优解,通过支配关系“ $\prec$ ”可能已经无法更新.

进入中期后,利用外部存储的距离数组产生密度指标

$$\rho_i = \min\{d_{i-1} + d_i, c\}, \rho_1 = d_1, \rho_{N_{ex}} = d_{N_{ex}-1}.$$

其中:  $c$  应用于 ZDT3 这种前沿不连续的情况,结合目标空间的范围和外部存储的最大规模,容易选择合适的  $c$ ;  $\rho_i$  越小,密度越大.

从外储非劣解密度最低处选择一个非劣解来替代  $P_g$ .同时,随机选取一半的  $P_i$ ,从外储非劣解密度最低处选择等量个数的非劣解分别替代  $P_i$ .这时,  $P_g$  和  $P_i$  的作用已经从引导局部搜索转变为引导粒子改变搜索区域.

当算法的中期运行结束时,通常已经得到收敛性较好的解,但这时的解分布一般不够均匀,有些解还不够精确.为了提高解的收敛性和多样性,考虑粒子群算法中  $P_g$  和  $P_i$  的引导作用的差别:  $P_g$  是真正的引导粒子,其他粒子在它的拉动下向它聚集;  $P_i$  的作用要温和很多,它主要是使第  $i$  个粒子向  $P_g$  移动时,产生一些偏差,使各个粒子最终落到  $P_g$  周围的不同的方向上.

在计算过程的后期,  $P_i$  的选择方法与中期相同,而  $P_g$  采用一种摆动的方法,  $P_g(t)$  左4次右4次地摆动,使粒子群在搜索区域“遍历”,具体方法如下:

对于  $t$ , 如果

$$t > \frac{T}{2}, \text{mod} \frac{t}{8} < 4,$$

则在外部存储的非劣解中随机选择一个排在  $P_g(t)$  前面,并将第一维坐标小于  $P_g(t)$  且第一维坐标值在 0.5 以上的非劣解指定为  $P_g(t+1)$ .如果满足条件的非劣解不存在,则指定外部存储的第一个非劣解;类似地,对于  $t$ , 如果

$$t > \frac{T}{2}, \text{mod} \frac{t}{8} \geq 4,$$

则在外部存储的非劣解中随机选择一个排在  $P_g(t)$  后面,并将第一维坐标大于  $P_g(t)$  且第一维坐标值在 0.5 以上的非劣解指定为  $P_g(t+1)$ .如果满足条件的非劣解不存在,则指定外部存储的最后非劣解.这样做的目的是保证在计算的后期,所有粒子还能大范围地进行移动和搜索.

### 3 性能验证

为了验证多目标优化算法的性能,选择经典的多目标优化测试函数 ZDT1~ZDT4 进行计算并比较,

采用 Deb 提出的收敛性  $\gamma$  和多样性  $\Delta$ <sup>[1,7]</sup> 作为评价指标.需要注意的是,即使每个非劣解都在 Pareto 前沿上,  $\gamma$  也不一定等于 0,这里  $\gamma$  是基于前沿上的 500 个点计算的.

#### 3.1 对比算法与参数设置

用于对比的多目标优化算法包括 NSGA II<sup>[1]</sup>、AEPSo<sup>[7]</sup>、 $\epsilon$ DMOPSo<sup>[8]</sup>和 MN-PSO.其中: NSGA II 算法和 AEPSo 算法的种群规模为 100,迭代次数为 250,函数评价为 25 000, Pareto 解集的规模为 100;  $\epsilon$ DMOPSo<sup>[8]</sup>的迭代次数为 200,其他参数与前两种算法相同; MN-PSO 算法的种群规模为 40,第 1 类变异一次产生 40 个变异点,第 2 类变异一次随机选取 8 个点进行变异,产生 8 个新粒子,一次迭代共涉及 88 个粒子,迭代次数为 280,函数评价略低于 25 000.第 1 类和第 2 类正态变异的方差分别为  $\frac{1}{30}I$  和  $\frac{1}{8}I$ ,  $I$  为问题空间维数的单位矩阵,测试问题 ZDT1~ZDT3 为 30 维, ZDT4 为 10 维.

