

基于死区吸引律的离散重复控制

邬玲伟, 孙明轩, 胡轶

(浙江工业大学 信息工程学院, 杭州 310023)

摘要: 针对周期参考信号下的不确定离散时间系统, 提出一种离散重复控制方法, 利用死区函数设计新型的吸引律, 将干扰补偿、抑制措施“嵌入”吸引律, 构造理想误差动态, 并基于此导出重复控制器. 为了进行具体的控制器参数整定和表征闭环系统的误差动态行为, 推导出了稳态误差带、单调减区域和绝对吸引层边界的表达式. 所设计的离散重复控制器能够完全抑制周期对称干扰信号, 控制器设计方法也适用于常值调节问题的定位控制. 数值仿真及在电机伺服系统上的实验结果验证了所提出控制方法的有效性.

关键词: 离散时间系统; 死区函数; 重复控制; 理想误差动态

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Discrete repetitive control using attracting law with dead zone

WU Ling-wei, SUN Ming-xuan, HU Yi

(College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310023, China. Correspondent: SUN Ming-xuan, E-mail: mxsun@zjut.edu.cn)

Abstract: A discrete-time repetitive control method is proposed for systems with periodic reference signals. A measure of disturbance-rejection is embedded in the attracting law by using the dead-zone function to form the ideal error dynamics, by which the discrete-time repetitive controller is derived. For the convenience in adjusting the controller parameters and describing the error dynamics of the closed-loop system, the expressions for the range of the steady-state error, the boundary of the monotonically decreasing region and the absolute attractive layer are derived. The developed repetitive controller is not only effective in rejection of the periodic disturbances, but also applicable to position control with constant regulation problems. Both numerical simulation and experiment results on a servomechanism are given to verify the feasibility and effectiveness of the proposed control method.

Keywords: discrete-time systems; dead-zone function; repetitive control; ideal error dynamics

0 引言

目前控制系统的实现主要是依靠数字计算机, 它比模拟实现技术更易于实现复杂的控制策略, 这也是离散时间系统的控制器设计理论引起人们极大关注的主要原因之一. 滑模控制方法是实际中常用的一种离散控制器设计方法^[1]. 在设计滑模控制器时, 需要考虑到达条件, 到达条件不同, 相应的滑模控制器也不同. 文献[2-4]先后给出了3种以不等式形式表示的到达条件, 但据其设计控制器时一般比较复杂, 且难于推广到多变量系统. 文献[5-7]提出了等式到达条件的趋近律, 与不等式形式给出的到达条件相比, 趋近律更好地描述了系统趋近切换面的运动过程, 而且更容易推得系统的控制律. 目前, 趋近律方法已成为

滑模控制器设计的主要方法之一.

通过引入 sgn 函数, 文献[6]给出的离散指数趋近律使得切换函数步步穿越滑模面, 形成 zigzag 滑动, 并给出了准滑动模态的定义. 文献[8]分析了文献[6]提出的趋近律产生颤振的原因, 并检验了关于准滑模带宽度的估计. 进一步地, 在文献[9]中给出了新的准滑动模态定义, 所提出的趋近律放宽了高氏趋近律每一步穿越滑模面的要求. 文献[10]在文献[6]提出的趋近律中引入解耦干扰观测器, 实现了干扰估计误差与切换动态的解耦, 提高了控制精度, 并给出了绝对吸引层边界和准滑模带边界的估计. 文献[11-12]给出了绝对吸引层边界和准滑模带边界更具体的分析. 文献[9-14]对切换函数边界层的吸引过

收稿日期: 2014-03-28; 修回日期: 2014-09-02.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61174034, 61374103).

作者简介: 邬玲伟(1985—), 男, 博士生, 从事重复控制的研究; 孙明轩(1961—), 男, 教授, 博士生导师, 从事学习控制等研究.

程进行了讨论. 文献[15]提出一种无抖振滑模控制器设计方法, 并通过改变采样周期来提高控制系统的鲁棒性. 文献[16]提出一种离散趋近律与等效控制相结合的控制方法. 文献[17]对离散趋近律方法进行了分类研究, 并给出了理想趋近律和鲁棒趋近律的概念. 文献[18]提出一种基于递归式滑模函数的离散变结构控制器设计方法, 并设计了具有较高估计精度的干扰估计器. 文献[19]基于死区离散趋近律, 提出一种准滑模控制策略, 消除了高频颤振, 且切换函数能单调地收敛于死区.

实际工业控制中, 系统执行周期跟踪任务时往往会受到周期性干扰, 重复控制方法可实现外部周期性干扰完全抑制. 目前已发表的文献中, 重复控制器多为基于内模原理的频域设计^[20-21]. 文献[11]采用饱和趋近律设计离散滑模重复控制器, 而文献[12]提出的离散滑模重复控制方法是通过断续函数连续化设计重复控制器.

对于不确定性系统, 采用离散趋近律方法设计控制器, 所推导出的控制器与不确定性项有关, 因而实际中无法实现^[6]. 因此, 需采用理想切换动态方法, 即在原趋近律中“嵌入”干扰抑制手段, 构造理想的切换函数动态; 然后由其切换动态方程推导出可实现的控制律. 实际上, 它是考虑了干扰抑制目的用于处理离散不确定性系统的趋近律方法^[11-12, 16-17]. 文献[22-24]提出的理想误差动态设计方法是采用能够使跟踪误差本身趋近原点的吸引律, 并基于吸引律构造出一种具有干扰抑制项的理想误差动态.

本文针对输入输出描述的不确定离散时间系统的控制问题, 利用死区函数设计新型的吸引律, 将干扰补偿、抑制措施“嵌入”吸引律, 构造理想误差动态, 并基于此导出重复控制器, 使闭环系统具有理想误差动态所表征的收敛性能和稳态性能. 本文推导出了单调减区域、绝对吸引层和稳态误差带边界的表达式, 并将其用于具体的控制器参数整定和表征闭环系统的误差动态行为. 最后通过数值仿真和在电机伺服系统上的实验结果验证了3个边界值和所提出控制方法的有效性.

1 问题的提出

考虑如下单输入单输出(SISO)离散时间系统:

$$y_{k+1} + \sum_{i=1}^n a_i y_{k+1-i} = \sum_{i=1}^n b_i u_{k+1-i} + w_{k+1}. \quad (1)$$

其中: k 时刻的系统控制输入信号 u_k , 控制输出信号 y_k 和扰动变量 w_k 均为标量; w_{k+1} 为 $k+1$ 时刻的系统干扰信号; a_i 和 b_i ($i=1, 2, \dots, n$) 为系统参数, 且 $b_1 \neq 0$.

