

线性扩张状态观测器及其高阶形式的性能分析

邵星灵, 王宏伦

(北京航空航天大学 a. 自动化科学与电气工程学院, b. 飞行器控制一体化技术国家重点实验室, 北京 100191)

摘要: 扩张状态观测器(ESO)作为自抗扰控制(ADRC)的核心组件,其自身及高阶扩展形式的性能分析与评估至关重要。借助Lyapunov逆定理证明了任意扩张阶数下线性扩张状态观测器(LESO)重构状态误差的收敛性,并得出了观测误差上界与扩张阶数的定量关系式;在分别考虑扩张阶数、观测器带宽以及剪切频率的情况下,探讨了高阶及传统LESO的动态响应、干扰抑制能力与观测器参数间的关系;最后,结合改进的ADRC控制器,在估计能力、峰值现象的抑制、滤噪性能等方面对高阶及传统LESO进行了性能评估与仿真验证。所得出的结论可为ADRC应用中ESO的选取提供有效的理论依据。

关键词: 扩张状态观测器; 高阶线性扩张状态观测器; 滤噪性能; 峰值现象; 扩张阶数

中图分类号: TP249.1

文献标志码: A

Performance analysis on linear extended state observer and its extension case with higher extended order

SHAO Xing-ling, WANG Hong-lun

(a. School of Automation Science and Electrical Engineering, b. The Stat Key Laboratory of Science and Technology on Aircraft Control, Beihang University, Beijing 100191, China. Correspondent: WANG Hong-lun, E-mail: hl_wang_2002@126.com)

Abstract: As the central component of active disturbance rejection control(ADRC), the performance analysis and evaluation on the linear extended state observer(LESO) and its extension case with higher extended order are of greatly significance. The convergence of the estimation error for LESO with any extended order is proved by utilizing Lyapunov's inverse theory. Simultaneously, the quantitative relationship between the upper bound of the estimated error and the extended order is derived. Under the consideration of the given extended order, bandwidth and the shear frequency, the relationships between parameters of the observer and the dynamic response, and disturbance attenuation ability are both analyzed. Finally, combined with enhanced controller of ADRC, the performance evaluation and simulation verification on LESO and its extension case are carried out and discussed with respect to the capability in estimation, the suppression of peaking phenomenon and noise attenuation. The obtained conclusion can provide a theoretical basis for the selection of ESO in the application of ADRC.

Keywords: extended state observer(ESO); LESO with higher extended order; performance of noise attenuation; peaking phenomenon; extended order

0 引言

近年来,自抗扰控制(ADRC)作为一种可解决不确定非线性系统控制问题的有效方法而得到了广泛深入的应用与基础理论研究^[1]。其核心内涵在于:根据系统输出和控制输入选择简单的积分串联型为标准型,把系统动态中异于标准型的部分视为总扰动

(包括内扰和外扰),以扩张状态观测器(ESO)为手段,实时估计并在反馈控制中得以消除,从而使得闭环动态系统具有较好的控制性能。可见,ESO观测品质的优劣是影响ADRC控制性能的关键因素。

此外,ESO的独特优势还体现在:与滑模干扰观测器^[2]相比,ESO的构造并不需要假设干扰上界已知,

收稿日期: 2014-04-17; 修回日期: 2014-06-24.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61175084); 长江学者和创新团队发展计划项目(IRT13004); 航空科学基金项目(2014ZA51002).

作者简介: 邵星灵(1988—),男,博士生,从事飞行器制导与控制一体化、不确定非线性系统的研究; 王宏伦(1970—),男,教授,博士生导师,从事无人机自主飞行控制、管理与决策等研究。

而滑模干扰观测器的输出存在严重的抖振现象,往往需要结合自适应或其他智能控制方法加以辅助设计;另一方面,与高增益观测器^[3]相比,ESO 能根据系统的输入输出信息同时估计出系统的非可测状态和构造的扩张状态(总扰动),且观测器参数的整定有一套成熟的经验公式可供参考。

目前,关于传统 ESO(即扩张阶数为 1)的理论与应用研究大多以附属形式出现.如:文献[4]采用非线性函数设计了最初的 ESO(NESO),并给出了非线性函数构造的准则,但其中的参数整定均基于经验;文献[5]通过引入带宽的概念,将 ESO 的非线性形式线性化和参数化,同时给出了 LESO 参数的配置方法,大大减少了 ADRC 的设计参数,更便于工程应用;文献[6-7]在假设总扰动满足某种有界性条件下分析了 ESO 估计误差的收敛性;文献[8-9]均从对象模型已知和模型完全未知的角度研究了 LESO 的估计性能,并得到了 LESO 观测能力与观测器带宽成正比的结论,同时指出了当对象模型部分已知时,LESO 具有更好的观测效果^[9];文献[10]则通过频域分析给出了 NESO 性能随频率升高而逐渐衰减的结论,并改进了现有的参数配置方法。

另一方面,高阶 LESO 的出现拓展了 ADRC 理论的研究内容,如文献[11]将其定义为 LESO 的扩展形式.此外,经研究不难发现,Sira-Ramirez 等^[12]以及 Fliess 等^[13]针对 differentially flat 系统的控制问题,提出的广义比例积分(GPI)观测器与高阶 LESO 的设计思想是一致的,均可视为 Luenberger 状态观测器的特殊形式.进一步,文献[14]结合 GPI 观测器和 ADRC 思想设计了 leader-follower Thomson 跳环系统的控制器,并取得了较好的跟踪效果.遗憾的是,上述文献并未体现与传统 LESO 相比,高阶 LESO 的相对性能优势,这也是高阶 LESO 尚未得到推广与应用的主要原因.至今,国内仅有王璐等^[15]提到了高阶 LESO 的概念,其主要研究基于干扰抑制控制的飞行器姿态跟踪问题,仅仅从频率分析的角度对高阶 LESO 的部分性能进行了探讨与分析。