#### 3.2 实验结果

对测试问题 ZDT1~ZDT4 分别进行 30 次独立计算,比较各类算法所得解的收敛度和多样度的平均值和方差.其中: NSGA II 的结果来自文献 [1], AEPSo 的结果来自文献 [7],  $\epsilon$ DMOPSo 的结果来自文献 [8]. 4 种算法的收敛度  $\gamma$  的实验结果如表 1 所示,多样性  $\Delta$  的实验结果见表 2.

表1 收敛性  $\gamma$

| 算法                | 属性 | ZDT1    | ZDT2     | ZDT3    | ZDT4    |
|-------------------|----|---------|----------|---------|---------|
| NSGA II           | 均值 | 0.033 4 | 0.072 3  | 0.114 5 | 0.513 0 |
|                   | 方差 | 0.004 7 | 0.031 6  | 0.007 9 | 0.118 4 |
| AEPSo             | 均值 | 0.001 0 | 0.000 7  | 0.004 6 | 0.498 0 |
|                   | 方差 | 0.000 0 | 0.000 0  | 0.000 0 | 1.936 0 |
| $\epsilon$ DMOPSo | 均值 | 0.003 9 | 0.006 1  | 0.001 7 | 0.006 3 |
|                   | 方差 | 4.61e-7 | 4.58e-6  | 6.13e-8 | 9.42e-7 |
| MN-PSO            | 均值 | 0.001 2 | 0.000 8  | 0.001 3 | 0.001 2 |
|                   | 方差 | 2.59e-9 | 2.68e-10 | 3.89e-9 | 1.79e-9 |

表2 多样性  $\Delta$

| 算法                | 属性 | ZDT1    | ZDT2    | ZDT3    | ZDT4    |
|-------------------|----|---------|---------|---------|---------|
| NSGA II           | 均值 | 0.390 3 | 0.430 7 | 0.738 5 | 0.702 6 |
|                   | 方差 | 0.001 8 | 0.004 7 | 0.019 7 | 0.064 6 |
| AEPSo             | 均值 | 0.557 4 | 0.519 0 | 0.551 8 | 0.803 6 |
|                   | 方差 | 0.001 4 | 0.000 9 | 0.000 8 | 0.070 7 |
| $\epsilon$ DMOPSo | 均值 | 0.37    | 0.35    | 0.32    | 0.41    |
|                   | 方差 | 2.36e-5 | 2.27e-6 | 1.68e-4 | 1.02e-5 |
| MN-PSO            | 均值 | 0.086 0 | 0.083 2 | 0.180 6 | 0.092 5 |
|                   | 方差 | 5.58e-5 | 8.02e-5 | 0.005 2 | 3.26e-4 |

MN-PSO 的计算结果优于文献 [8] 中列举的 6 种算法对 ZDT1~ZDT4 求解的多样性  $\Delta$ , 也优于文献 [9] 的结果. MN-PSO 算法求解问题 ZDT1~ZDT4 的一次求解图像如图 1~图 4 所示,包括最终的 100 个