给定参考信号 r_k 满足周期为 N 的周期对称特性

$r_k = r_{k-N}$. 定义跟踪误差

$$e_k = r_k - y_k. \quad (2)$$

本文的控制目标是针对周期已知情形下的不确定离散系统(1), 利用重复控制技术, 设计离散重复控制器. 在保证闭环系统稳定的同时, 能够完全抑制周期对称干扰信号, 实现系统输出信号 y_k 跟随给定参考信号 r_k 的变化.

本文利用理想误差动态设计重复控制器, 提出表征跟踪误差收敛过程的3个概念. 下面引入稳态误差带的概念, 即

$$|e_{k+1}| \leq \Delta_{\text{SSE}}, \forall |e_k| \leq \Delta_{\text{SSE}}, k > k^*.$$

其中: $k^* > 0$ 为正整数, Δ_{SSE} 为稳态误差带边界. 跟踪误差的收敛过程存在一个绝对吸引层, 在吸引层边界外, $|e_k|$ 单调递减, 即

$$|e_{k+1}| < |e_k|, \forall |e_k| > \Delta_{\text{AAL}},$$

其中 Δ_{AAL} 为绝对吸引层边界. 系统误差本身还存在一个同号单调递减的边界, 当 e_k 大于这个边界时, e_k 同号单调递减, 即

$$\begin{cases} 0 < e_{k+1} < e_k, \forall e_k > \Delta_{\text{MDR}}; \\ e_k < e_{k+1} < 0, \forall e_k < -\Delta_{\text{MDR}}. \end{cases}$$

其中 Δ_{MDR} 为单调减区域边界.

实际上, Δ_{SSE} , Δ_{AAL} 和 Δ_{MDR} 的具体取值依赖于控制器(第2节给出)中的可调参数 ($\rho, \varepsilon, \delta$). 选取的控制器参数不同, 上述3个边界值也不同.

2 死区吸引律及重复控制器

为了实现周期对称干扰信号的完全抑制, 可利用死区函数设计吸引律, 构造具有干扰抑制作用理想误差动态, 并基于理想误差动态设计重复控制器.

考虑下述离散死区吸引律:

$$e_{k+1} = \zeta_\delta(e_k)[(1-\rho)e_k - \varepsilon \text{sgn}(e_k)]. \quad (3)$$

其中: $\varepsilon > 0, \delta > 0, 0 < \rho < 1$. 这里的死区函数 $\zeta_\delta(\cdot)$ 定义如下:

$$\zeta_\delta(e_k) = \begin{cases} 1, & |e_k| > \delta; \\ 0, & |e_k| \leq \delta. \end{cases} \quad (4)$$

定理 1 当 $w_k = 0$ 时, 利用死区吸引律(3)设计控制器, 则离散系统的跟踪性能由下述3个边界来表征:

1) 单调减区域边界

$$\Delta_{\text{MDR}} = \begin{cases} 0, & \varepsilon \leq (1-\rho)\delta; \\ \frac{\varepsilon}{1-\rho}, & \varepsilon > (1-\rho)\delta. \end{cases} \quad (5)$$

2) 绝对吸引层边界

$$\Delta_{\text{AAL}} = \begin{cases} 0, & \varepsilon \leq (2-\rho)\delta; \\ \frac{\varepsilon}{2-\rho}, & \varepsilon > (2-\rho)\delta. \end{cases} \quad (6)$$

3) 稳态误差带边界

$$\Delta_{SSE} = \begin{cases} 0, & \varepsilon \leq (2 - \rho)\delta; \\ \frac{\varepsilon}{2 - \rho}, & \varepsilon > (2 - \rho)\delta. \end{cases} \quad (7)$$

注1 当死区吸引律(3)中的可调参数满足 $\delta \geq \varepsilon/(1 - \rho)$ 时, 跟踪误差 e_k 将单调无抖振、无正负交替地在有限时间内收敛于原点; 当 $\varepsilon/(2 - \rho) \leq \delta < \varepsilon/(1 - \rho)$ 时, 跟踪误差 e_k 将绝对收敛, 出现正负交替现象, 但最终仍会收敛于原点; 当 $0 < \delta < \varepsilon/(2 - \rho)$ 时, 跟踪误差 e_k 将不会收敛于原点, 而是收敛到由这些参数 (ρ, ε) 确定的一误差带内。可以看出, 当 $\delta \geq \varepsilon/(2 - \rho)$ 时, 直接由死区吸引律(3)构造控制器, 其闭环系统无稳态误差。

由于实际系统中存在不确定性, 死区吸引律(3)在实际中无法实现。基于此, 本文构造如下具有干扰抑制作用的理想误差动态:

$$e_{k+1} = \zeta_\delta(e_k)[(1 - \rho)e_k - \varepsilon \text{sgn}(e_k)] + d_{k+1}^* - d_{k+1}. \quad (8)$$

其中: d_{k+1}^* 用于 d_{k+1} 的补偿, $\varepsilon \leq (2 - \rho)\delta$ 。引入的变量 d_k 是为了抑制系统干扰信号 w_k 的周期成分, 其定义如下:

$$d_k = w_k - w_{k-N}. \quad (9)$$

令 d_k 的上、下界分别为 d_u 和 d_l , 以 $d_k^* = (d_u + d_l)/2$ 补偿 d_k , 因此 $|d_k^* - d_k| \leq \Delta$, 其中 $\Delta = (d_u - d_l)/2$ 。

考虑 e_{k+1} 与 e_{k+1-N} 的差

$$\begin{aligned} e_{k+1} - e_{k+1-N} &= \\ &= (r_{k+1} - y_{k+1}) - (r_{k+1-N} - y_{k+1-N}) = \\ &= \left(\sum_{i=1}^n a_i (y_{k+1-i} - y_{k+1-N-i}) \right) - \\ &= \left(\sum_{i=1}^n a_i (u_{k+1-i} - u_{k+1-N-i}) \right) + \\ &= r_{k+1} - r_{k+1-N} - d_{k+1}, \end{aligned} \quad (10)$$

将式(8)代入(10), 可得如下重复控制器:

$$\begin{aligned} u_k &= u_{k-N} + \frac{1}{b_1} \left[\zeta_\delta(e_k)[-(1 - \rho)e_k + \varepsilon \text{sgn}(e_k)] + \right. \\ &= e_{k+1-N} - r_{k+1-N} + r_{k+1} - d_{k+1}^* + \\ &= \sum_{i=1}^n a_i (y_{k+1-i} - y_{k+1-N-i}) - \\ &= \left. \sum_{i=2}^n b_i (u_{k+1-i} - u_{k+1-N-i}) \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