事实上,ESO 作为 ADRC 的核心组件,其本身及高阶形式的性能评估与确认至关重要.本文以此为切入点,以二阶不确定系统为研究对象,借助 Lyapunov 逆定理证明任意扩张阶数下 LESO 重构状态误差的收敛性,并探讨高阶及传统 LESO 的动态响应、干扰抑制能力与观测器参数间的关系;最后,结合改进的 ADRC 控制器,在估计能力、峰值现象的抑制、滤噪性能等方面对高阶及传统 LESO 进行系统地性能评估与仿真验证。

1 ESO 设计过程简介

不失一般性,本文考虑如下具有不确定性的二阶动态系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = f(t, x_1(t), x_2(t), w(t)) + bu(t), \\ y(t) = x_1(t). \end{cases} \quad (1)$$

其中: $u(t)$ 为系统输入; $x_1(t)$ 为系统的量测输出; b 为控制增益;引入扩张状态 $x_3 = f(t, x_1(t), x_2(t), w(t))$, 用来表示系统内部不确定和外扰的总和.于是系统(1)可改写为

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t) + bu(t), \\ \dot{x}_3(t) = \xi(t), \\ y(t) = x_1(t), \end{cases} \quad (2)$$

其中 $\xi(t)$ 为集总干扰的导数.根据 ESO 的设计思路,构造如下的非线性 ESO 系统^[4]:

$$\begin{cases} \dot{e}_1(t) = x_1(t) - \hat{x}_1(t), \\ \dot{\hat{x}}_1(t) = \hat{x}_2(t) + l_1 g_1(e_1(t)), \\ \dot{\hat{x}}_2(t) = \hat{x}_3(t) + l_2 g_2(e_1(t)) + bu(t), \\ \dot{\hat{x}}_3(t) = l_3 g_3(e_1(t)), \end{cases} \quad (3)$$

其中 l_i 为 ESO 的可调参数.当非线性函数 $g_i(\cdot)$ ($i = 1, 2, 3$) 满足如下条件时: $e_1 g_i(e_1) > 0, \forall e_1 \neq 0$ 且 $g_i(0) = 0$, 可以使得系统(3)的状态渐近收敛于真值,即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{x}_i(t) = x_i(t), \quad i = 1, 2, 3.$$

特别地,当 $g_i(e_1) = e_1$ 时,系统(3)可简化为如下的线性 ESO 结构:

$$\begin{cases} \dot{e}_1(t) = x_1(t) - \hat{x}_1(t), \\ \dot{\hat{x}}_1(t) = \hat{x}_2(t) + l_1 e_1(t), \\ \dot{\hat{x}}_2(t) = \hat{x}_3(t) + l_2 e_1(t) + bu(t), \\ \dot{\hat{x}}_3(t) = l_3 e_1(t). \end{cases} \quad (4)$$

相应的观测误差动态为

$$\begin{cases} \dot{e}_1(t) = e_2(t) - l_1 e_1(t), \\ \dot{e}_2(t) = e_3(t) - l_2 e_1(t), \\ \dot{e}_3(t) = \xi(t) - l_3 e_1(t). \end{cases} \quad (5)$$

若可调参数 l_i 采用基于带宽的配置方法,则满足如下条件^[8]:

$$[l_1, l_2, l_3] = [w_o \alpha_1, w_o^2 \alpha_2, w_o^3 \alpha_3], \quad w_o > 0,$$

其中 w_o 为 LESO 的带宽.选取增益系数 $\alpha_i = 3!/i! \times (3-i)!, i = 1, 2, 3$, 可以使得估计误差动态的特征多项式

$$\lambda_o(s) = (s + w_o)^3 = s^3 + w_o \alpha_1 s^2 + w_o^2 \alpha_2 s + w_o^3 \alpha_3$$

满足 Hurwitz 稳定条件.至此,观测器带宽 w_o 成为 LESO 唯一的调节参数.特别地,这里将 LESO 的扩张阶数高阶化,并且令 $l_i = \alpha_i / \varepsilon^i$, 有

$$\begin{cases} e_1(t) = x_1(t) - \hat{x}_1(t), \\ \dot{\hat{x}}_1(t) = \hat{x}_2(t) + \frac{\alpha_1}{\varepsilon} e_1(t), \\ \dot{\hat{x}}_2(t) = \hat{x}_3(t) + \frac{\alpha_2}{\varepsilon^2} e_1(t) + bu(t), \\ \dot{\hat{x}}_3(t) = \hat{x}_4(t) + \frac{\alpha_3}{\varepsilon^3} e_1(t), \\ \vdots \\ \dot{\hat{x}}_{n+1}(t) = \hat{x}_{n+2}(t) + \frac{\alpha_{n+1}}{\varepsilon^{n+1}} e_1(t), \\ \dot{\hat{x}}_{n+2}(t) = \frac{\alpha_{n+2}}{\varepsilon^{n+2}} e_1(t), \end{cases} \quad (6)$$

其中 n 为扩张阶数. 显然 $n = 1$ 时, 式 (6) 与 (4) 等价, 并且当 $w_o = 1/\varepsilon$ 时, 增益系数满足如下关系:

$$\alpha_i = (n+2)!/i!(n+2-i)!, \quad i = 1, 2, \dots, n+2.$$

式 (6) 所描述的具有高增益形式的高阶 LESO 可视为 ESO 思想与高增益观测器 (HGO) 技术的结合.

