第 30 卷 第 11 期
Vol. 30 No. 11

控 制 与 决 策
Control and Decision

2015 年 11 月
Nov. 2015

文章编号: 1001-0920 (2015) 11-2097-06 **DOI:** 10.13195/j.kzyjc.2014.0604

基于初始条件优化的一种非等间距 GM(1,1) 建模方法

熊萍萍[1a,1b], 党耀国[2], 姚天祥[1c]

(1. 南京信息工程大学 a. 数学与统计学院，b. 中国制造业发展研究院，c. 经济管理学院，南京 210044；2. 南京航空航天大学 经济与管理学院，南京 210016)

摘 要: 针对非等间距 GM(1,1) 模型的预测问题, 提出一种优化初始条件的方法. 以非等间距一阶累加生成序列各分量的加权平均作为优化的初始值, 根据新信息优先原理, 将一阶累加生成序列的序数序列的单位化序列中各分量作为权重, 利用原始序列与模拟序列误差平方和最小的原则确定初始条件中的时间参数, 建立优化的非等间距 GM(1,1) 模型. 最后, 通过算例验证了所提出的非等间距优化模型的有效性和可行性, 同时表明了该优化模型可以提高预测精度.

关键词: 非等间距；GM(1,1) 模型；初始条件；单位化序列；权重；优化

中图分类号: N941.5 **文献标志码:** A

Modeling method of non-equidistant GM(1,1) model based on optimization initial condition

XIONG Ping-ping[1a,1b], *DANG Yao-guo*[2], *YAO Tian-xiang*[1c]

(1a. College of Mathematics and Statistics，1b. China Institute of Manufacturing Development，1c. College of Economics and Management，Nanjing University of Information Science and Technology，Nanjing 210044, China；2. College of Economics and Management，Nanjing University of Aeronautics and Astronautics，Nanjing 210016，China. Correspondent：XIONG Ping-ping，E-mail：xpp8125@163.com)

Abstract: Based on the predicting problem of the non-equidistant GM(1,1) model, a method of optimizing initial condition is proposed. The initial value is constructed by the weighted average of each component of the non-equidistant first-order accumulative generation operator (1-AGO) sequence on the original sequence. According to the principle of information priority, the weighted coefficients are the respective components of unitization sequence of ordinal sequence which is corresponding to the non-equidistant 1-AGO sequence. The time parameter in initial condition is derived from a method of minimizing error summation of square between the raw sequence and the simulative sequence. Thus the non-equidistant GM(1,1) model is established. Finally, the validity and practicability of the non-equidistant optimal model proposed are verified by examples. And the result shows that the optimal model can significantly improve the simulation and prediction accuracy.

Keywords: non-equidistant；GM(1,1) model；initial condition；unitization sequence；weighted coefficient；optimization

0 引 言

自灰色系统理论提出 30 多年以来, 灰色预测模型解决了许多生产生活中的实际问题, 并广泛应用于诸多领域[1-2]. GM(1,1) 模型是灰色预测模型中最主要的模型之一. 近年来, 许多学者对 GM(1,1) 模型进行了优化和改进, 主要归纳为以下 3 个方面.

1) 一些学者对 GM(1,1) 模型的灰导数进行了优化. 吉培荣等[3]针对 GM(1,1) 建模方法存在偏差的问题, 提出了无偏 GM(1,1) 模型, 有效地改善了预测效果. 穆勇[4-5]提出了一种优化灰导数白化值的方法, 从而建立了一种无偏 GM(1,1) 模型, 并证明了该模型具有白指数律特性. 王义闹等[6]为了提高模型的精度, 将前阶差分商和后阶差分商的加权平均作为导数值, 提出了一种新的建模方法.

2) 部分学者对 GM(1,1) 模型的背景值进行了改进[7-9]. 罗党等[8]和 Wang 等[9]分别利用齐次指数函数

收稿日期: 2014-04-23；**修回日期:** 2014-07-25.

基金项目: 国家自然科学基金项目(71171116, 71371098, 71271226)；中国制造业发展研究院 2014 年度开放课题(SK20140090-13).

作者简介: 熊萍萍(1981−), 女, 讲师, 博士, 从事灰色系统理论的研究；党耀国(1964−), 男, 教授, 博士生导师, 从事灰色系统理论与数量经济等研究.

和非齐次指数函数来拟合一阶累加生成序列, 从而优化了背景值. Lin 等[10]从时间响应函数的角度出发, 提出了一种重构背景值的方法, 同时对残差进行傅立叶变换, 进而对 GM(1,1) 模型进行优化.