在实现时, 重复控制算法按照式(11)进行编程。具体的控制器参数 $(\rho, \delta, \varepsilon)$ 可根据表征系统收敛性能的指标进行整定, 而这些指标可以由表征跟踪误差收敛过程的3个边界来刻画。

3 鲁棒性分析

理想误差动态(8)决定着 e_k 的动态行为, 控制器参数不同, 相应的误差特性也不同。本节将推导出稳态误差带边界、绝对吸引层边界与单调减区域边界的表达式, 用于具体的控制器参数整定和表征闭环系统的误差动态行为。

3.1 单调减区域 (Δ_{MDR})

在重复控制器(11)作用下, 闭环系统跟踪误差 e_k 的单调减区域边界

$$\Delta_{MDR} = \begin{cases} \frac{\Delta - \varepsilon}{\rho}, & 0 < \varepsilon \leq \min\{(1 - 2\rho)\Delta, \Delta - \rho\delta\}; \\ \Delta, & \Delta - \rho\delta < \varepsilon \leq (1 - \rho)\delta - \Delta; \\ \frac{\varepsilon + \Delta}{1 - \rho}, & \varepsilon > \max\{(1 - 2\rho)\Delta, (1 - \rho)\delta - \Delta\}. \end{cases} \quad (12)$$

下面分 $\Delta_{MDR} > \delta$ 和 $\Delta_{MDR} \leq \delta$ 两种情况讨论。

1) 考虑 $\Delta_{MDR} > \delta$ 情况。

当 $e_k > \Delta_{MDR} > \delta$ 时, 式(4)中 $\zeta_\delta(e_k) = 1$ 。由理想误差动态(8)和 $|d_{k+1}^* - d_{k+1}| \leq \Delta$, 可得

$$\begin{cases} e_{k+1} \leq (1 - \rho)e_k - \varepsilon + \Delta; \\ e_{k+1} \geq (1 - \rho)e_k - \varepsilon - \Delta. \end{cases} \quad (13)$$

若使 e_k 同号单调递减, 即 $0 < e_{k+1} < e_k$, 则需要满足

$$\begin{cases} (1 - \rho)e_k - \varepsilon + \Delta < e_k; \\ (1 - \rho)e_k - \varepsilon - \Delta > 0. \end{cases} \quad (14)$$

解不等式方程组(14), 可得

$$e_k > \max \left\{ \frac{\Delta - \varepsilon}{\rho}, \frac{\varepsilon + \Delta}{1 - \rho} \right\}. \quad (15)$$

同理, 当 $e_k < -\Delta_{MDR} < -\delta$ 时, 若使 e_k 同号单调递增, 则 e_k 需满足

$$e_k < \min \left\{ -\frac{\Delta - \varepsilon}{\rho}, -\frac{\varepsilon + \Delta}{1 - \rho} \right\}. \quad (16)$$

因此, 单调减区域边界

$$\Delta_{MDR} = \max \left\{ \frac{\Delta - \varepsilon}{\rho}, \frac{\varepsilon + \Delta}{1 - \rho} \right\} > \delta. \quad (17)$$

2) 考虑 $\Delta_{MDR} \leq \delta$ 情况。

当 $\Delta_{MDR} < e_k \leq \delta$ 时, 式(4)中 $\zeta_\delta(e_k) = 0$ 。利用式(8), 有 $e_{k+1} = d_{k+1}^* - d_{k+1}$ 。因为 $-\Delta \leq d_{k+1}^* - d_{k+1} \leq \Delta$, 所以 $\Delta_{MDR} < \Delta$ 情况不存在。当 $e_k > \Delta_{MDR} = \Delta$ 时, $0 < e_{k+1} < e_k$ 恒成立。

同理, 当 $-\delta \leq e_k < -\Delta_{MDR}$ 时, 可得到相同的结果。因此, 单调减区域边界

$$\Delta_{MDR} = \Delta \leq \delta. \quad (18)$$

当 $e_k > \delta$ 时, 有不等式方程组

$$\begin{cases} (1 - \rho)e_k - \varepsilon + \Delta < e_k; \\ (1 - \rho)e_k - \varepsilon - \Delta > 0. \end{cases} \quad (19)$$

不等式方程组(19)成立的条件为满足式(15)。因

为 $e_k > \delta$, 继而 $e_k > \Delta_{MDR}$, 所以只要保证

$$\max \left\{ \frac{\Delta - \varepsilon}{\rho}, \frac{\varepsilon + \Delta}{1 - \rho} \right\} \leq \delta, \quad (20)$$

不等式方程组 (19) 恒成立, 即无解. 同理, 当 $e_k < -\delta$ 时, Δ_{MDR} 亦无解.

结合式 (18), 可得

$$\Delta_{MDR} = \Delta, \text{ as } \max \left\{ \frac{\Delta - \varepsilon}{\rho}, \frac{\varepsilon + \Delta}{1 - \rho} \right\} \leq \delta. \quad (21)$$

由式 (17) 和 (21), 可得

$$\Delta_{MDR} = \begin{cases} \max \left\{ \frac{\Delta - \varepsilon}{\rho}, \frac{\varepsilon + \Delta}{1 - \rho} \right\} > \delta; \\ \Delta, \text{ as } \max \left\{ \frac{\Delta - \varepsilon}{\rho}, \frac{\varepsilon + \Delta}{1 - \rho} \right\} \leq \delta. \end{cases} \quad (22)$$

单调减区域边界 Δ_{MDR} 的具体表达式依赖于控制器 (11) 中的可调参数 $(\varepsilon, \rho, \delta)$ 与扰动的界值 (Δ) 的关系. 根据式 (22), 当 $\delta \leq 2\Delta$ 时, 以 $\varepsilon = (1 - 2\rho)\Delta$ 进行分界, 可得 Δ_{MDR} 的表达式为

$$\Delta_{MDR} = \begin{cases} \frac{\Delta - \varepsilon}{\rho}, \varepsilon \leq (1 - 2\rho)\Delta; \\ \frac{\Delta + \varepsilon}{1 - \rho}, \varepsilon > (1 - 2\rho)\Delta. \end{cases} \quad (23)$$

当 $\delta > 2\Delta$ 时, 可以用 $\varepsilon = \Delta - \rho\delta$ 和 $(1 - \rho)\delta - \Delta$ 进行分界, 得 Δ_{MDR} 的表达式为

$$\Delta_{MDR} = \begin{cases} \frac{\Delta - \varepsilon}{\rho}, \varepsilon \leq \Delta - \rho\delta; \\ \Delta, \Delta - \rho\delta < \varepsilon \leq (1 - \rho)\delta - \Delta; \\ \frac{\Delta + \varepsilon}{1 - \rho}, \varepsilon > (1 - \rho)\delta - \Delta. \end{cases} \quad (24)$$

这样, 结合式 (23) 和 (24) 可得 (12).