2 高阶 LESO 的收敛性

针对式 (6) 所描述的高阶 LESO 形式, 这里不失一般性, 假定扩张阶数为 n , 首先给出如下假设:

假设 1 存在正常数, 使得集总干扰 f 的 n 阶导数有界, 且满足

$$\left| \frac{d^n f(t, x_1(t), x_2(t), w(t))}{dt^n} \right| \leq M.$$

假设 2 存在常数 $\lambda_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 、 α 、 β 以及连续的正定函数 $V, W : R^{n+2} \rightarrow R$, 对于未知函数 $g_i(\cdot) (i = 1, 2, \dots, n+2)$, 有如下条件成立:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \|\mathbf{x}\|^2 &\leq V(\mathbf{x}) \leq \lambda_2 \|\mathbf{x}\|^2, \\ \lambda_3 \|\mathbf{x}\|^2 &\leq W(\mathbf{x}) \leq \lambda_4 \|\mathbf{x}\|^2, \\ \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial V}{\partial x_i} (x_{i+1} - g_i(x_1)) - \frac{\partial V}{\partial x_{n+2}} g_{n+2}(x_1) &\leq -W(\mathbf{x}), \\ \left| \frac{\partial V}{\partial x_{n+2}} \right| &\leq \beta \|\mathbf{x}\|. \end{aligned}$$

令假设 2 中的 $g_i(\cdot)$ 为常值增益函数, 有 $g_i(e_1(t)) = \alpha_i e_1(t) (i = 1, 2, \dots, n+2)$, 其中 $\alpha_i (i = 1, 2, \dots, n+2)$ 为增益系数, 则系统 (6) 可直接转换为如下的高增益形式:

$$\begin{cases} e_1(t) = x_1(t) - \hat{x}_1(t), \\ \dot{\hat{x}}_1(t) = \hat{x}_2(t) + \frac{1}{\varepsilon} g_1(e_1(t)), \\ \dot{\hat{x}}_2(t) = \hat{x}_3(t) + \frac{1}{\varepsilon^2} g_2(e_1(t)) + bu(t), \\ \dot{\hat{x}}_3(t) = \hat{x}_4(t) + \frac{1}{\varepsilon^3} g_3(e_1(t)), \\ \vdots \\ \dot{\hat{x}}_{n+1}(t) = \hat{x}_{n+2}(t) + \frac{1}{\varepsilon^{n+1}} g_{n+1}(e_1(t)), \\ \dot{\hat{x}}_{n+2}(t) = \frac{1}{\varepsilon^{n+2}} g_{n+2}(e_1(t)). \end{cases} \quad (7)$$

定理 1 若假设 1 和假设 2 均满足, 则存在摄动

参数 $0 < \varepsilon < 1$, 以及正常数 $t_p = t_0 - \frac{2\lambda_2}{\lambda_3}(n+2)\varepsilon \ln \varepsilon$, 对于形如式 (7) 的高阶系统, 有如下结论成立:

$$\sup_{0 < \varepsilon < 1} |x_i(t) - \hat{x}_i(t)| \leq O(\varepsilon^{n+3-i}), \quad \forall t \in [t_p, \infty).$$

其中: $\hat{x}_i(t) (i = 1, 2)$ 为系统 (7) 对 (1) 的状态估计值, $\hat{x}_i(t) (i = 3, \dots, n+2)$ 为系统 (7) 对 (1) 的集总干扰及其高阶导数的估计值, n 为扩张阶数.

证明 首先, 定义系统 (7) 对 (1) 的观测误差向量为

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(t) &= [x_1(t) - \hat{x}_1(t), x_2(t) - \hat{x}_2(t), \dots, \\ &\quad x_{n+2}(t) - \hat{x}_{n+2}(t)] = \\ &\quad [e_1(t), e_2(t), \dots, e_{n+2}(t)]. \end{aligned}$$

注意到假设 1 成立, 同时令^[7]

$$z_i(t) = \frac{e_i(\varepsilon t)}{\varepsilon^{n+2-i}}, \quad i = 1, 2, \dots, n+2,$$

则系统 (7) 对 (1) 的观测误差动态可描述为如下形式:

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) = z_2(t) - g_1(z_1(t)), \\ \dot{z}_2(t) = z_3(t) - g_2(z_1(t)), \\ \vdots \\ \dot{z}_{n+1}(t) = z_{n+2}(t) - g_{n+1}(z_1(t)), \\ \dot{z}_{n+2}(t) = -g_{n+2}(z_1(t)) + \varepsilon \frac{d^n f(t)}{dt^n}. \end{cases} \quad (8)$$

Lyapunov 函数 $V(\mathbf{z}(t))$ 沿着系统 (8) 关于时间 t 的导数为

$$\begin{aligned} \frac{dV(\mathbf{z}(t))}{dt} &= \\ &\left\{ \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial V}{\partial z_i} (z_{i+1} - g_i(z_1)) - \frac{\partial V}{\partial z_{n+2}} g_{n+2}(z_1) \right\} + \\ &\frac{\partial V}{\partial z_{n+2}} \varepsilon \frac{d^n f(t)}{dt^n} \leq \end{aligned}$$

$$-W(\mathbf{z}) + \beta \|\mathbf{z}\| \varepsilon \frac{d^n f(t)}{dt^n} \leq$$

$$-W(\mathbf{z}) + \varepsilon \beta M \|\mathbf{z}\| \leq$$

$$-\frac{\lambda_3}{\lambda_2} V(\mathbf{z}) + \frac{\sqrt{\lambda_1}}{\lambda_1} \varepsilon \beta M \sqrt{V(\mathbf{z})}.$$

考虑到

$$\frac{d\sqrt{V(\mathbf{z})}}{dt} \leq -\frac{\lambda_3}{2\lambda_2} \sqrt{V(\mathbf{z})} + \frac{\sqrt{\lambda_1}}{2\lambda_1} \varepsilon \beta M,$$

则有

$$\|\mathbf{z}(t)\| \leq \sqrt{\frac{V(\mathbf{z})}{\lambda_1}} \leq \frac{\sqrt{\lambda_1 V(\mathbf{z}(t_0))}}{\lambda_1} e^{-\frac{\lambda_3}{2\lambda_2}(t-t_0)} +$$

$$\frac{\varepsilon \beta M}{2\lambda_1} \int_{t_0}^t e^{-\frac{\lambda_3}{2\lambda_2}(t-t_0-s)} ds.$$