3) 也有部分学者对 GM(1,1) 模型白化微分方程的初始条件进行了优化. 初始条件对灰色模型预测精度有着较重要的影响, 传统解法是将一阶累加生成序列的第 1 个数据代表系统发展的初始状态, 并以此为初始条件求解白化微分方程. 而这却违背了邓聚龙教授[1]提出的 "新信息优先" 原理. 为了体现 "新信息优先" 原理, Dang 等[11]以一阶累加生成序列中最后一个数据作为初始条件建立 GM(1,1) 模型, 取得了较好的预测效果. Xie 等[12]提出了离散 GM(1,1) 模型, 并给出 3 种预测模型: 起点固定的离散灰色模型、中点固定的离散灰色模型和终点固定的离散灰色模型. Wang 等[13]将一阶累加生成序列中第 1 个分量和最后一个分量的加权平均, 当作 GM(1,1) 模型的初始值, 但没有求出加权初始条件下的时间参数.

综上所述, 目前对于初始条件的选取主要有 3 种方法. 第 1 种是以一阶累加生成序列的第 1 个数据作为白化微分方程中时间响应函数的初始条件, 这种方法没有体现 "新信息优先" 原理; 第 2 种是以一阶累加生成序列的最后一个数据作为时间响应函数的初始条件, 这种方法过分夸大了最新信息对预测模型的作用; 第 3 种方法是以一阶累加生成序列的第 1 个数据和最后一个数据的加权平均作为初始条件, 这种方法忽略了其余的数据信息对预测模型的作用, 并且没有确定时间参数.

近年来, 有许多学者对非等间距的 GM(1,1) 模型进行了研究[14-20]. 史雪荣等[15]通过将原始数据序列的一次累加生成序列的间距作为乘子建立了非等间距 GM(1,1) 模型预测模型. Wang[16]、戴文战等[17]、王叶梅等[18]分别通过不同形式的背景值, 在非等间距情形下对 GM(1,1) 模型进行改进, 建立了相应的非等间距 GM(1,1) 模型. 罗佑新[19]采用序列的第 n 个分量作为灰色微分方程的初始条件. 吴清海[20]利用非等间距模型对建筑过程中的沉降值进行预测.

本文在上述研究的基础上, 以一阶累加生成序列的各个分量的加权平均作为初始条件对非等间距 GM(1,1) 模型进行优化. 根据新信息优先原理对各个分量的权重进行选取, 并利用原始数据序列与模拟数据序列误差平方和最小的原则求解初始条件中的时间参数, 从而建立初始条件优化的非等间距 GM(1,1) 模型. 最后, 通过算例验证该优化模型的有效性和实用性.

1 两种基本的非等间距 GM(1,1) 模型

定义 1 设序列

$$X^{(0)}=\{x^{(0)}(k_1),x^{(0)}(k_2),\cdots,x^{(0)}(k_n)\},$$

若间距 $\Delta k_i=k_i-k_{i-1}\neq \text{const}, i=2,3,\cdots,n$, 令 $\Delta k_1=1$, 则称 $X^{(0)}$ 为非等间距序列.

定义 2 称序列

$$X^{(1)}=\{x^{(1)}(k_1),x^{(1)}(k_2),\cdots,x^{(1)}(k_n)\}$$

为非等间距序列 $X^{(0)}$ 的一阶累加生成序列, 其中

$$x^{(1)}(k_i)=\sum_{j=1}^{i}x^{(0)}(k_j)\Delta k_j, i=1,2,\cdots,n.$$

定义 3 称序列

$$Z^{(1)}=\{z^{(1)}(k_2),z^{(1)}(k_3),\cdots,z^{(1)}(k_n)\}$$

为非等间距序列 $X^{(1)}$ 的一阶累加生成序列, 其中

$$z^{(1)}(k_i)=0.5(x^{(1)}(k_{(i-1)})+x^{(1)}(k_i)),\ i=2,3,\cdots,n.$$

定义 4 称 $x^{(0)}(k_i)+az^{(1)}(k_i)=b$ 为灰色微分方程, 也称为非等间距 GM(1,1) 模型. 称 $\dfrac{\mathrm{d}x^{(1)}(t)}{\mathrm{d}t}+ax^{(1)}(t)=b$ 为灰色微分方程的白化方程.

定理 1 设 $X^{(0)}$ 为非等间距序列, $X^{(1)}$ 为 $X^{(0)}$ 的 1-AGO 序列, $Z^{(1)}$ 为 $X^{(1)}$ 的紧邻均值生成序列, 若 $\hat{\boldsymbol{a}}=(\hat{a},\hat{b})^{\mathrm{T}}$ 为参数, 且

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-z^{(1)}(k_2) & 1\\ -z^{(1)}(k_3) & 1\\ \vdots & \vdots\\ -z^{(1)}(k_n) & 1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}x^{(0)}(k_2)\\ x^{(0)}(k_3)\\ \vdots\\ x^{(0)}(k_n)\end{bmatrix},$$

则灰色微分方程 $x^{(0)}(k_i)+az^{(1)}(k_i)=b$ 的最小二乘估计参数列满足

$$(\hat{a},\hat{b})^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}.$$

证明略.