非劣解在目标空间中的映像、相邻点之间的距离以及对应的 Pareto 前沿。

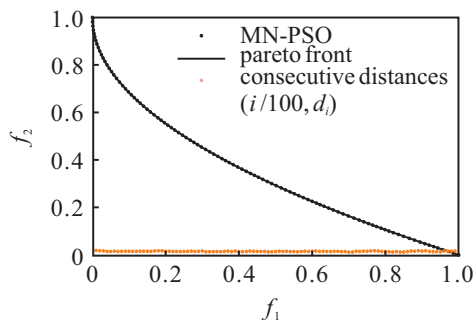


图 1 ZDT1

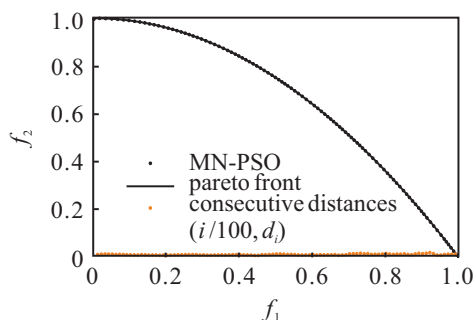


图 2 ZDT2

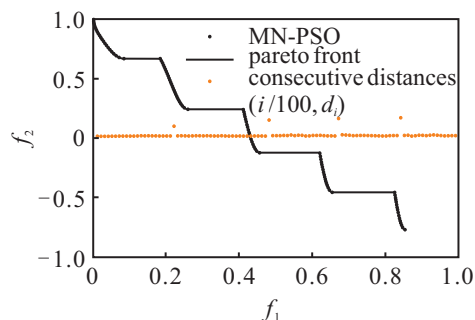


图 3 ZDT3

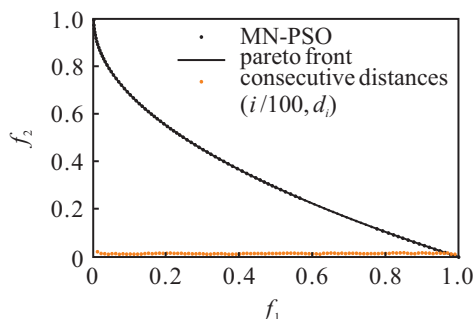


图 4 ZDT4

图 1 中:  $\gamma = 0.001126$ ,  $\Delta = 0.08087$ ; 图 2 中:  $\gamma = 0.000783$ ,  $\Delta = 0.08893$ ; 图 3 中:  $\gamma = 0.001305$ ,  $\Delta = 0.1172$ ; 图 4 中:  $\gamma = 0.001063$ ,  $\Delta = 0.1169$ 。

## 4 结 论

本文提出了带两类正态变异的多目标粒子群算法, 该算法保持了求解单目标规划的较强的搜索能力,

并通过在算法运行的不同阶段采用不同的引导策略使解的多样性得到较为显著的提高. MN-PSO 算法的参数较多, 每个参数的精确作用、如何组合取值最优, 以及可以按什么条件动态调整还需进一步研究。

## 参考文献(References)

- [1] Deb K, Pratap A, Agarwal S, et al. A fast and elitist multi-objective genetic algorithm: NSGA-II[J]. IEEE Trans on Evolutionary Computation, 2002, 6(2): 182-197.
- [2] Li Xiaodong. A non-dominated sorting particle swarm optimizer for multiobjective optimization[C]. Genetic and Evolutionary Computation Conf. Berlin: Springer, 2003: 37-48.
- [3] Carlos A Coello Coello, Pulido G T, Lechuga M S. Handling multiple objectives with particle swarm optimization[J]. IEEE Trans on Evolutionary Computations, 2004, 8(3): 256-279.
- [4] Reyes Sierra M, Carlos A Coello Coello. Improving PSO-based multi-objective optimization using crowding, mutation and e-dominance[C]. The 3rd Int'l Conf on Evolutionary Multi-Criterion Optimization. Berlin: Springer, 2005: 505-519.
- [5] Sierra M R, Coello C A C. Multi-objective particle swarm optimizers: A survey of the state-of-the-art[J]. Int J of Computational Intelligence Research, 2006, 2(3): 287-308.
- [6] Laumanns M, Thiele L. Combining convergence and diversity in evolutionary multi-objective optimization[J]. Evolutionary Computation, 2002, 10(3): 263-282.
- [7] 陈民铀, 张聪誉, 罗辞勇. 自适应进化多目标粒子群优化算法[J]. 控制与决策, 2009, 24(12): 1851-1855.  
(Chen M Y, Zhang C Y, Luo C Y. Adaptive evolutionary multi-objective particle swarm optimization algorithm[J]. Control and Decision, 2009, 24(12): 1851-1855.)
- [8] 刘衍民, 赵庆祯, 牛奔, 等. 基于  $\varepsilon$  占优的自适应多目标粒子群算法[J]. 控制与决策, 2011, 26(1): 89-95.  
(Liu Y M, Zhao Q Z, Niu B, et al. Adaptive multi-objective particle swarm optimizer based on  $\varepsilon$  dominance[J]. Control and Decision, 2011, 26(1): 89-95.)
- [9] 贾树晋, 杜斌, 岳恒. 基于局部搜索与混合多样性策略的多目标粒子群算法[J]. 控制与决策, 2012, 27(6): 813-818.  
(Jia S J, Du B, Yue H. Local search and hybrid diversity strategy based multi-objective particle swarm optimization algorithm[J]. Control and Decision, 2012, 27(6): 813-818.)