因此观测误差满足如下关系:

$$|e_i(t)| = \varepsilon^{n+2-i} \left| z_i\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \right| \leq \varepsilon^{n+2-i} \left\| \mathbf{z}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \right\| \leq$$

$$\varepsilon^{n+2-i} \left\{ \frac{\sqrt{\lambda_1 V(z(t_0))}}{\lambda_1} e^{-\frac{\lambda_3}{2\lambda_2 \varepsilon}(t-t_0)} + \frac{\beta M}{2\lambda_1} \int_{\frac{t_0}{\varepsilon}}^{\frac{t}{\varepsilon}} e^{-\frac{\lambda_3}{2\lambda_2}(\frac{t}{\varepsilon}-s)} ds \right\} \leq O(\varepsilon^{n+3-i}), \forall t \in [t_p, \infty),$$

其中

$$t_p = \max \left\{ t_0 - \frac{2\lambda_2}{\lambda_3} (n+2)\varepsilon \ln \varepsilon, t_0 \right\}.$$

关于 t_p 的求解方法可参见文献 [16]. 于是对于给定的摄动参数 $0 < \varepsilon < 1$, $t_p = t_0 - \frac{2\lambda_2}{\lambda_3} (n+2)\varepsilon \ln \varepsilon$. \square

可见, 当摄动参数足够小时, 系统 (7) 的估计状态可以在整个时域上与系统 (1) 的状态充分接近, 并且估计误差收敛于 $O(\varepsilon^{n+3-i})$. 此外, 各状态的估计误差随着扩张阶数的增加而减小.

进一步, 若记 $w_o = 1/\varepsilon$, 则系统 (7) 可以转换为基于带宽的参数化描述方式.

注 1 与文献 [14] 中关于高阶 LESO 收敛性证明的结论相比, 本文定理 1 清晰地刻画了高阶 LESO 观测误差上界与扩张阶数的定量关系. 同时不难发现, 当扩张阶数逐渐增加时, 假设 1 附加在集总干扰上的约束条件越来越苛刻, 即对于任意的扩张阶数 n , 集总干扰的 n 阶导数存在并有界. 因此, 理论上扩张阶数并不能随意增加.

3 高阶 LESO 的性能分析

本节主要从时域和频域分析的角度入手, 在分别考虑扩张阶数、观测器带宽以及剪切频率的情况下, 探讨高阶及传统 LESO 的动态响应 (估计能力) 和干扰抑制能力与观测器参数间的关系.

3.1 相同观测器带宽情况下的性能分析

假定高阶 LESO 采用基于带宽的参数配置方法, 以系统状态 $x_1(t)$ 以及集总干扰 f 为例, 当扩张阶数为 n 时, 输入 $x_1(t)$ 和 $u(t)$ 与输出 $\hat{x}_1(t)$ 的传递函数为

$$\hat{X}_1(s) = \frac{(s+w_o)^{n+2} - s^{n+2}}{(s+w_o)^{n+2}} X_1(s) + \frac{s^n}{(s+w_o)^{n+2}} U(s),$$

$$Q_1(s) = \frac{(s+w_o)^{n+2} - s^{n+2}}{(s+w_o)^{n+2}}; \quad (9)$$

集总干扰 f 至干扰估计值的传递函数为

$$\hat{F}(s) = \frac{(s+w_o)^{n+2} - s^{n+2} - \alpha_1 w_o s^{n+1}}{(s+w_o)^{n+2}} F(s), \quad (10)$$

其中 α_1 为增益系数, 选取方法可参考系统 (6) 的调参方式. 式 (10) 的具体推导步骤可通过联立方程 (1) 和 (7) 递推获得, 这里略去.

由式 (9) 和 (10) 不难发现, 高阶 LESO 输入输出描述形式中, 输入 $x_1(t)$ 以及集总干扰 f 的传递函数特性严格依赖于扩张阶数.

进一步, 从时域特性角度出发, 令观测器带宽 $w_o = 10$, 当扩张阶数分别取 1、2 和 4 时, 考察扩张阶数对高阶 LESO 阶跃响应的影响, 如图 1 所示.

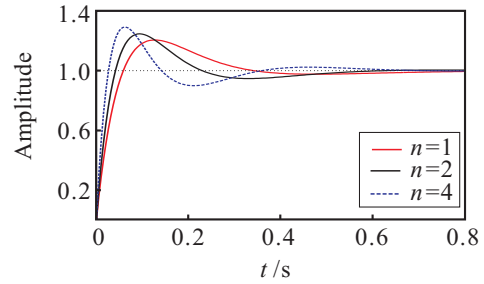


图 1 相同带宽情况下状态 $\hat{x}_1(t)$ 的阶跃响应

由图 1 可以看出, 随着扩张阶数的增加, LESO 响应速度加快, 稳态均无静差, 但超调量由阶数为 1 的 20.6% 明显增加至 29.3% (阶数为 4). 因此对于高阶 LESO 而言, 响应的快速性与平稳性无法兼顾. 此外, 从 $\hat{x}_1(t)$ 的带有强烈超调的响应特性可以推断出, 当系统状态初值与观测器状态初值存在较大偏差时, $\hat{x}_1(t)$ 的导数在过渡阶段会出现明显的峰值现象, 且扩张阶数越高, 该特性越显著.

下面从频域分析的角度出发, 参数选取与上述保持一致, 考察扩张阶数对高阶 LESO 噪声抑制能力的影响, 如图 2 所示.

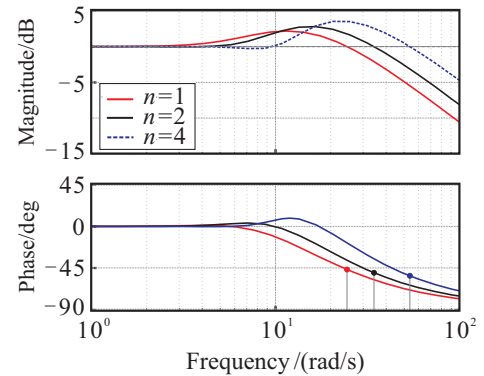


图 2 相同带宽情况下状态 $\hat{x}_1(t)$ 的频率特性

由图 2 可见, 高阶 LESO 随着扩张阶数的增加, 其频率特性右移, 剪切频率由阶数为 1 的 24.5 rad/s 增加至阶数为 4 的 53.8 rad/s. 为叙述方便, 这里将两者速率的变化关系称为膨化系数, 该情况下膨化系数约为 0.5. 此外, 中频段和高频段增益明显增加, 特别是中频段的高峰幅值, 将会直接导致阶跃响应出现较大超调甚至震荡, 该特性与时域分析的结论是一致的. 同时可以发现, 高阶 LESO 对高频噪声的抑制能力明显不如传统 LESO ($n=1$).