定理 2 设 $\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$、$\hat{a}$、$\hat{b}$ 为定理 1 所述条件, $(\hat{a},\hat{b})^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}$, 则:

1) 白化方程 $\dfrac{\mathrm{d}x^{(1)}(t)}{\mathrm{d}t}+ax^{(1)}(t)=b$ 在初始条件 $x^{(1)}(t)|_{t=1}=x^{(1)}(k_1)$ 下的时间响应函数为

$$x^{(1)}(t)=\Big[x^{(1)}(k_1)-\frac{b}{a}\Big]\mathrm{e}^{-a(t-k_1)}+\frac{b}{a};$$

2) 灰色微分方程 $x^{(0)}(k_i)+az^{(1)}(k_i)=b$ 的时间响应函数为

$$\hat{x}^{(1)}(k_i)=\Big[x^{(1)}(k_1)-\frac{b}{a}\Big]\mathrm{e}^{-a(k_i-k_1)}+\frac{b}{a},\quad i=2,3,\cdots,n;$$

3) 还原值为

$$\hat{x}^{(0)}(k_i)=\frac{1}{\Delta k_i}\Big[x^{(1)}(k_1)-\frac{b}{a}\Big](1-\mathrm{e}^{a\Delta k_i})\mathrm{e}^{-a(k_i-k_1)},\quad i=2,3,\cdots,n.$$

证明略.

上述模型称为以 $x^{(1)}(t)|_{t=k_1} = x^{(1)}(k_1)$ 为初始条件的非等间距 GM(1,1) 模型, 记为 $\mathrm{NEGM}(1,1) - x^{(1)}(k_1)$.

定理 3　设 $\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$、$\hat{a}$、$\hat{b}$ 为定理 1 所述条件, $(\hat{a},\hat{b})^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}$, 则:

1) 白化方程 $\dfrac{\mathrm{d}x^{(1)}(t)}{\mathrm{d}t} + ax^{(1)}(t) = b$ 在初始条件 $x^{(1)}(t)|_{t=k_n} = x^{(1)}(k_n)$ 下的时间响应函数为

$$x^{(1)}(t) = \left[x^{(1)}(k_n) - \frac{b}{a}\right]\mathrm{e}^{-a(t-k_n)} + \frac{b}{a};$$

2) 灰色微分方程 $x^{(0)}(k_i) + az^{(1)}(k_i) = b$ 的时间响应函数为

$$\hat{x}^{(1)}(k_i) = \left[x^{(1)}(k_n) - \frac{b}{a}\right]\mathrm{e}^{-a(k_i-k_n)} + \frac{b}{a},\quad i = 2,3,\cdots,n;$$

3) 还原值为

$$\hat{x}^{(0)}(k_i) = \frac{1}{\Delta k_i}\left[x^{(1)}(k_n) - \frac{b}{a}\right](1-\mathrm{e}^{a\Delta k_i})\mathrm{e}^{-a(k_i-k_n)},\quad i = 2,3,\cdots,n.$$

证明略.

上述模型称为以 $x^{(1)}(t)|_{t=k_n} = x^{(1)}(k_n)$ 为初始条件的非等间距 GM(1,1) 模型, 记为 $\mathrm{NEGM}(1,1) - x^{(1)}(k_n)$.

2　非等间距 GM(1,1) 优化模型的构建

在这部分, 将讨论非等间距 GM(1,1) 优化模型的构建. 首先给出初始值权重系数的选取方法, 然后研究时间参数的求解途径.

2.1　非等间距 GM(1,1) 模型初始值的优化

对于初始条件的选取, 目前的研究大多是以第 1 个分量 $x^{(1)}(k_1)$ 或者第 n 个分量 $x^{(1)}(k_n)$ 作为模型的初始条件进行建模. 而实际上模型的预测值与一阶累加生成序列 $X^{(1)}$ 的各个分量都有着密切联系.