3.2 绝对吸引层 (Δ_{AAL})

跟踪误差 e_k 的绝对吸引层边界为

$$\Delta_{AAL} = \begin{cases} \frac{\Delta - \varepsilon}{\rho}, 0 < \varepsilon \leq \min\{(1 - \rho)\Delta, \Delta - \rho\delta\}; \\ \Delta, \Delta - \rho\delta < \varepsilon \leq (2 - \rho)\delta - \Delta; \\ \frac{\varepsilon + \Delta}{2 - \rho}, \varepsilon > \max\{(1 - \rho)\Delta, (2 - \rho)\delta - \Delta\}. \end{cases} \quad (25)$$

下面分 $\Delta_{AAL} > \delta$ 和 $\Delta_{AAL} \leq \delta$ 两种情况讨论.

1) 考虑 $\Delta_{AAL} > \delta$ 的情况.

当 $e_k > \Delta_{AAL} > \delta$ 时, 式 (4) 中 $\zeta_\delta(e_k) = 1$. 由理想误差动态 (8) 和 $|d_{k+1}^* - d_{k+1}| \leq \Delta$, 可得

$$\begin{cases} e_{k+1} \leq (1 - \rho)e_k - \varepsilon + \Delta; \\ e_{k+1} \geq (1 - \rho)e_k - \varepsilon - \Delta. \end{cases} \quad (26)$$

若使 $|e_k|$ 单调递减, 即 $-e_k < e_{k+1} < e_k$, 则需要满足

$$\begin{cases} (1 - \rho)e_k - \varepsilon + \Delta < e_k; \\ (1 - \rho)e_k - \varepsilon - \Delta > -e_k. \end{cases} \quad (27)$$

解不等式方程组 (27), 得

$$e_k > \max \left\{ \frac{\Delta - \varepsilon}{\rho}, \frac{\varepsilon + \Delta}{2 - \rho} \right\}. \quad (28)$$

同理, 当 $e_k < -\Delta_{AAL} < -\delta$ 时, 若使 $|e_k|$ 单调递增, 则 e_k 需满足

$$e_k < \min \left\{ -\frac{\Delta - \varepsilon}{\rho}, -\frac{\varepsilon + \Delta}{2 - \rho} \right\}.$$

因此, 绝对吸引层的边界

$$\Delta_{AAL} = \max \left\{ \frac{\Delta - \varepsilon}{\rho}, \frac{\varepsilon + \Delta}{2 - \rho} \right\} > \delta. \quad (29)$$

2) 考虑 $\Delta_{AAL} \leq \delta$ 的情况.

当 $\Delta_{AAL} < e_k \leq \delta$ 时, 式 (4) 中 $\zeta_\delta(e_k) = 0$. 依据 Δ_{AAL} 的定义和式 (8), 可得 $-e_k < d_{k+1}^* - d_{k+1} < e_k$. 利用 $|d_{k+1}^* - d_{k+1}| \leq \Delta$, 有 $e_k > \Delta$.

同理, 当 $-\delta \leq e_k < -\Delta_{AAL}$ 时, 可得到相同的结果. 因此, 绝对吸引层边界

$$\Delta_{AAL} = \Delta \leq \delta. \quad (30)$$

当 $e_k > \delta$ 时, 有不等式方程组

$$\begin{cases} (1 - \rho)e_k - \varepsilon + \Delta < e_k; \\ (1 - \rho)e_k - \varepsilon - \Delta > -e_k. \end{cases} \quad (31)$$

不等式方程组 (31) 成立的条件为满足式 (28). 因为 $e_k > \delta$, 继而 $e_k > \Delta_{AAL}$, 所以只要保证

$$\max \left\{ \frac{\Delta - \varepsilon}{\rho}, \frac{\varepsilon + \Delta}{2 - \rho} \right\} \leq \delta, \quad (32)$$

不等式方程组 (31) 恒成立, 即无解. 同理, 当 $e_k < -\delta$ 时, Δ_{AAL} 亦无解.

结合式 (30), 可得

$$\Delta_{AAL} = \Delta, \text{ as } \max \left\{ \frac{\Delta - \varepsilon}{\rho}, \frac{\varepsilon + \Delta}{2 - \rho} \right\} \leq \delta. \quad (33)$$

由式 (29) 和 (33), 可得

$$\Delta_{AAL} = \begin{cases} \max \left\{ \frac{\Delta - \varepsilon}{\rho}, \frac{\varepsilon + \Delta}{2 - \rho} \right\} > \delta; \\ \Delta, \text{ as } \max \left\{ \frac{\Delta - \varepsilon}{\rho}, \frac{\varepsilon + \Delta}{2 - \rho} \right\} \leq \delta. \end{cases} \quad (34)$$

绝对吸引层边界 Δ_{AAL} 的具体表达式依赖于控制器 (11) 中的可调参数 $(\varepsilon, \rho, \delta)$ 与扰动的界值 (Δ) 的关系. 根据式 (34), 当 $\delta \leq \Delta$ 时, 以 $\varepsilon = (1 - \rho)\Delta$ 进行分界, 可得 Δ_{AAL} 的表达式为

$$\Delta_{AAL} = \begin{cases} \frac{\Delta - \varepsilon}{\rho}, \varepsilon \leq (1 - \rho)\Delta; \\ \frac{\Delta + \varepsilon}{2 - \rho}, \varepsilon > (1 - \rho)\Delta. \end{cases} \quad (35)$$

当 $\delta > \Delta$ 时, 可以用 $\varepsilon = \Delta - \rho\delta$ 和 $(2 - \rho)\delta - \Delta$ 进行分界, 得 Δ_{AAL} 的表达式为

$$\Delta_{AAL} = \begin{cases} \frac{\Delta - \varepsilon}{\rho}, \varepsilon \leq \Delta - \rho\delta; \\ \Delta, \Delta - \rho\delta < \varepsilon \leq (2 - \rho)\delta - \Delta; \\ \frac{\Delta + \varepsilon}{2 - \rho}, \varepsilon > (2 - \rho)\delta - \Delta. \end{cases} \quad (36)$$

这样, 结合式 (35) 和 (36) 可得 (25).