3.2 相同扩张阶数情况下的性能分析

与上节分析方法类似, 下面在相同扩张阶数的情况下, 研究观测器带宽对高阶 LESO 的动态响应和噪声抑制能力的影响.

同样, 从时域和频域特性角度出发, 令扩张阶数为2, 当观测器带宽分别取10、50和100时, 高阶LESO阶跃响应和频率特性曲线分别如图3和图4所示。

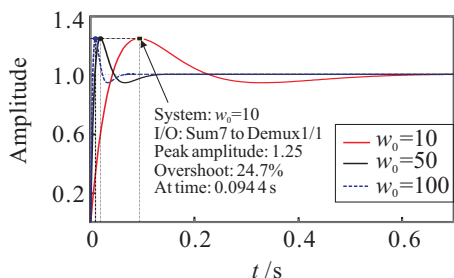


图3 相同扩张阶数情况下状态 $\hat{x}_1(t)$ 的阶跃响应

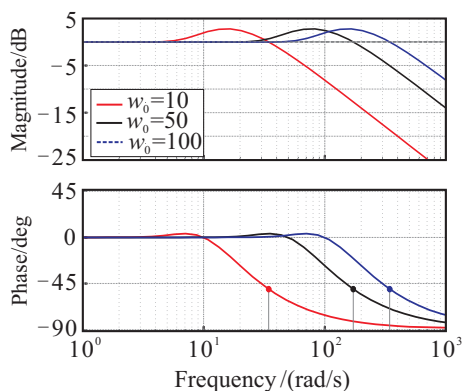


图4 相同扩张阶数情况下状态 $\hat{x}_1(t)$ 的频率特性

由图3可以看出, 随着观测器带宽的增加, 高阶LESO响应速度加快, 超调量均保持一致, 约为24.7%, 稳态均无静差。综合3.1节的分析结果不难得出结论: 观测器带宽仅影响高阶LESO响应的快速性, 超调量的大小不受带宽的影响, 仅与扩张阶数有关。这里给出如下简单的分析。

当 $n = 2$ 时, 式(9)对阶跃信号 $X_1(s) = K/s$ 的响应为

$$\hat{X}_1(s) = \frac{4w_o s^3 + 6w_o^2 s^2 + 4w_o^3 s + w_o^4}{(s + w_o)^4} \frac{K}{s} = K \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + w_o} \right) + K \left(\frac{3w_o}{(s + w_o)^2} - \frac{3w_o^2}{(s + w_o)^3} + \frac{w_o^3}{(s + w_o)^4} \right). \quad (11)$$

对式(11)进行Laplace反变换, 可得

$$\hat{x}_1(t) = K - K \left(-\frac{1}{6} w_o^3 t^3 + \frac{3}{2} w_o^2 t^2 - 3w_o t + 1 \right) e^{-w_o t}. \quad (12)$$

对式(12)求导并令 $\dot{\hat{x}}_1(t) = 0$, 可得极值点为

$$t_1 = 3 + \sqrt{3}/w_o, \quad t_2 = 3 - \sqrt{3}/w_o. \quad (13)$$

将式(13)代入(12), 有

$$\begin{cases} \hat{x}_1(t_1) \approx 1.247K, \\ \hat{x}_1(t_2) \approx 0.956K. \end{cases} \quad (14)$$

显然, 由式(13)和(14)可以得出与图3一致的结论。

由图4可以发现: 高阶LESO随着观测器带宽的增加, 频域特性右移, 剪切频率由带宽为10时的34.4 rad/s增加至带宽为100的366 rad/s, 剪切频率的变化比例与带宽变化比例大致相同, 即膨化系数约为1; 中频段均出现等幅度的峰值增益, 该特点与时域分析的结论保持一致, 即超调量与带宽无关; 高频段增益增加, 高频噪声抑制能力明显减弱。

3.3 相同剪切频率情况下的性能分析

本节在保证LESO高频特性(滤噪特性)近似的前提下, 考察扩张阶数和带宽对高阶LESO的估计能力以及抗干扰能力的影响。图5为当扩张阶数取1、2和4, 对应地选取带宽分别为10、7.4和4.7时高阶LESO状态的频率响应。

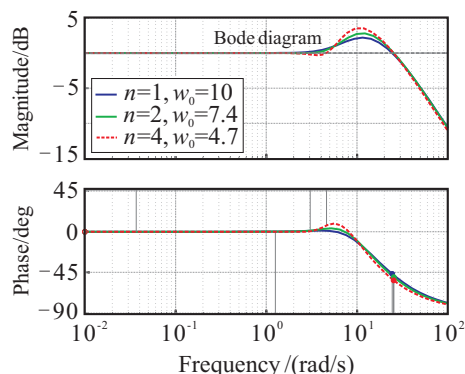


图5 相同剪切频率情况下状态 $\hat{x}_1(t)$ 的频率特性

由图5可知, 在高频特性基本一致的前提下, 扩张阶数越高, 中频段的幅值增益越明显, 将会直接导致阶跃响应出现较大超调甚至震荡, 不利于闭环系统的稳定。由于 $1 - Q_1(s)$ 体现了系统的干扰抑制性能, 在剪切频率保持一致的情况下给出高阶LESO的干扰抑制频率响应, 如图6所示。