为了全面考虑各个分量对应信息对预测模型的影响, 本文将以 $X^{(1)}$ 的各个分量的加权平均作为初始条件对非等间距 GM(1,1) 模型进行优化, 即以 $x^{(1)}(t)|_{t=\beta} = \alpha_1 x^{(1)}(k_1) + \alpha_2 x^{(1)}(k_1) + \cdots + \alpha_n x^{(1)}(k_n)$ (β 为参数) 作为初始条件, 其中 $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 1$. 同时, 由新信息优先原理可知, 对新信息赋予较大的权重, 对旧信息赋予较小的权重可以提高灰色预测模型的功效, 故 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 应满足关系 $\alpha_n > \alpha_{n-1} > \cdots > \alpha_2 > \alpha_1$. 由于序列 $X^{(1)} = \{x^{(1)}(k_1), x^{(1)}(k_2),\cdots,x^{(1)}(k_n)\}$ 的序数序列 $K = \{k_1,k_2,\cdots,k_n\}$ 能够很好地反映各分量对应数据信息的新旧程度, 即 k_i 值越大, 对应分量 $x^{(1)}(k_i)$ 为新信息的程度越大, 为旧信息的程度越小, 反之则相反. 为此, 本文根据对近期分量赋予权重较大、而对远期分量赋予权重相对较小的原则, 赋予第 i 个分量 $x^{(1)}(k_i)$ 的权重为

$$\alpha_i = k_i\Big/\sum_{i=1}^{n} k_i,\ i = 1,2,\cdots,n.$$

易知 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = 1$, 且 $\alpha_n > \alpha_{n-1} > \cdots > \alpha_2 > \alpha_1$.

记权重向量为 $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$, 则该向量恰为序数序列 K 对应的单位化序列 K', 即

$$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n) = K' = \left[\frac{k_1}{\sum_{i=1}^{n}k_i},\ \frac{k_2}{\sum_{i=1}^{n}k_i},\ \cdots,\ \frac{k_{n-1}}{\sum_{i=1}^{n}k_i},\ \frac{k_n}{\sum_{i=1}^{n}k_i}\right].$$

定理 4　设 $(\hat{a},\hat{b})^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}$, 则:

1) 白化方程 $\dfrac{\mathrm{d}x^{(1)}(t)}{\mathrm{d}t} + ax^{(1)}(t) = b$ 在初始条件 $x^{(1)}(t)|_{t=\beta} = \alpha_1 x^{(1)}(k_1) + \alpha_2 x^{(1)}(k_2) + \cdots + \alpha_n x^{(1)}(k_n)$ 下的时间响应函数为

$$x^{(1)}(t) = \Big[\alpha_1 x^{(1)}(k_1) + \alpha_2 x^{(1)}(k_2) + \cdots + \alpha_n x^{(1)}(k_n) - \frac{b}{a}\Big]\mathrm{e}^{-a(t-\beta)} + \frac{b}{a};$$

2) 灰色微分方程 $x^{(0)}(k_i) + az^{(1)}(k_i) = b$ 的时间响应函数为

$$\hat{x}^{(1)}(k_i) = \Big[\alpha_1 x^{(1)}(k_1) + \alpha_2 x^{(1)}(k_2) + \cdots + \alpha_n x^{(1)}(k_n) - \frac{b}{a}\Big]\mathrm{e}^{-a(k_i-\beta)} + \frac{b}{a},\quad i = 2,3,\cdots,n;$$

3) 还原值为

$$\hat{x}^{(0)}(k_i) = \frac{1}{\Delta k_i}\Big[\alpha_1 x^{(1)}(k_1) + \alpha_2 x^{(1)}(k_2) + \cdots + \alpha_n x^{(1)}(k_n) - \frac{b}{a}\Big](1-\mathrm{e}^{a\Delta k_i})\mathrm{e}^{-a(k_i-\beta)},\quad i = 2,3,\cdots,n.$$

证明　1) 由于 $\dfrac{\mathrm{d}x^{(1)}(t)}{\mathrm{d}t} + ax^{(1)}(t) = b$ 的通解为

$$x^{(1)}(t) = \frac{b}{a} + c\mathrm{e}^{-at},\tag{1}$$

其中 c 为任意常数, 将

$$x^{(1)}(t)|_{t=\beta} = \alpha_1 x^{(1)}(k_1) + \alpha_2 x^{(1)}(k_2) + \cdots + \alpha_n x^{(1)}(k_n)$$

代入式 (1), 得

$$c = \Big[\alpha_1 x^{(1)}(k_1) + \alpha_2 x^{(1)}(k_2) + \cdots + \alpha_n x^{(1)}(k_n) - \frac{b}{a}\Big]\mathrm{e}^{a\beta}.$$

从而得到白化方程 $\dfrac{\mathrm{d}x^{(1)}(t)}{\mathrm{d}t} + ax^{(1)}(t) = b$ 的时间响应函数为

$$x^{(1)}(t) = \Big[\alpha_1 x^{(1)}(k_1) + \alpha_2 x^{(1)}(k_2) + \cdots + \alpha_n x^{(1)}(k_n) - \frac{b}{a}\Big]\mathrm{e}^{-a(t-\beta)} + \frac{b}{a}.$$