3.3 稳态误差带 (Δ_{SSE})

稳态误差带是用来表征闭环系统稳态性能的重要指标. 在重复控制器 (11) 作用下, 跟踪误差 e_k 最终

会稳定在由控制器参数 $(\rho, \varepsilon, \delta)$ 和扰动的界值 (Δ) 确定的一误差带内. 闭环系统的稳态误差带边界为

$$\Delta_{\text{SSE}} = \begin{cases} \frac{\Delta - \varepsilon}{\rho}, & 0 < \varepsilon \leq \min\left\{\frac{(1-\rho)(\Delta + \rho\delta)}{1+\rho}, \Delta - \rho\delta\right\}; \\ \Delta, & \Delta - \rho\delta < \varepsilon \leq (2-\rho)\delta - \Delta; \\ \varepsilon + \Delta - (1-\rho)\delta, & \varepsilon > \max\left\{\frac{(1-\rho)(\Delta + \rho\delta)}{1+\rho}, (2-\rho)\delta - \Delta\right\}. \end{cases} \quad (37)$$

下面分 $\Delta_{\text{SSE}} > \delta$ 和 $\Delta_{\text{SSE}} \leq \delta$ 两种情况讨论.

1) 考虑 $\Delta_{\text{SSE}} > \delta$ 的情况.

当 $\delta < e_k \leq \Delta_{\text{SSE}}$ 时, $\zeta_\delta(e_k) = 1$. 依据 Δ_{SSE} 的定义, 由理想误差动态(8)和 $|d_{k+1}^* - d_{k+1}| \leq \Delta$, 可得

$$\begin{cases} (1-\rho)\Delta_{\text{SSE}} - \varepsilon + \Delta \leq \Delta_{\text{SSE}}; \\ (1-\rho)\delta - \varepsilon - \Delta \geq -\Delta_{\text{SSE}}. \end{cases} \quad (38)$$

解不等式方程组(38), 可得

$$\Delta_{\text{SSE}} \geq \max\left\{\frac{\Delta - \varepsilon}{\rho}, \varepsilon + \Delta - (1-\rho)\delta\right\}. \quad (39)$$

同理, 当 $-\Delta_{\text{SSE}} \leq e_k < -\delta$ 时, 可得相同的结果. 因此, 闭环系统的稳态误差带边界(选取满足边界取值条件的最小值)

$$\Delta_{\text{SSE}} = \max\left\{\frac{\Delta - \varepsilon}{\rho}, \varepsilon + \Delta - (1-\rho)\delta\right\} > \delta. \quad (40)$$

当 $0 \leq e_k \leq \delta \leq \Delta_{\text{SSE}}$ 时, 根据 Δ_{SSE} 的定义, 有

$$-\Delta_{\text{SSE}} \leq d_{k+1}^* - d_{k+1} \leq \Delta_{\text{SSE}}.$$

利用 $|d_{k+1}^* - d_{k+1}| \leq \Delta$, 可得 $\Delta_{\text{SSE}} \geq \Delta$. 同理, 当 $-\Delta_{\text{SSE}} \leq -\delta < e_k$ 时, 可得相同的结果. 因此, 闭环系统的稳态误差带边界

$$\Delta_{\text{SSE}} = \Delta > \delta. \quad (41)$$

结合式(40)和(41), 可得

$$\Delta_{\text{SSE}} = \max\left\{\frac{\Delta - \varepsilon}{\rho}, \varepsilon + \Delta - (1-\rho)\delta, \Delta\right\} > \delta. \quad (42)$$

2) 考虑 $\Delta_{\text{SSE}} \leq \delta$ 的情况.

当 $0 < e_k \leq \Delta_{\text{SSE}} \leq \delta$ 时, 根据 Δ_{SSE} 的定义, 有

$$-\Delta_{\text{SSE}} \leq d_{k+1}^* - d_{k+1} \leq \Delta_{\text{SSE}}.$$

利用 $|d_{k+1}^* - d_{k+1}| \leq \Delta$, 有 $\Delta_{\text{SSE}} \geq \Delta$; 同理, 当 $-\delta \leq -\Delta_{\text{SSE}} \leq e_k < 0$ 时, 可得相同的结果. 因此, 闭环系统的稳态误差带边界

$$\Delta_{\text{SSE}} = \Delta \leq \delta. \quad (43)$$

由式(42)和(43), 可得

$$\Delta_{\text{SSE}} = \begin{cases} \max\left\{\frac{\Delta - \varepsilon}{\rho}, \varepsilon + \Delta - (1-\rho)\delta, \Delta\right\} > \delta; \\ \Delta \leq \delta. \end{cases} \quad (44)$$

稳态误差带边界 Δ_{SSE} 的具体表达式依赖于控制器(11)中的可调参数 $(\varepsilon, \rho, \delta)$ 与扰动的界值 (Δ) 的关系. 根据式(44), 当 $\delta \leq \Delta$ 时, 以 $\varepsilon = (1-\rho)(\Delta - \rho\delta)/(1+\rho)$ 进行分界, 可得 Δ_{SSE} 的表达式为

$$\Delta_{\text{SSE}} = \begin{cases} \frac{\Delta - \varepsilon}{\rho}, & \varepsilon \leq \frac{(1-\rho)(\Delta - \rho\delta)}{1+\rho}; \\ \varepsilon + \Delta - (1-\rho)\delta, & \varepsilon > \frac{(1-\rho)(\Delta - \rho\delta)}{1+\rho}. \end{cases} \quad (45)$$

当 $\delta > \Delta$ 时, 可以用 $\varepsilon = \Delta - \rho\delta$ 和 $(2-\rho)\delta - \Delta$ 进行分界, 得 Δ_{SSE} 的表达式为

$$\Delta_{\text{SSE}} = \begin{cases} \frac{\Delta - \varepsilon}{\rho}, & \varepsilon \leq \Delta - \rho\delta; \\ \Delta, & \Delta - \rho\delta < \varepsilon \leq (2-\rho)\delta - \Delta; \\ \varepsilon + \Delta - (1-\rho)\delta, & \varepsilon > (2-\rho)\delta - \Delta. \end{cases} \quad (46)$$

这样, 结合式(45)和(46)可得(37).

注2 由表达式(12)、(25)和(37)知, 3个边界的大小取决于控制器(11)中的可调参数 $(\varepsilon, \rho, \delta)$ 和扰动的界值 (Δ) . 在实现时, 可首先提出对3个边界值的要求, 具体控制器参数的整定工作可根据这些要求和3个边界的具体表达式进行.

注3 从 d_k 的定义可以看出, 所设计的重复控制器(11)可完全抑制周期对称干扰信号; Δ_{SSE} 表示非周期干扰信号的抑制性能水平.