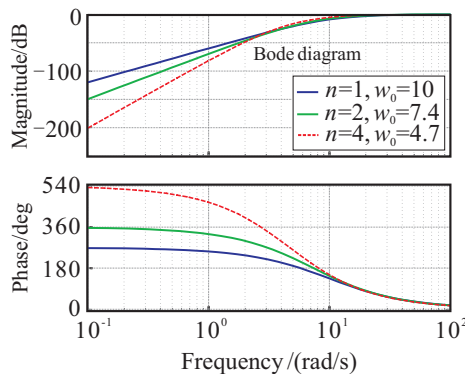


图6 高阶LESO干扰抑制频率响应

由图6不难发现, 随着扩张阶数的增加, 低频段幅值增益下降, 故在低频段高阶LESO对干扰抑制的能力明显优于传统LESO。但考虑到高阶LESO在中频段具有强烈的超调特性, 即高阶LESO在抗干扰能力提升的同时极大地牺牲了闭环系统的鲁棒性, 因此

实际应用中应在闭环系统的鲁棒性和扰动抑制性能方面折中选取扩张阶数。

至此, 不难得出如下结论:

1) 在相同观测器带宽的情况下, 扩张状态高阶化, 有利于更好地跟踪高动态系统状态及干扰, 但是较高的扩张阶数, 同时会诱发严重的峰值现象, 不利于系统稳定; 此外, 高频增益提高, 对高频噪声的抑制能力明显减弱。

2) 在相同扩张阶数的情况下, 增加带宽可以明显提高系统响应速度, 同时会诱发明显的峰值现象(该特性是由线性观测器本质所决定的), 但该情况下引起的峰值效应弱于扩张阶数高阶化时的情况; 此外, 随着带宽增加, 对高频噪声的抑制能力明显减弱。

3) 在相同剪切频率的情况下, 高阶 LESO 在低频段的干扰抑制能力明显优于传统 LESO, 但中频段的高峰幅值会使系统产生较大超调, 无法兼顾闭环系统的鲁棒性。

4) 增加扩张阶数或带宽均可作为提高观测器剪切频率的有效手段, 但从膨化系数来看, 提高带宽的方法明显比扩张阶数高阶化来得高效。

4 仿真结果及分析

本节结合改进的 ADRC 控制器, 从估计能力、峰值现象的抑制、滤噪性能等方面对高阶及传统 LESO 进行系统地性能评估与仿真验证。

为便于对比, 考虑与文献[5]相同的运动控制系统, 其数学模型为

$$\ddot{y} = -1.41\dot{y} + 23.2T_d + 23.2u. \quad (15)$$

其中: y 为输出位移, u 为控制电压, T_d 为转矩扰动。进一步, 记系统状态 $\boldsymbol{x}(t) = [x_1, x_2] = [y, \dot{y}]$, 将式(15)写成形如(1)的标准型, 即

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = f(t, x_1(t), x_2(t), T_d) + \bar{b}u(t), \\ y(t) = x_1(t). \end{cases} \quad (16)$$

其中: \bar{b} 为控制增益标称值的估计, 集总干扰 f 可描述为

$$f(t, x_1(t), x_2(t), T_d) = (-1.41\dot{y} + 23.2T_d + (b - \bar{b})u).$$

参考输入轨迹及其导数由如下动态系统产生:

$$r = \begin{cases} \frac{9}{4}t^2, & 0 \leq t < \frac{1}{3}; \\ \frac{3}{2}t - \frac{1}{4}, & \frac{1}{3} \leq t < \frac{2}{3}; \\ -\frac{9}{4}t^2 + \frac{9}{2}t - \frac{5}{4}, & \frac{2}{3} \leq t < 1; \\ 1, & t \geq 1. \end{cases} \quad (17)$$

显然, 参考轨迹一阶以及二阶导数存在, 由式(17)可方便求出。

为了消除系统的暂态误差, 本文在文献[5]的基础上充分利用参考指令的微分信号, 构造如下基于 LESO 的控制律:

$$u = \frac{1}{\bar{b}}(k_1(r - \hat{y}) + k_2(\dot{r} - \dot{\hat{y}}) - \dot{\hat{f}} + \ddot{r}). \quad (18)$$

其中: k_1 和 k_2 为控制器参数, 其整定原则与文献[5]一致; \hat{y} , $\dot{\hat{y}}$, \hat{f} 由形如式(6)的观测器产生。

记跟踪误差向量 $E = [e_c, \dot{e}_c]$, 其中 $e_c = r - y$, 相应的估计误差向量 $E_o = [y - \hat{y}, \dot{y} - \dot{\hat{y}}, f - \hat{f}]$. 将式(18)代入系统(16)中, 可求出闭环系统的跟踪误差动态为

$$\dot{E} = A_1 E + A_2 E_o. \quad (19)$$

其中

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & -k_2 & 1 \end{bmatrix}.$$

显然, 由本文定理1可知, 观测误差有界, 故在采用基于带宽的参数配置方法的前提下, 可以保证闭环系统的跟踪误差最终一致有界。特别地, 若观测误差趋于零, 则可以保证系统跟踪误差渐近收敛于原点。

仿真中相应的参数选取如下: 控制增益的估计值 $\bar{b} = 25$, 控制器带宽为 20, $k_2 = 40$, $k_1 = 200$, 观测器带宽 $w_o = 200$. 在时刻 $t = 3$ s 时加入阶跃扭矩扰动, 其值为最大扭矩的 20%, 系统(16)与(6)的状态初值均为零。需要说明的是, 文献[5]中扩张阶数为 1, 控制方法采用基于 LESO 的 PD 控制律, 图 7 给出了本文(扩张阶数为 2)与文献[5]的控制效果对比曲线。

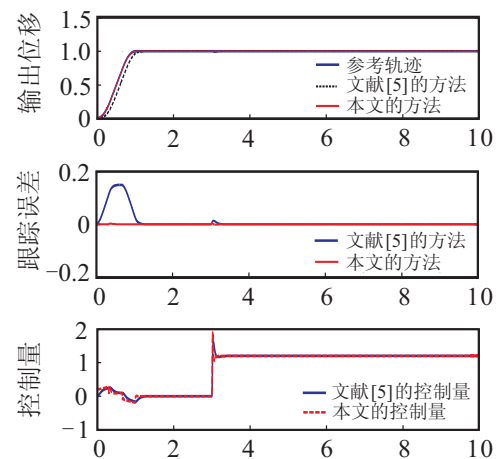


图 7 文献[5]与本文的系统响应曲线

由图7可以发现: 文献[5]的方法由于未有效综合参考轨迹的微分信息, 其过渡阶段存在较大的暂态误差; 由于 LESO 能够实时对集总干扰观测并在反馈控制中加以消除, 跟踪误差在外扰作用期间最大峰值仅为 0.02, 且较快回落并稳定停留在原点附近。与文献[5]的方法相比, 在控制量相当的情况下, 本文的控制方案具有更好的控制性能, 外扰对控制性能的影响基本可以忽略, 跟踪误差全程的均方差仅为 3.4×10^{-4} 。

1) 高阶 LESO 的估计性能评估与验证.