2) 由 1) 的证明结果, 令 $t=k_i$, 得

$$\hat{x}^{(1)}(k_i)=\Big[\alpha_1x^{(1)}(k_1)+\alpha_2x^{(1)}(k_2)+\cdots+\alpha_nx^{(1)}(k_n)-\frac{b}{a}\Big]\mathrm{e}^{-a(k_i-\beta)}+\frac{b}{a},\quad i=2,3,\cdots,n.$$

3) 将结论 2) 代入 $\hat{x}^{(0)}(k_i)=\dfrac{\hat{x}^{(1)}(k_i)-\hat{x}^{(1)}(k_{i-1})}{\Delta k_i}$ 中, 从而可得

$$\hat{x}^{(0)}(k_i)=\frac{1}{\Delta k_i}\Big[\alpha_1x^{(1)}(k_1)+\alpha_2x^{(1)}(k_2)+\cdots+\alpha_nx^{(1)}(k_n)-\frac{b}{a}\Big](1-\mathrm{e}^{a\Delta k_i})\mathrm{e}^{-a(k_i-\beta)},\quad i=2,3,\cdots,n. \qquad \square$$

上述模型称为初始值加权平均的非等间距 GM(1,1) 模型, 记为 $\mathrm{IVWA-NEGM}(1,1)$ 模型. 该模型更好地体现了 "新信息优先" 原理, 它有效地避免了 $\mathrm{NEGM}(1,1)-x^{(1)}(k_1)$ 模型和 $\mathrm{NEGM}(1,1)-x^{(1)}(k_n)$ 模型的不足: 前者没有考虑新信息对模型预测效果的影响, 后者则过于强调新信息对模型预测效果的影响.

2.2 参数 β 的求解

关于参数 β 的求解可以采用类似最小二乘原则的方法, 建立无约束优化模型, 求解模拟序列

$$\hat{X}^{(0)}=\{\hat{x}^{(0)}(k_1),\hat{x}^{(0)}(k_2),\cdots,\hat{x}^{(0)}(k_n)\}$$

与原始数据序列 $X^{(0)}=\{x^{(0)}(k_1),\ x^{(0)}(k_2),\ \cdots,\ x^{(0)}(k_n)\}$ 的离差平方和最小, 即求解如下最优化问题:

$$\min_\beta\sum_{i=1}^n\big(\hat{x}^{(0)}(k_i)-x^{(0)}(k_i)\big)^2=\min_\beta S.$$

由定理 4 中结论 3) 可得

$$S=\sum_{i=1}^n\big(\hat{x}^{(0)}(k_i)-x^{(0)}(k_i)\big)^2=\sum_{i=1}^n\Big\{\frac{1}{\Delta k_i}\Big[\alpha_1x^{(1)}(k_1)+\alpha_2x^{(1)}(k_2)+\cdots+\alpha_nx^{(1)}(k_n)-\frac{b}{a}\Big](1-\mathrm{e}^{a\Delta k_i})\mathrm{e}^{-a(k_i-\beta)}-x^{(0)}(k_i)\Big\}^2.$$

一阶条件为

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\beta}=0=2a\sum_{i=1}^n\Big\{\frac{1}{\Delta k_i}\Big[\alpha_1x^{(1)}(k_1)+\alpha_2x^{(1)}(k_2)+\cdots+\alpha_nx^{(1)}(k_n)-\frac{b}{a}\Big](1-\mathrm{e}^{a\Delta k_i})\mathrm{e}^{-a(k_i-\beta)}-x^{(0)}(k_i)\frac{1}{\Delta k_i}\Big[\alpha_1x^{(1)}(k_1)+\alpha_2x^{(1)}(k_2)+\cdots+\alpha_nx^{(1)}(k_n)-\frac{b}{a}\Big](1-\mathrm{e}^{a\Delta k_i})\mathrm{e}^{-a(k_i-\beta)}\Big\},$$

其中 $-a$ 称为非等间距 GM(1,1) 模型的发展系数, 反映了 $x^{(1)}(k_i)$ 和 $x^{(0)}(k_i)$ 的发展态势, 因此 $a\neq0$. 从而可得

$$\sum_{i=1}^n\Big\{\frac{1}{\Delta k_i}\Big[\alpha_1x^{(1)}(k_1)+\alpha_2x^{(1)}(k_2)+\cdots+\alpha_nx^{(1)}(k_n)-\frac{b}{a}\Big](1-\mathrm{e}^{a\Delta k_i})\mathrm{e}^{-a(k_i-\beta)}-x^{(0)}(k_i)\frac{1}{\Delta k_i}\Big[\alpha_1x^{(1)}(k_1)+\alpha_2x^{(1)}(k_2)+\cdots+\alpha_nx^{(1)}(k_n)-\frac{b}{a}\Big](1-\mathrm{e}^{a\Delta k_i})\mathrm{e}^{-a(k_i-\beta)}\Big\}=0.$$