4 基于理想误差动态的反馈控制

上节所述的离散重复控制方法同样也适用于常值调节问题. 给定参考信号满足 $r_k = r_{k-1}$, 系统干扰信号 w_k 的主要成分在稳态时表现为常值干扰, 这时引入的变量为 $\bar{d}_k = w_k - w_{k-1}$ (即周期 $N = 1$ 的周期干扰). 将干扰补偿、抑制措施“嵌入”吸引律(3), 构造如下理想误差动态:

$$e_{k+1} = \zeta_\delta(e_k)[(1-\rho)e_k - \varepsilon \text{sgn}(e_k)] + \bar{d}_{k+1}^* - \bar{d}_{k+1}, \quad (47)$$

其中 \bar{d}_{k+1}^* 为 \bar{d}_{k+1} 的补偿值. 下述的反馈控制器可实现该理想误差动态:

$$u_k = u_{k-1} + \frac{1}{b_1} \left[\zeta_\delta(e_k)[-(1-\rho)e_k + \varepsilon \text{sgn}(e_k)] + e_k - r_k + r_{k+1} + \sum_{i=1}^n a_i (y_{k+1-i} - y_{k-i}) - \sum_{i=2}^n b_i (u_{k+1-i} - u_{k-i}) - \bar{d}_{k+1}^* \right]. \quad (48)$$

在式(48)作用下, 理想误差动态(47)的收敛性能分析过程与式(8)是一致的, 上节推导出的结果可用于式(48)的参数整定. 本节所设计的控制器可有效抑制常值干扰对系统动态性能的影响, 而重复控制是针

对周期对称干扰信号抑制问题提出的。

5 仿真与实验

为了验证所提出离散重复控制方法的有效性,本文针对电机伺服系统分别进行数值仿真和实验。该系统包括PC上位机、TMS320F2812 DSP开发板、ELMO驱动器、电机、电源等。电机为韩国生产的APM-SB01AGN,其检测精度为6000线。ELMO驱动器除了实现电机驱动外,还承担速度环与电流环控制(均采用PI控制算法),其基本参数通过上位机的配套软件进行设置并由串口下载到驱动器;本文设计的控制器作为电机三环控制系统中的位置环控制器;其控制由DSP处理器实现,PC上位机完成算法编程,然后通过DSP仿真器将控制程序下载到DSP开发板。

通过实验,本文获得的伺服对象数学模型如下:

$$\begin{aligned} y_{k+1} = & \\ & 1.5001y_k - 0.4989y_{k-1} + 2.1589u_k - \\ & 0.5113u_{k-1} + w_{k+1}. \end{aligned} \quad (49)$$

对于由式(49)表示的伺服系统,控制器(11)变成

$$\begin{aligned} u_k = & \\ & u_{k-N} + 0.4632[-0.5113(u_{k-1-N} - u_{k-1}) - \\ & 1.5001(y_k - y_{k-N}) + 0.4989(y_{k-1} - \\ & y_{k-1-N}) + r_{k+1} - r_{k+1-N} + e_{k+1-N} + \\ & \zeta_\delta(e_k)] - (1 - \rho)e_k + \varepsilon \operatorname{sgn}(e_k) - d_{k+1}^*. \end{aligned} \quad (50)$$

5.1 仿真结果

在仿真中,选取参考正弦信号 $r_k = 10\pi \times \sin(2\pi f T_s(k-1))$ rad, 采样周期 $T_s = 5$ ms, 频率 $f = 0.25$ Hz。系统干扰由周期对称干扰信号与非周期干扰信号组成,具体形式如下:

$$\begin{aligned} w_{k+1} = & \\ & -2\sin(2k\pi/N) + 0.25(-1)^{\operatorname{fix}(\frac{k}{800}) + \operatorname{fix}(\frac{k}{160})} \times \\ & \operatorname{sgn}(\operatorname{mod}(k, 90) - 9). \end{aligned} \quad (51)$$

其中: N 为周期扰动的步数,在实际仿真中选取 $N = 800$,吸引律中不确定项的界 $\Delta = 0.5$ 。

为了验证闭环系统的绝对吸引层边界 Δ_{AAL} 、单调减区域边界 Δ_{MDR} 和稳态误差带边界 Δ_{SSE} 的准确性,考虑3种情形的控制器参数设置。

情形1 当 $0 < \varepsilon \leq \min\{(1-2\rho)\Delta, (1-\rho)(\Delta + \rho\delta)/(1+\rho)\}$, $\delta \leq \Delta$ 时,单调减区域边界 Δ_{MDR} 、稳态误差带边界 Δ_{SSE} 和绝对吸引层边界 Δ_{AAL} 均为 $(\Delta - \varepsilon)/\rho$ 。控制器参数设置为 $\rho = 0.4$, $\varepsilon = 0.08$, $\delta = 0.2$, 此时 $\Delta_{MDR} = \Delta_{SSE} = \Delta_{AAL} = 1.05$, 仿真结果如图1所示。重复控制在第1个周期中不起作用,故图中跟踪误差 e_k 远离边界层。图2及图3亦是如此。

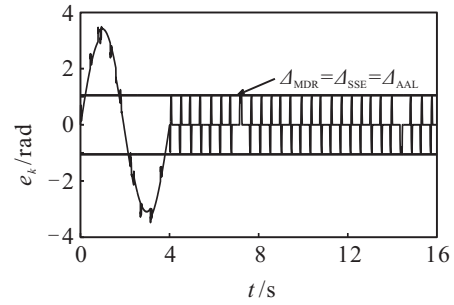


图1 跟踪误差 e_k ($\Delta_{MDR} = \Delta_{SSE} = \Delta_{AAL}$)

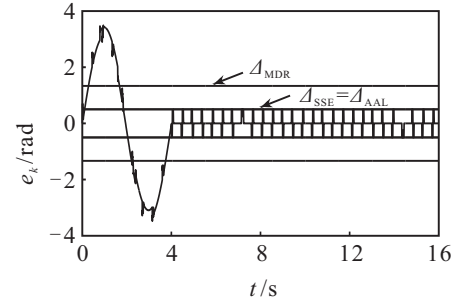


图2 跟踪误差 e_k ($\Delta_{MDR} > \Delta_{SSE} = \Delta_{AAL}$)

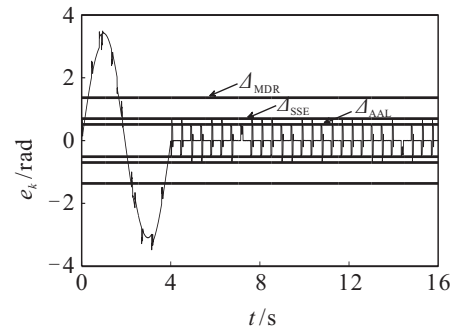


图3 跟踪误差 e_k ($\Delta_{MDR} > \Delta_{SSE} > \Delta_{AAL}$)