为了进一步考察扩张阶数对 LESO 估计能力的影响, 在采用本文控制方案的基础上, 图 8 给出了扩张阶数分别为 2 和 4 时的系统跟踪误差以及估计误差曲线.

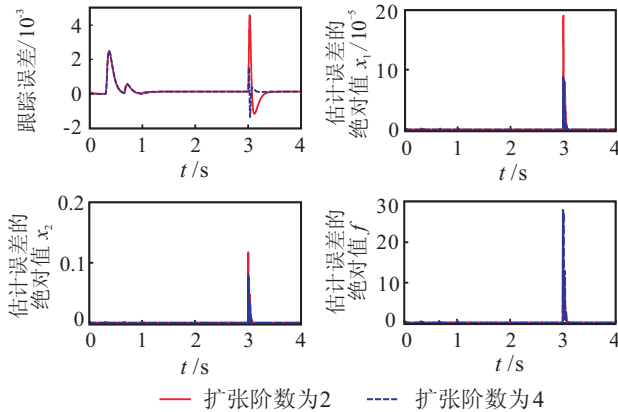


图 8 扩张阶数为 2 和 4 时跟踪误差与估计误差曲线

由图 8 可以看出, 当扩张阶数增加时, LESO 对高动态信号的估计能力明显提高. 以系统状态估计值 $\hat{x}_1(t)$ 为例, 估计误差绝对值的均方差由扩张阶数为 2 时的 6.5×10^{-6} 降为扩张阶数为 4 时的 3.4×10^{-6} . 此外, 由跟踪误差曲线也可以看出, LESO 扩张状态高阶化, 使得系统抑制常值干扰的能力大大提高, 跟踪误差全程的均方差仅为 2.3×10^{-4} , 明显低于阶数为 2 时的均方差 (3.4×10^{-4}).

2) 高阶 LESO 的峰值现象抑制能力评估与验证.

为保证对比的公平性, 控制器设计参数与前面保持一致, 设定观测器 (6) 的状态初值偏离系统 (14) 的初始值, 这里令 $\hat{x}_1(0) = 1$, 其余估计状态初值保持不变. 图 9 为扩张阶数分别为 1 和 4 时估计误差的绝对值曲线.

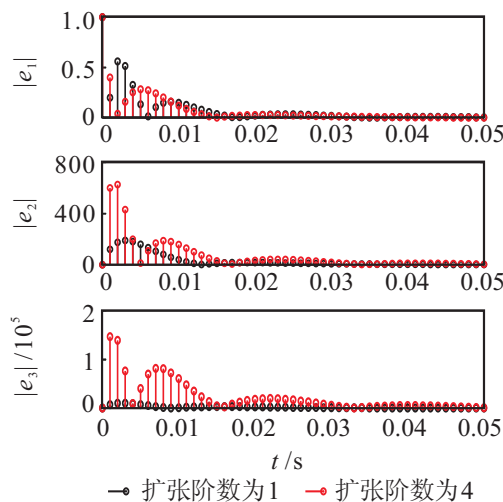


图 9 扩张阶数分别为 1 和 4 时的估计误差绝对值

由图 9 可以看出, 当观测器初值与系统初值存在一定的偏差时, 同时由于高带宽的综合作用, 暂态过

程中的峰值现象将无法避免. 换言之, 扩张阶数的增加, 进一步提高了系统的剪切频率以及动态响应的超调量, 从而加剧了线性观测器所固有的峰值现象. 特别地, 以集总干扰的估计误差为例, 扩张阶数为 4 时, 估计误差绝对值的均方差为 2.6×10^4 , 与扩张阶数为 1 时的均方差 (2.0×10^3) 相比整整增加了约一个数量级.

3) 高阶 LESO 的滤噪性能评估与验证.

设置系统 (16) 与 (6) 的状态初值均为零, 其他控制器参数与上述保持一致. 为逼真模拟实际工程中的量测噪声, 将系统 (16) 中的量测输出修正为

$$y(t) = x_1(t) + n_1(t) = x_1(t) + G(z^{-1})n_0(t). \quad (20)$$

其中: $n_1(t)$ 与 $n_0(t)$ 分别为有色噪声和白噪声, 成型滤波器

$$G(z^{-1}) = \frac{C(z^{-1})}{D(z^{-1})}.$$

这里

$$\begin{cases} C(z^{-1}) = 1 + 0.5z^{-1} + 0.2z^{-2}, \\ D(z^{-1}) = 1 - 1.5z^{-1} + 0.7z^{-2} + 0.1z^{-3}. \end{cases}$$

显然 $C(z^{-1})$ 和 $D(z^{-1})$ 均为稳定多项式, 这里设定系统采样步长 $T = 0.001 \text{ s}$. 图 10 为扩张阶数分别为 1 和 4 时的估计误差曲线.