整理后可得

$$\mathrm{e}^{a\beta}=\sum_{i=1}^n\frac{1}{\Delta k_i}(1-\mathrm{e}^{a\Delta k_i})\mathrm{e}^{-ak_i}x^{(0)}(k_i)\Big/\Big[\alpha_1x^{(1)}(k_1)+\alpha_2x^{(1)}(k_2)+\cdots+\alpha_nx^{(1)}(k_n)-\frac{b}{a}\Big]\times\sum_{i=1}^n\frac{1}{\Delta k_i{}^2}(1-\mathrm{e}^{a\Delta k_i})^2\mathrm{e}^{-2ak_i}.$$

从而可求得

$$\beta=\frac{1}{a}\ln\frac{r}{st}. \tag{2}$$

其中

$$r=\sum_{i=1}^n\frac{1}{\Delta k_i}(1-\mathrm{e}^{a\Delta k_i})\mathrm{e}^{-ak_i}x^{(0)}(k_i),$$

$$t=\sum_{i=1}^n\frac{1}{\Delta k_i{}^2}(1-\mathrm{e}^{a\Delta k_i})^2\mathrm{e}^{-2ak_i},$$

$$s=\Big[\alpha_1x^{(1)}(k_1)+\alpha_2x^{(1)}(k_2)+\cdots+\alpha_nx^{(1)}(k_n)-\frac{b}{a}\Big].$$

2.3 模型检验

本文利用文献 [21] 中的检验方法对模型进行检验. 将第 k_i 时刻的相对误差记为 δ_{k_i}, 其公式为

$$\delta_{k_i}=\left|\frac{\hat{x}^{(0)}(k_i)-x^{(0)}(k_i)}{x^{(0)}(k_i)}\right|\times100\%,\ i=2,3,\cdots,n.$$

所有时点的平均相对误差记为 $\bar{\delta}$, 其公式为

$$\bar{\delta}=\frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^n\delta_{k_i}.$$

给定 α, 当 $\delta_{k_i}<\alpha$ 且 $\bar{\delta}<\alpha$ 时, 称模型为残差合格模型.

定义 5 当两个模型都为残差合格模型时, 则认为预测精度更高的模型为更好的预测模型.

3 算例分析

某高层建筑施工工地, 为了安全起见, 在高层建筑物施工期间布设了多个沉降观测点, 部分观测数据如表 1 所示[20].

记表 1 的数据为原始数据序列 $X^{(0)}$, 下面将利用 $\mathrm{NEGM}(1,1)-x^{(1)}(k_1)$ 模型、$\mathrm{NEGM}(1,1)-x^{(1)}(k_n)$ 模型及本文提出的 $\mathrm{IVWA-NEGM}(1,1)$ 模型对 $X^{(0)}$ 中的前 8 个数据进行建模, 后 2 个数据用来预测, 以对

表 1 某高层建筑累计沉降观测值

序号 i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
时间 k_i	1	25	53	83	116	147	177	237	269	355
沉降观测值 $X^{(0)}$/mm	9.28	10.71	11.31	11.64	12	12.23	13.05	13.16	13.61	13.94

比 3 种模型的预测精度.

经过计算可得: $a = -0.001\,04, b = 10.8$. 下面分别建立 3 种模型.

1) 建立 $\text{NEGM}(1,1) - x^{(1)}(k_1)$ 模型, 简记为模型 1, 从而可得时间响应函数

$$\hat{x}^{(1)}(k_i) = 10\,393.895\,38\text{e}^{-0.001\,04(k_i-1)} - 10\,384.615\,38,\ i = 2, 3, \cdots, 10. \tag{3}$$

2) 建立 $\text{NEGM}(1,1) - x^{(1)}(k_n)$ 模型, 简记为模型 2, 从而可得时间响应函数

$$\hat{x}^{(1)}(k_i) = 13\,273.045\,38\text{e}^{-0.001\,04(k_i-237)} - 10\,384.615\,38,\ i = 2, 3, \cdots, 10. \tag{4}$$

3) 建立 $\text{IVWA}-\text{NEGM}(1,1)$ 模型, 简记为模型 3, 由式 (2) 可计算得到, $\beta = 176.250\,05$, $X^{(1)} = \{x^{(1)}(k_1), x^{(1)}(k_2), \cdots, x^{(1)}(k_n)\}$的序数序列为

$$K = \{1, 25, 53, 83, 116, 147, 177, 237\}.$$

通过计算序数序列 K 对应的单位化序列, 可得各分量的权重向量为

$$\boldsymbol{\alpha} = (0.001\,19, 0.029\,80, 0.063\,17, 0.098\,93, 0.138\,26, 0.175\,21, 0.210\,97, 0.282\,48),$$

从而得到时间响应函数

$$\hat{x}^{(1)}(k_i) = 12\,263.087\,86\text{e}^{-0.001\,04(k_i-176.250\,05)} - 10\,384.615\,38,\ i = 2, 3, \cdots, 10.$$

根据式 (3) ∼ (5), 可以得到 3 种模型的模拟预测值, 如表 2 所示.