情形2 当 $\max\{(1-2\rho)\Delta, \Delta - \rho\delta\} < \varepsilon \leq (2-\rho)\delta - \Delta$, $\Delta < \delta \leq 2\Delta$ 时,稳态误差带边界 Δ_{SSE} 和绝对吸引层边界 Δ_{AAL} 为 Δ ,单调减区域边界 Δ_{MDR} 为 $(\varepsilon + \Delta)/(1-\rho)$ 。控制器参数设置为 $\rho = 0.4$, $\varepsilon = 0.3$, $\delta = 0.8$, 此时 $\Delta_{SSE} = \Delta_{AAL} = 0.5$, $\Delta_{MDR} = 1.33$, 仿真结果如图2所示。

情形3 当 $\varepsilon > \max\{(1-\rho)\Delta, (1-\rho)(\Delta + \rho\delta)/(1+\rho)\}$, $\delta \leq \Delta$ 时,单调减区域 Δ_{MDR} 为 $(\varepsilon + \Delta)/(1-\rho)$,绝对吸引层边界 Δ_{AAL} 为 $(\varepsilon + \Delta)/(2-\rho)$,稳态误差带边界 Δ_{SSE} 为 $\varepsilon + \Delta - (1-\rho)\delta$ 。控制器参数设置为 $\rho = 0.4$, $\varepsilon = 0.32$, $\delta = 0.2$, 此时 $\Delta_{MDR} = 1.37$, $\Delta_{AAL} = 0.51$, $\Delta_{SSE} = 0.7$, 仿真结果如图3所示。

5.2 实验结果

在实验中,控制器参数选取为 $\rho = 0.4$, $\varepsilon = 0.00035$, $\delta = 0.0004$,且对下述3种情形进行实验。

情形4 给定参考信号 r_k 设置为

$$r_k = \frac{\pi}{2} \times \sin(2\pi f T_s(k-1)).$$

其中:采样周期 $T_s = 5$ ms, 频率 $f = 0.25$ Hz。采用控制器(48), 实验中得到 \bar{d}_k 的数据(见图4), 并取 \bar{d}_k 的

上、下界为 ± 0.00118 , 阈值 $\Delta = 0.00118$. 由此可知

$$\Delta_{MDR} = (\varepsilon + \Delta)/(1 - \rho) = 0.0026,$$

$$\Delta_{SSE} = \Delta_{AAL} = (\Delta - \varepsilon)/\rho = 0.0021.$$

跟踪误差 e_k 在一个采样周期 ($T_s = 5$ ms) 之后控制在 8.5×10^{-4} rad 左右, 且呈周期性 (周期与给定参考信号 r_k 相同).

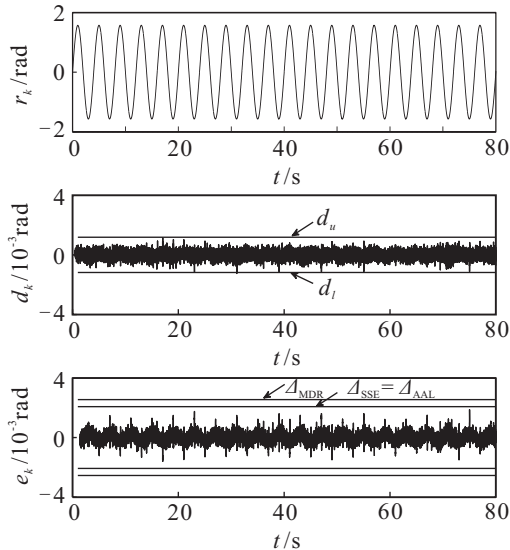


图4 采用控制器(48)时的跟踪性能

情形5 给定参考信号 r_k 设置为正弦信号 (同上). 采用控制器 (50), 实验中得到 w_k 和 d_k 的数据 (见图5), d_k 已不具有 w_k 所含有的周期对称干扰信号, 且取 d_k 的上、下界为 ± 0.0007 , 阈值 $\Delta = 0.0007$. 由此可知

$$\Delta_{MDR} = (\varepsilon + \Delta)/(1 - \rho) = 0.00175,$$

$$\Delta_{SSE} = \Delta_{AAL} = (\Delta - \varepsilon)/\rho = 0.000875.$$

跟踪误差 e_k 在一个参考信号周期 ($T = 4$ s) 之后控制在 7×10^{-4} rad 左右, 周期对称干扰信号得到有效抑制, 进一步提高了控制精度.

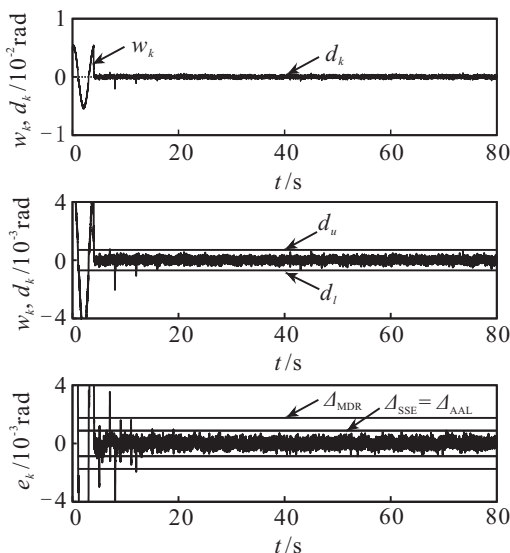


图5 采用控制器(50)时的跟踪性能

情形6 定位控制实验中电机的参考信号为

$$r_k = \begin{cases} 0, & 0 < kT_s \leq 1; \\ \frac{\pi}{2}(3(kT_s - 1)^2 - 2(kT_s - 1)^3), & 1 < kT_s \leq 2; \\ \frac{\pi}{2}, & kT_s > 2. \end{cases}$$

其中采样周期 $T_s = 5$ ms. 采用控制器 (48), 实验结果见图6. 可以看出, 系统定位误差在 10^{-3} rad 左右.