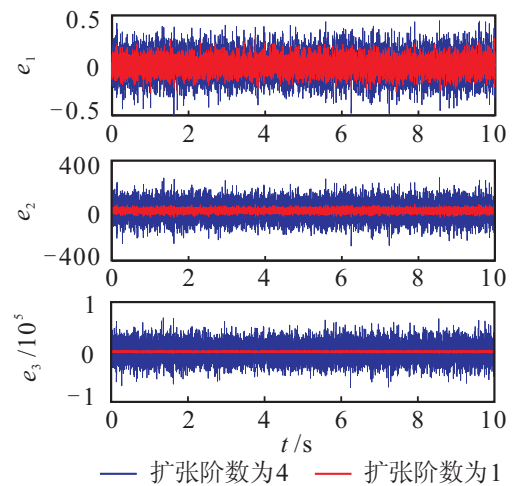


图 10 扩张阶数分别为 1 和 4 时的估计误差

与高阶 LESO 相比, 传统 LESO 具有明显的高频噪声抑制能力. 此外, 随着扩张阶数的提高, 高阶 LESO 的抑噪能力明显减弱, 这点从第 3 节频域特性分析中也可以推断出.

需要注意的是, 上述仿真均是在观测器带宽保持一致的情况下进行的. 关于剪切频率保持一致的仿真结果这里略去, 但结合 3.3 节的性能分析大致可以得到如下结论: 高阶 LESO 在估计能力与滤噪性能方面与传统 LESO 相当; 在常值干扰抑制能力方面优于传统 LESO; 在峰值现象的抑制以及动态响应的平滑性方面明显不如传统 LESO.

综上,在实际工程中应根据被控对象特性、运行环境以及期望的控制品质综合考虑是否需要传统 LESO 高阶化,本文得出的结论可为如何选取 ESO、提升 ADRC 控制能力等问题提供有效的理论依据和实践参考。

5 结 论

本文借助 Lyapunov 逆定理证明了任意扩张阶数下 LESO 重构状态误差的收敛性,并得出了观测误差上界与扩张阶数的定量关系式,探讨了高阶及传统 LESO 的动态响应、干扰抑制能力与观测器参数间的关系;结合改进的 ADRC 控制器,在估计能力、峰值现象的抑制、滤噪性能等方面对高阶及传统 LESO 进行了系统的性能评估与仿真验证. 所得出的结论可为 ADRC 应用研究中 ESO 的选取提供有效的理论指导与实践参考。

致谢 特别感谢美国克利夫兰州立大学电气与计算机工程系高志强教授以及中科院数学与系统科学研究所的薛文超老师对本文提供的指导与帮助!

参考文献(References)

- [1] 黄一, 薛文超. 自抗扰控制: 思想、应用及理论分析[J]. 系统科学与数学, 2012, 32(10): 1287-1307.
(Huang Y, Xue W C. Active disturbance rejection control: Methodology, applications and theoretical analysis[J]. J of Systems Science and Mathematical Sciences, 2012, 32(10): 1287-1307.)
- [2] Lu Y S. Sliding-mode disturbance observer with switching-gain adaptation and its application to optical disk drives[J]. IEEE Trans on Industrial Electronic, 2009, 56(9): 3743-1328.
- [3] Khalil H K. High-gain observers in nonlinear feedback control[C]. Int Workshop on New Directions in Nonlinear Observer Design. London: Springer-Verlag, 1999: 249-268.
- [4] 韩京清. 抗扰控制技术—估计补偿不确定因素的控制技术[M]. 北京: 国防工业出版社, 2008.
(Han J Q. Active disturbance rejection control technique—The technique for estimating and compensating the uncertainties[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2008.)
- [5] Gao Z Q. Scaling and bandwidth-parameterization based controller-tuning[C]. Proc of the 2003 American Control Conf. Denver: IEEE, 2003: 4989-4996.
- [6] Xiao X Y, Huang Y. Capabilities of extended state observer for estimating uncertainties[C]. American Control Conf. St Louis, 2009: 3700-3705.
- [7] Guo B Z, Zhao Z L. On the convergence of an extended state observer for nonlinear systems with uncertainty[J]. Systems & Control Letters, 2011, 60(6): 420-430.
- [8] Zheng Q, Gao L, Gao Z Q. On validation of extended state observer through analysis and experimentation[J]. J of Dynamic Systems, Measurement and Control, 2012, 134(2): 024505.1-024505.6.
- [9] 陈增强, 孙明玮, 杨瑞光. 线性自抗扰控制器的稳定性研究[J]. 自动化学报, 2013, 39(5): 574-580.
(Chen Z Q, Sun M W, Yang R G. On the stability of linear active disturbance rejection control[J]. Acta Automatica Sinica, 2013, 39(5): 574-580.)
- [10] 王海强, 黄海. 扩张状态观测器的性能与应用[J]. 控制与决策, 2013, 28(7): 1078-1082.
(Wang H Q, Huang H. Property and applications of extended state observer[J]. Control and Decision, 2013, 28(7): 1078-1082.)
- [11] Radke A, Gao Z. A survey of state and disturbance observers for practitioners[C]. Proc of the 2006 American Control Conf. Minneapolis, 2006: 5183-5188.
- [12] Ramirez N M, Hebertt S R, Rodriguez A A, et al. An active disturbance rejection controller for a parallel robot via generalized proportional integral observers[C]. American Control Conf. Montreal, 2012: 5478-5483.
- [13] Ushirobira R, Perruquetti W, Mboup M, et al. Algebraic parameter estimation of a multi-sinusoidal waveform signal from noisy data[C]. The 2013 European Control Conf(ECC). Zürich, 2013: 1902-1907.
- [14] Mario R A M, Jose L, Hebertt J, et al. An active disturbance rejection control of leader-follower Thomson's jumping rings[J]. Control Theory & Applications, 2013, 30(12): 1544-1552.
- [15] 王璐, 苏剑波. 基于干扰抑制控制的飞行器姿态跟踪[J]. 控制理论与应用, 2013, 30(12): 1609-1616.
(Wang L, Su J B. Attitude tracking of aircraft based on disturbance rejection control[J]. Control Theory & Applications, 2013, 30(12): 1609-1616.)
- [16] Xue W, Huang Y. Comparison of the DOB based control, a special kind of PID control and ADRC[C]. Proc of the 2011 American Control Conf. San Francisco, 2011: 4373-4379.
(责任编辑: 李君玲)