表 2 3 种模型对 $x^{(0)}(k_i)$ 的模拟值、预测值及相对误差

k_i	实际值 $x^{(0)}(k_i)$	模型 1		模型 2		模型 3	
		模拟值 $\hat{x}^{(0)}(k_i)$	相对模拟误差 δ_{k_i} / %	模拟值 $\hat{x}^{(0)}(k_i)$	相对模拟误差 δ_{k_i} / %	模拟值 $\hat{x}^{(0)}(k_i)$	相对模拟误差 δ_{k_i} /%
25	10.71	10.95	2.200 6	10.94	2.106 3	10.76	0.489 4
53	11.31	11.25	0.567 6	11.24	0.659 4	11.06	2.232 5
83	11.64	11.59	0.427 8	11.58	0.519 7	11.40	2.095 0
116	12	11.98	0.197 6	11.97	0.289 7	11.78	1.868 6
147	12.23	12.38	1.238 7	12.37	1.145 2	12.17	0.456 4
177	13.05	12.78	2.065 2	12.77	2.155 6	12.57	3.704 9
237	13.16	13.39	1.781 7	13.38	1.687 7	13.17	0.077 5

k_i	实际值 $x^{(0)}(k_i)$	模型 1		模型 2		模型 3	
		预测值 $\hat{x}^{(0)}(k_i)$	相对预测误差 δ_{k_i} /%	预测值 $\hat{x}^{(0)}(k_i)$	相对预测误差 δ_{k_i} /%	预测值 $\hat{x}^{(0)}(k_i)$	相对预测误差 δ_{k_i} /%
269	13.61	14.05	3.227 0	14.04	3.131 8	13.81	1.498 7
355	13.94	14.94	7.191 9	14.93	7.092 9	14.69	5.397 1

由表 2 可知, 模型 1、模型 2 和模型 3 的模拟相对误差都在 10% 以内 (本文取 $\alpha = 10\%$), 再由 3.3 节可知, 3 种模型均为残差合格模型. 此外, 模型 1、模型 2 和模型 3 的一步预测误差分别为: 3.227 0%, 3.131 8%, 1.498 7%; 二步预测误差分别为: 7.191 9%, 7.092 9%, 5.397 1%. 从而表明本文提出的 $\text{IVWA} - \text{NEGM}(1,1)$ 模型的预测效果优于另外两种非等间距 GM(1,1) 模型.

4 结 论

根据新信息优先原理, 本文将非等间距一阶累加生成序列中各个分量的加权平均作为初始值对非等间距 GM(1,1) 模型进行优化, 以一阶累加生成序列对应的序数序列的单位化序列中各分量作为权重系数, 并利用误差平方和最小的原则确定出时间参数, 从而建立非等间距 GM(1,1) 优化模型, 即 $\text{IVWA} - \text{NEGM}(1,1)$ 模型. 该模型能有效地避免 $\text{NEGM}(1,1) - x^{(1)}(k_1)$ 模型和 $\text{NEGM}(1,1) - x^{(1)}(k_n)$ 模型的不足: 前者没有考虑新信息对模型预测效果的影响; 后者则过于强调新信息对模型预测效果的影响. 最后, 通过算例分析验证了本文提出的 $\text{IVWA} - \text{NEGM}(1,1)$ 模型能有效提高预测精度.

然而, 本文依然存在一些不足. 例如, 可以将权重和初始值都视为任意变量, 通过建立误差平方和最小或平均相对误差绝对值最小的多变量优化模型求出这些变量, 预测效果应该会更好, 模型也将会更加简洁. 但是由于变量个数较多, 用遗传算法等方法计算时可能会出现结果不收敛的情形, 因此, 这部分内容将有待进一步研究和完善.

参考文献(References)

[1] 邓聚龙. 灰理论基础[M]. 武汉: 华中理工大学出版社, 2002: 2-5.
(Deng J L. The basis of grey theory[M]. Wuhan: Press of Huazhong University of Science and Technology, 2002: 2-5.)

[2] 刘思峰, 党耀国, 方志耕. 灰色系统理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2004: 3-6.
(Liu S F, Dang Y G, Fang Z G. Grey system theory and its application[M]. Beijing: Science Press, 2004: 3-6.)

[3] 吉培荣, 黄巍松, 胡翔勇. 无偏灰色预测模型[J]. 系统工程与电子技术, 2000, 22(6): 6-8.
(Ji P R, Huang W S, Hu X Y. An unbiased grey forecasting model[J]. Systems Engineering & Electronics, 2000, 22(6): 6-8.)