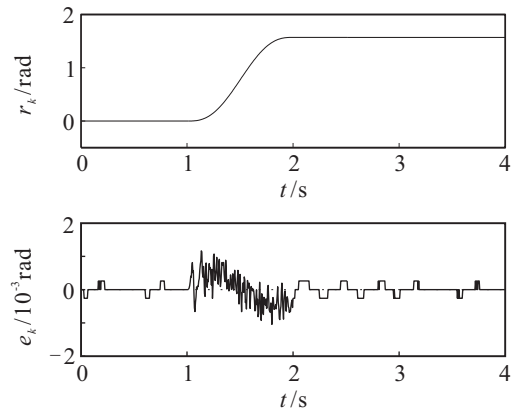


图6 采用控制器(48)时的给定参考信号和位置误差

6 结论

本文利用死区函数构造一种具有干扰抑制作用的理想误差动态, 并依据理想误差动态设计离散重复控制器. 文中推导出能够用于控制器参数整定和表征系统跟踪误差收敛过程的单调减区域、绝对吸引层和稳态误差带边界的具体表达式. 这一控制方法也适用于常值调节问题的反馈控制. 数值仿真和在电机伺服系统上的实验结果表明, 所提出的重复控制方法能够完全抑制周期对称干扰信号.

参考文献(References)

- [1] Utkin V I. Variable structure systems with sliding modes[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1977, 22(2): 212-222.
- [2] Dote Y, Holf R G. Microprocessor based sliding mode controller for DC motor drivers[C]. Proc of Industrial Application Society Annual Meeting. Cincinnati, 1980: 154-161.
- [3] Sarpturk S Z, Istefanopulos Y, Kaynak O. On the stability of discrete-time sliding mode control systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1987, 32(10): 930-932.
- [4] Furuta K. Sliding mode control of a discrete system[J]. Systems and Control Letters, 1990, 14(2): 145-152.
- [5] 高为炳. 变结构控制系统的品质控制[J]. 控制与决策, 1989, 4(1): 1-6.
(Gao W B. Quality control of variable structure control system[J]. Control and Decision, 1989, 4(1): 1-6.)

- [6] Gao W B, Wang Y, Homaifa A. Discrete-time variable structure control systems[J]. IEEE Trans on Industrial Electronics, 1995, 42(1): 117-122.
- [7] 高为炳. 变结构控制的理论及设计方法[M]. 北京: 科学出版社, 1996: 278-299.
(Gao W B. Variable structure control theory and design method[M]. Beijing: Science Press, 1996: 278-299.)
- [8] Batoszewicz A. Remarks on “discrete-time variable structure control systems”[J]. IEEE Trans on Industrial Electronics, 1996, 43(1): 235-238.
- [9] Batoszewicz A. Discrete-time quasi-sliding mode control strategies[J]. IEEE Trans on Industrial Electronics, 1998, 45(3): 633-637.
- [10] Eun Y, Kim J, Kim K, et al. Discrete-time variable structure controller with a decoupled disturbance compensator and its application to a CNC servomechanism[J]. IEEE Trans on Control Systems Technology, 1997, 7(4): 414-423.
- [11] Sun M X, Xie H Y, Wang H. Switching-function dynamics designs for uncertain variable structure systems with repetitive control[J]. Int J of Control, 2011, 84(7): 1196-1208.
- [12] 孙明轩, 范伟云, 王辉. 用于离散滑模重复控制的新型趋近律[J]. 自动化学报, 2011, 37(10): 1213-1221.
(Sun M X, Fan W Y, Wang H. Discrete sliding mode repetitive control with using a novel reaching law[J]. Acta Automatica Sinica, 2011, 37(10): 1213-1221.)
- [13] Misawa E A. Discrete-time sliding mode control for nonlinear systems with unmatched uncertain control vector[J]. The American Society of Mechanical Engineers J of Dynamic Systems, Measurement, and Control, 1997, 119(3): 503-512.
- [14] Tang C Y, Misawa E A. Discrete variable structure control for linear multivariable systems[J]. ASME J of Dynamic Systems, Measurement, and Control, 2000, 122(4): 783-792.
- [15] Golo G, Milosavjevic C. Robust discrete-time chattering free sliding mode control[J]. Systems and Control Letters, 2000, 41(1): 19-28.
- [16] 于双和, 强文义, 傅佩琛. 无抖振离散准滑模控制[J]. 控制与决策, 2001, 16(3): 380-382.
(Yu S H, Qiang W Y, Fu P C. Chattering-free discrete quasi-sliding mode controller[J]. Control and Decision, 2001, 16(3): 380-382.)
- [17] 宋立忠, 李槐树, 姚琼荟. 基于趋近律方法的离散时间系统变结构控制[J]. 控制理论与应用, 2008, 25(3): 525-528.
(Song L Z, Li H S, Yao Q H. Discrete-time variable-structure control based on reaching-law approach[J]. Control Theory & Application, 2008, 25(3): 525-528.)
- [18] 何召兰, 王茂, 黄昆, 等. 不确定离散切换系统的滑模控制[J]. 控制与决策, 2009, 24(5): 789-793.
(He Z L, Wang M, Huang K, et al. Sliding-mode control for uncertain discrete-time switched system[J]. Control and Decision, 2009, 24(5): 789-793.)
- [19] 刘涛, 刘贺平. 一种基于死区离散趋近律的准滑模控制[J]. 自动化学报, 2011, 37(6): 760-766.
(Liu T, Liu H P. Quasi-sliding-mode control based on discrete reaching law with dead zone[J]. Acta Automatica Sinica, 2011, 37(6): 760-766.)
- [20] Tomizuka M, Tsao T, Chew K. Analysis and synthesis of discrete-time repetitive controllers[J]. ASME J of Dynamic Systems, Measurement, and Control, 1989, 111(3): 353-358.
- [21] Longman R W. Iterative learning control and repetitive control for engineering practice[J]. Int J of Control, 2000, 73(10): 930-954.
- [22] 孙明轩, 邬玲伟. 离散时间重复控制的理想误差动态设计方法[C]. 第24届中国控制与决策会议. 太原, 2012: 1734-1739.
(Sun M X, Wu L W. Ideal error dynamics based design of discrete-time repetitive controllers[C]. Proc of IEEE 24th Chinese Control and Decision Conf. Taiyuan: IEEE, 2012: 1734-1739.)
- [23] Sun M X, Wu L W, Xu L D. Discrete-time repetitive control with ideal error dynamics[C]. Proc of IEEE 12th Int Conf on Control, Automation, Robotics and Vision. Guangzhou: IEEE, 2012: 458-463.
- [24] 孙明轩, 许利达, 邬玲伟. 离散时间系统重复控制的理想误差动态方法[J]. 控制与决策, 2013, 28(12): 1771-1778.
(Sun M X, Xu L D, Wu L W. Ideal-error-dynamics approach for repetitive control of discrete-time systems[J]. Control and Decision, 2013, 28(12): 1771-1778.)

(责任编辑: 孙艺红)