[4] 穆勇. 具有白指数律重合性的GM(1,1)模型[J]. 数学的实践与认识, 2002, 32(1): 15-19.
(Mu Y. The GM(1,1) model with white index law and overlapping nature[J]. Mathematic in Practice and Theory, 2002, 32(1): 15-19.)

[5] 穆勇. 无偏灰色无偏GM(1,1)模型的直接建模法[J]. 系统工程与电子技术, 2003, 25(9): 1094-1096.
(Mu Y. A direct modeling method of the unbiased GM(1,1)[J]. Systems Engineering & Electronics, 2003, 25(9): 1094-1096.)

[6] 王义闹, 刘开第, 李应川. 优化灰导数白化值的GM(1,1)建模法[J]. 系统工程理论与实践, 2001, 21(5): 124-128.
(Wang Y N, Liu K D, Li Y C. GM(1,1) modeling method of optimum the whitening values of grey derivative[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2001, 21(5): 124-128.)

[7] 谭冠军. GM(1,1)模型的背景值构造方法和应用[J]. 系统工程理论与实践, 2000, 20(4): 99-103.
(Tan G J. The structure method and application of background value in grey system GM(1,1) model[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2000, 20(4): 99-103.)

[8] 罗党, 刘思峰, 党耀国. 灰色模型GM(1,1)优化[J]. 中国工程科学, 2003, 5(8): 50-53.
(Luo D, Liu S F, Dang Y G. The optimization of grey model GM(1,1)[J]. Chinese Engineering Science, 2003, 5(8): 50-53.)

[9] Wang Z X, Dang Y G, Liu S F. The optimization of background value in GM(1,1) model[J]. J of Grey System, 2007, 10(2): 69-74.

[10] Lin Y H, Lee P C, Chang T P. Adaptive and high-precision grey forecasting model[J]. Expert Systems with Applications, 2009, 36(6): 9658-9662.

[11] Dang Y G, Liu S F. The GM models that $x(n)$ be taken as initial value[J]. Kybernetes, 2004, 33(2): 247-255.

[12] Xie N M, Liu S F. Discrete grey forecasting model and its optimization[J]. Applied Mathematical Modelling, 2009, 33(2): 1173-1186.

[13] Wang Y H, Dang Y G, Liu S F. An approach to increase prediction precision of GM(1,1) model based on optimization of the initial condition[J]. Expert Systems with Applications, 2010, 37(8): 5640-5644.

[14] Deng Ju-long. A novel GM(1,1) model for nonequigap series[J]. J of Grey System, 1997, 9(2): 111-115.

[15] 史雪荣, 王作雷, 张正娣. 变参数非等间距GM(1,1)模型及应用[J]. 数学的实践与认识, 2006, 36 (6): 216-220.
(Shi X R, Wang Z L, Zhang Z D. GM(1,1) model with variational parameter for non-equidistant sequence and its application[J]. J of Mathematics in Practice & Theory, 2006, 36(6): 216-220.)

[16] Wang F X. Improvement on unequal interval gray forecast model[J]. Fuzzy Information and Engineering, 2006, 6(1): 118-123.

[17] 戴文战, 李俊峰. 非等间距GM(1,1)模型建模研究[J]. 系统工程理论与实践, 2005, 9(9): 89-93.
(Dai W Z, Li J F. Modeling research on non-equidistance GM(1,1) Model[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2005, 9(9): 89-93.)

[18] 王叶梅, 党耀国, 王正新. 非等间距GM(1,1)模型背景值的优化[J]. 中国管理科学, 2008, 16(4): 159-162.
(Wang Y M, Dang Y G, Wang Z X. The optimization of background value in non-Equidistant GM(1,1) model[J]. Chinese J of Management Science, 2008, 16(4): 159-162.)

[19] 罗佑新. 非等间距新息GM(1,1)的逐步优化模型及其应用[J]. 系统工程理论与实践, 2010, 30(12): 2254-2258.
(Luo Y X. Non-equidistant step by step optimum new information GM(1,1) and its application[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2010, 30(12): 2254-2258.)

[20] 吴清海. 非等间距模型在沉降预测中的应用研究[J]. 工程勘测, 2007, 35(12): 57-60.
(Wu Q H. The application of the non-equidistant model on subsidence predicting[J]. Geotechnical Investigation & Surveying, 2007, 35(12): 57-60.)

[21] 王正新, 党耀国, 赵洁珏. 优化的GM(1,1)幂模型及其应用[J]. 系统工程理论与实践, 2012, 32(9): 1973-1978.
(Wang Z X, Dang Y G, Zhao J J. Optimized GM(1,1) power model and its application[J]. Systems Engineering- Theory & Practice, 2012, 32(9): 1973-1978.)

(责任编辑：李君玲)